

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД
МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

5 класс

6 заданий по 5 баллов
(максимум 30 баллов)

продолжительность 40 минут



olympo.ru



[@olymp_mo](https://www.instagram.com/olymp_mo)



[/olympo](https://www.facebook.com/olympo)



[/olympo](https://vk.com/olympo)



[@olympo](https://www.telegram.com/@olympo)

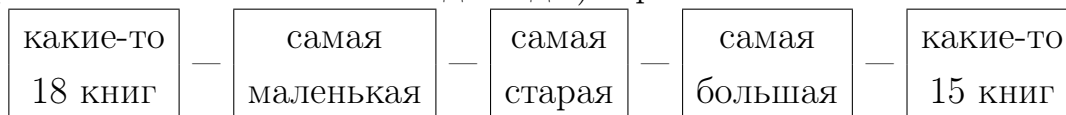
Задание №1. Книжная полка

Вариант 1 задания №1

На некоторой книжной полке книги стоят в один ряд. Самая большая и самая маленькая книги обе стоят вплотную к самой старой книге. Слева от самой большой книги стоит 20 книг, а справа от самой маленькой – 17 книг. Сколько книг может стоять на этой полке? Укажите в ответе наименьшее возможное число книг!

Решение:

Наименьшее возможное (т.е. удовлетворяющее условиям задачи) число книг будет в том случае, если самая старая книга стоит слева от самой большой (и входит в число 20 книг, стоящих слева от самой большой) и в то же время самая старая книга стоит справа от самой маленькой (и входит в число 17 книг, стоящих справа от самой маленькой). В этом случае общее число книг равно $20 + 17 - 1$ («–1» – потому что самая старая книга была посчитана дважды) и равно 36. А книги стоят так:



Ответ: 36 книг

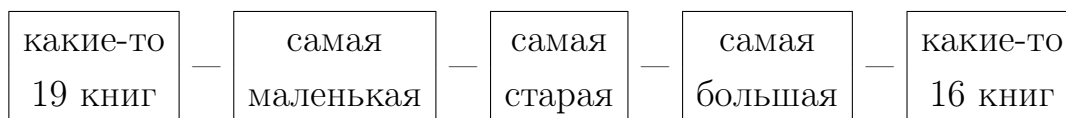
Вариант 2 задания №1

На некоторой книжной полке книги стоят в один ряд. Самая большая и самая маленькая книги обе стоят вплотную к самой старой книге. Слева от самой большой книги стоит 21 книга, а справа от самой маленькой – 18 книг. Сколько книг может стоять на этой полке? Укажите в ответе наименьшее возможное число книг!

Решение:

Наименьшее возможное (т.е. удовлетворяющее условиям задачи) число книг будет в том случае, если самая старая книга стоит слева от самой большой (и входит в число 21 книги, стоящих слева от самой большой) и в то же время самая старая книга стоит справа от самой маленькой (и входит в число 18 книг, стоящих справа от самой маленькой). В этом случае общее число книг равно $21 + 18 - 1$ («–1» – потому что самая старая книга была посчитана дважды) и равно 38. А книги стоят так:





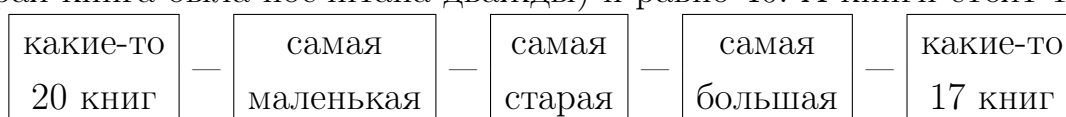
Ответ: 38 книг

Вариант 3 задания №1

На некоторой книжной полке книги стоят в один ряд. Самая большая и самая маленькая книги обе стоят вплотную к самой старой книге. Слева от самой большой книги стоят 22 книги, а справа от самой маленькой – 19 книг. Сколько книг может стоять на этой полке? Укажите в ответе наименьшее возможное число книг!

