Муниципальный этап областной олимпиады школьников
по математике
2020–2021 учебный год

Решения задач. Критерии оценивания

9 класс

1. Парабола $y = x^2 - 20x + c$, где $c \neq 0$, пересекает ось Ox в точках A и B, а ось Oy в точке C. Известно, что точки A и C симметричны относительно прямой $y = -x$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 231.

Решение. Поскольку $y(0) = c$, имеем $C(0, c)$ и $A(-c, 0)$. Поэтому один из корней уравнения $x^2 - 20x + c = 0$ равен $-c$, т. е. $c^2 + 20c + c = 0$, откуда $c = -21$, $x_1 = 21$. По теореме Виета, $x_1 + x_2 = 20$. Значит, $x_2 = -1$. Длина основания треугольника равна $x_1 - x_2 = 22$, а высота 21.

Оценивание. За верное решение 7 б.

2. Найдите все пары натуральных чисел n и m, для которых

$$(n + 1)(2n + 1) = 18m^2.$$

Ответ: их нет.

Решение. Поскольку $18m^2 = (n + 1)(2n + 1) > 2n^2$, $9m^2 > n^2$ и $n < 3m$. С другой стороны, если $n \leqslant 3m - 1$, то

$$(n + 1)(2n + 1) \leqslant 3m(6m - 1) < 18m^2.$$

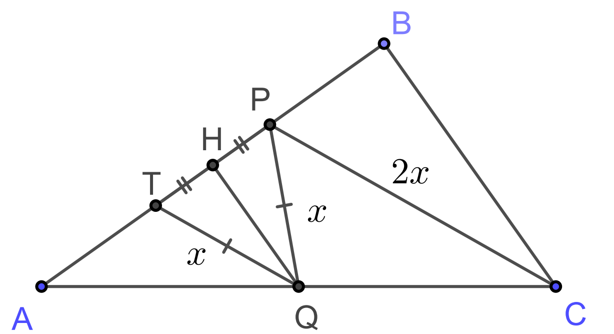
Значит, $n > 3m - 1$. Получилось, что $3m - 1 < n < 3m$. Это невозможно.

Замечание. Возможны и другие решения. Например, если рассмотреть уравнение как квадратное относительно n, то получим дискриминант $144m^2 + 1$, не являющийся квадратом при натуральном m. Ещё одно решение начинается с наблюдения о том, что $n + 1$ и $2n + 1$ — взаимно простые числа.

Оценивание. За верное решение 7 б.

3. ABC — треугольник. Точка Q — середина стороны AC, а на отрезке AB отмечена точка P, при этом $AP = 2PB$. Оказалось, что $CP = 2PQ$. Докажите, что угол ABC прямой.

Доказательство. Пусть T — середина отрезка AP. Тогда TQ — средняя линия трегольника APC, откуда $TQ = \frac{PC}{2} = PQ$. Поэтому треугольник PQT равнобедренный.



Его медиана QH перпендикулярна AB. Поскольку $AT = PB$, точка H будет серединой не только отрезка TP, но и отрезка AB. Значит, QH — средняя линия треугольника ABC и $QH \parallel CB$. Тогда и $CB \perp AB$.

Оценивание. За верное решение 7 б.

4. Пусть a, b, c — стороны треугольника, $p+q=1$. Докажите, что

$$pa^2 + qb^2 > pqc^2.$$

Доказательство. Перепишем неравенство в виде

$$pa^2 + (1-p)b^2 > p(1-p)c^2,$$

или

$$c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2 > 0.$$

Слева — квадратный трёхчлен относительно p. Старший коэффициент положительный. Докажем, что дискриминант отрицательный (отсюда будет следовать, что график квадратного трёхчлена лежит выше оси абсцисс, т. е. неравенство выполняется для всех p).

$$D = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) =$$

$$= (a^2 - (b+c)^2)(a^2 - (b-c)^2) =$$

$$= (a - (b+c))(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c).$$

По неравенству треугольника, первая скобка отрицательна, а последние две положительны. Таким образом, дискриминант отрицателен.

Оценивание. За верное решение 7 б. Если задача сведена к исследованию квадратного трёхчлена, но дискриминант не удалось разложить на множители, 2 балла.

4. Пусть a, b, c — стороны треугольника, $p+q=1$. Докажите, что

$$pa^2 + qb^2 > pqc.$$

Решение. Покажем, что неравенство в общем случае не обязано выполняться. Пусть

$$a = b = c = \frac{1}{10}, \quad p = q = \frac{1}{2}.$$

Тогда в левой части получится $\frac{1}{100}$, а в правой $\frac{1}{40}$.

Оценивание. За верный контрпример 7 б.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, $a_1+a_2+\ldots+a_n = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{6a_1+1} + \sqrt{6a_2+1} + \ldots + \sqrt{6a_n+1} < n+3.$$

1-й способ. Просуммируем неравенства $\sqrt{6a_i+1} < 3a_i + 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

2-й способ. Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2},$$

положив $x_i = \sqrt{6a_i+1}$ и $y_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Получим

$$\sqrt{6a_1+1} + \sqrt{6a_2+1} + \ldots + \sqrt{6a_n+1} \leqslant \sqrt{6+n} \cdot \sqrt{n} < n+3.$$

Оценивание. За верное решение 7 б. Если проведено доказательство только при $n = 2$, 2 б.