Решение:

Наименьшее возможное (т.е. удовлетворяющее условиям задачи) число книг будет в том случае, если самая старая книга стоит слева от самой большой (и входит в число 22 книг, стоящих слева от самой большой) и в то же время самая старая книга стоит справа от самой маленькой (и входит в число 19 книг, стоящих справа от самой маленькой). В этом случае общее число книг равно $22 + 19 - 1$ («–1» – потому что самая старая книга была посчитана дважды) и равно 40. А книги стоят так:



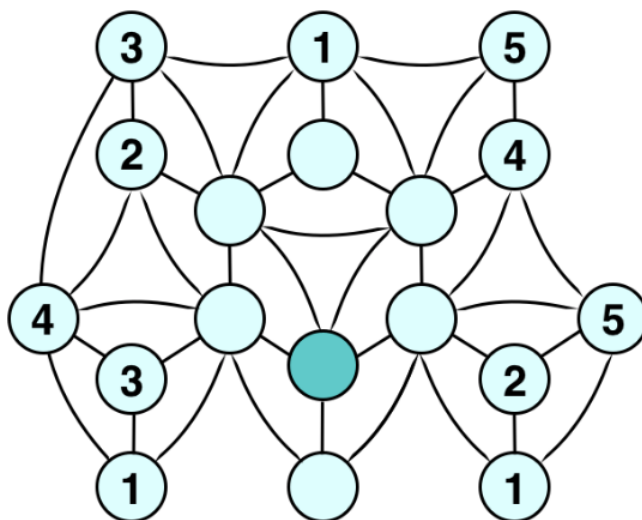
Ответ: 40 книг



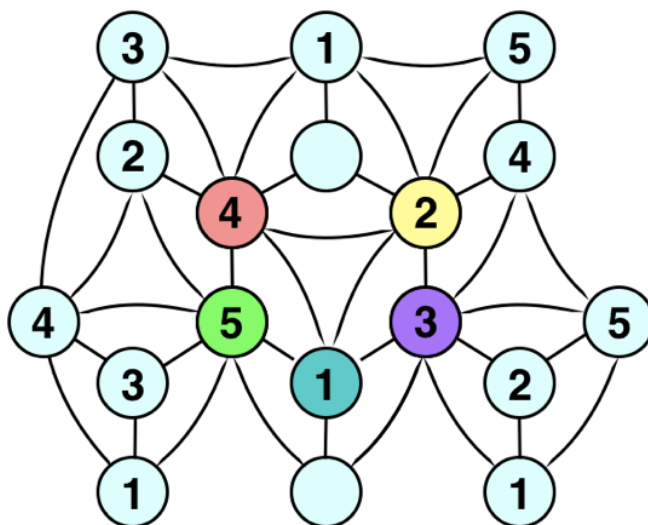
Задание №2. Вписываем числа

Вариант 1 задания №2

В кружки на рисунке требуется вписать числа 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы в кружках, соединённых линией, оказались разные числа (иными словами, не должно быть двух кружков, соединённых линией, в которых написаны одинаковые числа). Некоторые кружки уже заполнены. Остальные – пока нет. Заполните их (у себя в тетради или в уме). Какое число будет в кружочке, закрашенном более тёмным цветом? (Обратите внимание, что все кружочки на картинке должны быть заполнены числами (каждый – одним из чисел 1, 2, 3, 4, 5). А в поле для ответа нужно вписать только то число, которое должно быть в более тёмном кружочке. Если есть несколько подходящих чисел, впишите в ответ самое большое из них.)



Решение:



Рассмотрим фиолетовый кружок: из него ведут линии в кружки с числами 1, 2, 5 и 4. Значит в нем стоит тройка. Рассуждая совершенно аналогично, видим, что в зеленом кружке стоит пятерка. Теперь, в аналогичной ситуации оказываются уже красный и желтый кружки – они соединены линиями с кружками, в которых стоят четыре разных числа. Значит, и в них однозначно определяется стоящее число. Теперь наконец, мы видим, что и закрашенный темным кружок, о котором нас спрашивали в задаче, оказался в аналогичном положении. В нем оказывается единица.

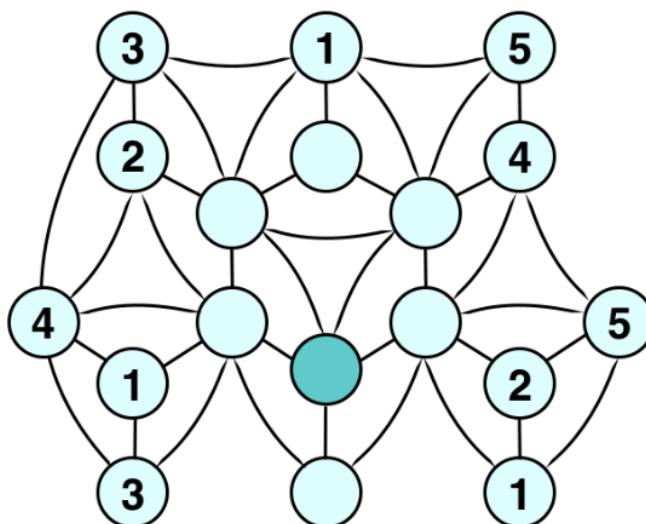
Ответ: 1

Вариант 2 задания №2

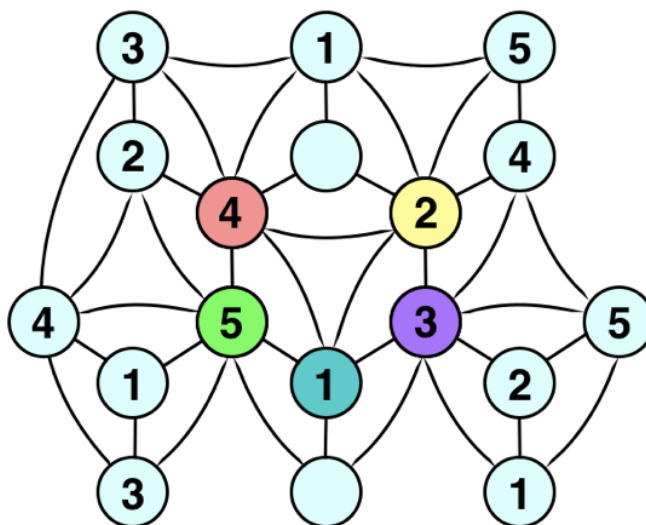
В кружки на рисунке требуется вписать числа 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы в кружках, соединённых линией, оказались разные числа (иными словами, не должно быть двух кружков, соединённых линией, в которых написаны одинаковые числа). Некоторые кружки уже заполнены. Остальные – пока нет. Заполните их (у себя в тетради или в уме). Какое число будет в кружочке, закрашенном более тёмным цветом? (Обратите внимание, что все кружочки на картинке должны быть заполнены числами (каждый – одним из чисел 1, 2, 3, 4, 5). А в поле для ответа нужно вписать только то число,



которое должно быть в более тёмном кружочке. Если есть несколько подходящих чисел, впишите в ответ самое большое из них.)



Решение:



Рассмотрим фиолетовый кружок: из него ведут линии в кружки с числами 1, 2, 5 и 4. Значит в нем стоит тройка. Рассуждая совершенно аналогично, видим, что в зеленом кружке стоит пятерка. Теперь, в аналогичной ситуации оказываются уже красный и желтый кружки – они соединены линиями с кружками, в которых стоят четыре разных числа. Значит, и в них однозначно определяется стоящее число. Теперь

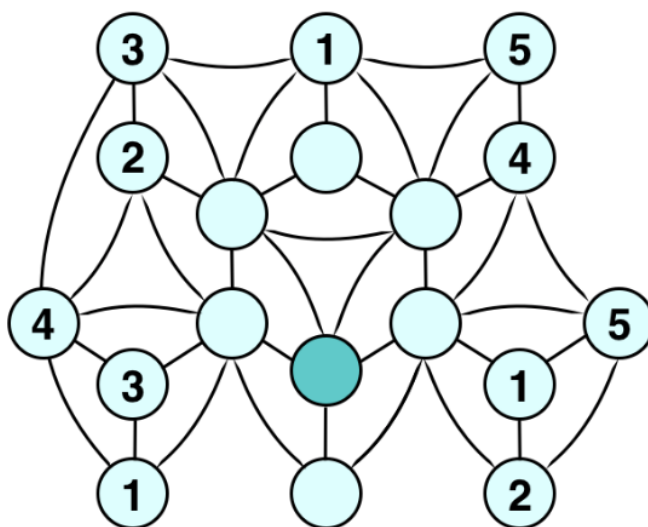


наконец, мы видим, что и закрашенный темным кружок, о котором нас спрашивали в задаче, оказался в аналогичном положении. В нем оказывается единица.

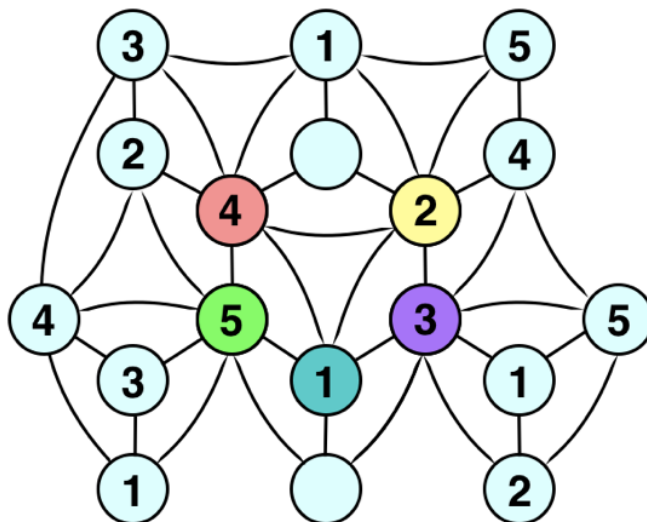
Ответ: 1

Вариант 3 задания №2

В кружки на рисунке требуется вписать числа 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы в кружках, соединённых линией, оказались разные числа (иными словами, не должно быть двух кружков, соединённых линией, в которых написаны одинаковые числа). Некоторые кружки уже заполнены. Остальные – пока нет. Заполните их (у себя в тетради или в уме). Какое число будет в кружочке, закрашенном более тёмным цветом? (Обратите внимание, что все кружочки на картинке должны быть заполнены числами (каждый – одним из чисел 1, 2, 3, 4, 5). А в поле для ответа нужно вписать только то число, которое должно быть в более тёмном кружочке. Если есть несколько подходящих чисел, впишите в ответ самое большое из них.)



Решение:



Рассмотрим фиолетовый кружок: из него ведут линии в кружки с числами 1, 2, 5 и 4. Значит в нем стоит тройка. Рассуждая совершенно аналогично, видим, что в зеленом кружке стоит пятерка. Теперь, в аналогичной ситуации оказываются уже красный и желтый кружки – они соединены линиями с кружками, в которых стоят четыре разных числа. Значит, и в них однозначно определяется стоящее число. Теперь наконец, мы видим, что и закрашенный темным кружок, о котором нас спрашивали в задаче, оказался в аналогичном положении. В нем оказывается единица.

Ответ: 1



Задание №3. Котенок Гав составляет числа

Вариант 1 задания №3

Из карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 котёнок Гав составляет три двузначных числа. Председатель Общества симпатичных котят выбирает самое большое из чисел, составленных котёнком Гав, после чего котёнок должен заплатить членский взнос, равный этому числу. Подумайте, как котёнку Гав составить числа так, чтобы заплатить как можно меньше. Укажите в ответе, сколько, самое меньшее, котёнку придётся заплатить



Какое самое маленькое значение может принимать самое большое из чисел, составленных котёнком Гав?

Решение:

Заметим, что в самом большом числе из трех, составленных котенком, цифра десятков должна самой большой (цифры не могут повторяться). Значит, цифра десятков у наибольшего из трех чисел всегда не меньше 3.



Поэтому самое большое число всегда не меньше, чем 34. (Так как меньшие цифры должны быть цифрами в разряде десятков у двух других чисел).

Осталось просто привести пример, когда наибольшее из трех чисел будет таким, как нам нужно. Это (34, 25, 16).

Ответ: 34

Вариант 2 задания №3

Из карточек с цифрами 2, 3, 4, 5, 6, 7 котенок Гав составляет три двузначных числа. Председатель Общества симпатичных котят выбирает самое большое из чисел, составленных котёнком Гав, после чего котёнок должен заплатить членский взнос, равный этому числу. Подумайте, как котёнку Гав составить числа так, чтобы заплатить как можно меньше. Укажите в ответе, сколько, самое меньшее, котёнку придётся заплатить.



Какое самое маленькое значение может принимать самое большое из чисел, составленных котёнком Гав?



Решение:

Заметим, что в самом большом числе из трех, составленных котенком, цифра десятков должна самой большой (цифры не могут повторяться). Значит, цифра десятков у наибольшего из трех чисел всегда не меньше 4.

Поэтому самое большое число всегда не меньше, чем 45. (Так как меньшие цифры должны быть цифрами в разряде десятков у двух других чисел).

Осталось просто привести пример, когда наибольшее из трех чисел будет таким, как нам нужно. Это 45, 36, 27.

Ответ: 45

Вариант 3 задания №3

Из карточек с цифрами 3, 4, 5, 6, 7, 8 котенок Гав составляет три двузначных числа. Председатель Общества симпатичных котят выбирает самое большое из чисел, составленных котёнком Гав, после чего котёнок должен заплатить членский взнос, равный этому числу. Подумайте, как котёнку Гав составить числа так, чтобы заплатить как можно меньше. Укажите в ответе, сколько, самое меньшее, котёнку придётся заплатить.





Какое самое маленькое значение может принимать самое большое из чисел, составленных котёнком Гав?

Решение:

Заметим, что в самом большом числе из трех, составленных котенком, цифра десятков должна самой большой (цифры не могут повторяться). Значит, цифра десятков у наибольшего из трех чисел всегда не меньше 5.

Поэтому самое большое число всегда не меньше, чем 56. (Так как меньшие цифры должны быть цифрами в разряде десятков у двух других чисел).

Осталось просто привести пример, когда наибольшее из трех чисел будет таким, как нам нужно. Это 56, 47, 38.

Ответ: 56



Задание №4. Шахматный турнир

Вариант 1 задания №4

На шахматном турнире Остап Бендер должен сыграть 15 партий. В какой-то момент во время турнира Остап отметил, что на данный момент он выиграл ровно треть сыгранных партий, а проиграл ровно четверть сыгранных партий (остальные уже сыгранные партии закончились вничью). Сколько еще партий осталось сыграть Остапу?

Решение:

То, что от сыгранных Остапом партий можно найти треть и четверть, означает, что число сыгранных партий делится на 3 и на 4. Значит, оно делится на 12, а так как оно меньше 15, то количество сыгранных партий равно 12. Поэтому Остапу осталось сыграть 3 партии.

Ответ: 3 партии

Вариант 2 задания №4

На шахматном турнире Остап Бендер должен сыграть 16 партий. В какой-то момент во время турнира Остапу отметил, что на данный момент он выиграл ровно треть сыгранных партий, а проиграл ровно пятую часть сыгранных партий (остальные уже сыгранные партии закончились вничью). Сколько еще партий осталось сыграть Остапу?

Решение:

То, что от сыгранных Остапом партий можно найти треть и пятую часть, означает, что число сыгранных партий делится на 3 и на 5. Значит, оно делится на 15, а так как оно меньше 16, то количество сыгранных партий равно 15. Поэтому Остапу осталось сыграть 1 партию.

Ответ: 1 партию



Вариант 3 задания №4

На шахматном турнире Остап Бендер должен сыграть 17 партий. В какой-то момент во время турнира Остап отметил, что на данный момент он выиграл ровно четверть сыгранных партий, а проиграл ровно треть сыгранных партий (остальные уже сыгранные партии закончились вничью). Сколько еще партий осталось сыграть Остапу?

Решение:

То, что от сыгранных Остапом партий можно найти треть и четверть, означает, что число сыгранных партий делится на 3 и на 4. Значит, оно делится на 12, а так как оно меньше 17, то количество сыгранных партий равно 12. Поэтому Остапу осталось сыграть 5 партий.

Ответ: 5 партий



Задание №5. Поросята бегают по кругу

Вариант 1 задания №5

Три поросёнка Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф соревновались в беге по круговой дорожке. Они стартовали одновременно из одной точки в одном направлении и бежали до тех пор, пока снова не оказались в одной точке (неизвестно, была ли это точка старта или нет). Все три поросёнка бежали с постоянными скоростями, причём Ниф-Ниф бежал быстрее Нуф-Нуфа, но медленнее Наф-Нафа. За время бега Наф-Наф обогнал Нуф-Нуфа ровно 10 раз. Сколько всего было обгонов на этом соревновании?

Решение:

Поскольку Наф-Наф (самый быстрый) обогнал Нуф-Нуфа (самого медленного) ровно 10 раз, то он пробежал ровно на 11 кругов больше.

Пусть Ниф-Ниф пробежал на N кругов больше Нуф-Нуфа (и, соответственно, на $11 - N$ кругов меньше Наф-Нафа). Тогда Ниф-Ниф обогнал Нуф-Нуфа $(11 - N) - 1 = 10 - N$ раз, а Наф-Наф обогнал Ниф-Нифа $N - 1$ раз. Это дополнительно $(10 - N) + (N - 1) = 9$ обгонов к тем 10.

Итого: $10 + 9 = 19$ обгонов.

Ответ: 19 обгонов

Вариант 2 задания №5

Три поросёнка Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф соревновались в беге по круговой дорожке. Они стартовали одновременно из одной точки в одном направлении и бежали до тех пор, пока снова не оказались в одной точке (неизвестно, была ли это точка старта или нет). Все три поросёнка бежали с постоянными скоростями, причём Ниф-Ниф бежал быстрее Нуф-Нуфа, но медленнее Наф-Нафа. За время бега Наф-Наф обогнал Нуф-Нуфа ровно 15 раз. Сколько всего было обгонов на этом соревновании?

Решение:

Поскольку Наф-Наф (самый быстрый) обогнал Нуф-Нуфа (самого медленного) ровно 15 раз, то он пробежал ровно на 16 кругов больше.



Пусть Ниф-Ниф пробежал на N кругов больше Нуф-Нуфа (и, соответственно, на $16 - N$ кругов меньше Наф-Нафа). Тогда Ниф-Ниф обогнал Нуф-Нуфа $(16 - N) - 1 = 15 - N$ раз, а Наф-Наф обогнал Ниф-Нифа $N - 1$ раз. Это дополнительно $(15 - N) + (N - 1) = 14$ обгонов к тем 15.

Итого: $15 + 14 = 29$ обгонов.

Ответ: 29 обгонов

Вариант 3 задания №5

Три поросёнка Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф соревновались в беге по круговой дорожке. Они стартовали одновременно из одной точки в одном направлении и бежали до тех пор, пока снова не оказались в одной точке (неизвестно, была ли это точка старта или нет). Все три поросёнка бежали с постоянными скоростями, причём Ниф-Ниф бежал быстрее Нуф-Нуфа, но медленнее Наф-Нафа. За время бега Наф-Наф обогнал Нуф-Нуфа ровно 20 раз. Сколько всего было обгонов на этом соревновании?

Решение:

Поскольку Наф-Наф (самый быстрый) обогнал Нуф-Нуфа (самого медленного) ровно 20 раз, то он пробежал ровно на 21 круг больше.

Пусть Ниф-Ниф пробежал на N кругов больше Нуф-Нуфа (и, соответственно, на $21 - N$ кругов меньше Наф-Нафа). Тогда Ниф-Ниф обогнал Нуф-Нуфа $(21 - N) - 1 = 20 - N$ раз, а Наф-Наф обогнал Ниф-Нифа $N - 1$ раз. Это дополнительно $(20 - N) + (N - 1) = 19$ обгонов к тем 20.

Итого: $20 + 19 = 39$ обгонов.

Ответ: 39 обгонов



Задание №6. Ох уж этот лимонад

Вариант 1 задания №6

В лавке можно купить 20 видов лимонада. Шрек купил 20 бутылок: по одной каждого вида. Придя домой, он попробовал весь купленный лимонад и понял, что на бутылках перепутаны этикетки. У него есть ровно одна пустая бутылка. За одно действие он может перелить весь лимонад из полной бутылки в пустую (после этого бутылка, которая была полной, становится пустой). Шрек хочет за наименьшее число действий (переливаний) добиться, чтобы на всех бутылках этикетки соответствовали содержимому. А какого количества действий (переливаний) заведомо хватит, какие бы виды лимонада в каких бутылках ни оказались изначально? Укажите в ответе наименьшее такое число действий (переливаний). (Переклеивать этикетки запрещено, а также нельзя что-либо на них писать.)

Решение:

Назовем пустую бутылку Шрека «рабочей». Шрек будет действовать так: выберет любую бутылку и перельет ее содержимое в рабочую. Затем в образовавшуюся пустую бутылку он перельет правильный лимонад. В новую пустую снова правильный и так далее. В определенный момент ему придется перелить лимонад из рабочей бутылки. В этот момент X бутылок станут «правильными» и будет сделана $X + 1$ операциями. При этом, как видим, X не меньше 2.

Далее, Шрек просто продолжит эту процедуру, выбрав стартовой любую еще «неправильную» бутылку. Таким образом рано или поздно все 20 бутылок станут заполнены верным лимонадом. При этом было сделано 20 операций (в каждую бутылку однажды налили верный лимонад) и еще не более 10 дополнительных операций (переливания в рабочую бутылки из неправильной). Значит, за 30 операций у Шрека всегда получится сделать все бутылки правильными.



Меньше чем 30-ю операциями у него может не получиться обойтись – если лимонад в бутылках перепутан попарно (то есть есть 10 пар бутылок с перепутанным лимонадом между ними), то на каждую из таких пар понадобится дополнительная операция переливания в рабочую бутылку.

Ответ: 30 переливаний

Вариант 2 задания №6

В лавке можно купить 30 видов лимонада. Шрек купил 30 бутылок: по одной каждого вида. Придя домой, он попробовал весь купленный лимонад и понял, что на бутылках перепутаны этикетки. У него есть ровно одна пустая бутылка. За одно действие он может перелить весь лимонад из полной бутылки в пустую (после этого бутылка, которая была полной, становится пустой). Шрек хочет за наименьшее число действий (переливаний) добиться, чтобы на всех бутылках этикетки соответствовали содержанию. А какого количества действий (переливаний) заведомо хватит, какие бы виды лимонада в каких бутылках ни оказались изначально? Укажите в ответе наименьшее такое число действий (переливаний). (Переклеивать этикетки запрещено, а также нельзя что-либо на них писать.)

Решение:

Назовем пустую бутылку Шрека «рабочей». Шрек будет действовать так: выберет любую бутылку и перельет ее содержимое в рабочую. Затем в образовавшуюся пустую бутылку он перельет правильный лимонад. В новую пустую снова правильный и так далее. В определенный момент ему придется перелить лимонад из рабочей бутылки. В этот момент X бутылок станут «правильными» и будет сделана $X + 1$ операциями. При этом, как видим, X не меньше 2.

Далее, Шрек просто продолжит эту процедуру, выбрав стартовой любую еще «неправильную» бутылку. Таким образом рано или поздно все 30 бутылок станут заполнены верным лимонадом. При этом было сделано 30 операций (в каждую бутылку однажды налили верный лимонад) и еще не более 15 дополнительных операций (переливания в рабочую бутылки из неправильной). Значит, за 45 операций у Шрека всегда получится сделать все бутылки правильными.



Меньше чем 45-ю операциями у него может не получиться обойтись – если лимонад в бутылках перепутан попарно (то есть есть 15 пар бутылок с перепутанным лимонадом между ними), то на каждую из таких пар понадобится дополнительная операция переливания в рабочую бутылку.

Ответ: 45 переливаний

Вариант 3 задания №6

В лавке можно купить 40 видов лимонада. Шрек купил 40 бутылок: по одной каждого вида. Придя домой, он попробовал весь купленный лимонад и понял, что на бутылках перепутаны этикетки. У него есть ровно одна пустая бутылка. За одно действие он может перелить весь лимонад из полной бутылки в пустую (после этого бутылка, которая была полной, становится пустой). Шрек хочет за наименьшее число действий (переливаний) добиться, чтобы на всех бутылках этикетки соответствовали содержанию. А какого количества действий (переливаний) заведомо хватит, какие бы виды лимонада в каких бутылках ни оказались изначально? Укажите в ответе наименьшее такое число действий (переливаний). (Переклеивать этикетки запрещено, а также нельзя что-либо на них писать.)

Решение:

Назовем пустую бутылку Шрека «рабочей». Шрек будет действовать так: выберет любую бутылку и перельет ее содержимое в рабочую. Затем в образовавшуюся пустую бутылку он перельет правильный лимонад. В новую пустую снова правильный и так далее. В определенный момент ему придется перелить лимонад из рабочей бутылки. В этот момент X бутылок станут «правильными» и будет сделана $X + 1$ операциями. При этом, как видим, X не меньше 2.

Далее, Шрек просто продолжит эту процедуру, выбрав стартовой любую еще «неправильную» бутылку. Таким образом рано или поздно все 40 бутылок станут заполнены верным лимонадом. При этом было сделано 40 операций (в каждую бутылку однажды налили верный лимонад) и еще не более 20 дополнительных операций (переливания в рабочую бутылки из неправильной). Значит, за 60 операций у Шрека всегда получится сделать все бутылки правильными.



Меньше чем 60-ю операциями у него может не получиться обойтись – если лимонад в бутылках перепутан попарно (то есть есть 20 пар бутылок с перепутанным лимонадом между ними), то на каждую из таких пар понадобится дополнительная операция переливания в рабочую бутылку.

Ответ: 60 переливаний

