Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс

Задача 1. Маша старше своего брата на столько, сколько лет было её брату два года назад. А тринадцать лет назад им с братом вместе было столько лет, сколько сейчас её брату одному. Сколько лет Маше?

Ответ: 26 лет.

Решение. Пусть брату Маши n лет. Тогда Маша старше его на $n-2$ года, значит, ей $2n-2$ года. Тринадцать лет назад брату Маши было $n-13$ лет, а самой Маше было $2n-15$ лет. Тогда

$$(n-13)+(2n-15)=n;$$

$$3n-28=n;$$

$$2n=28;$$

$$n=14.$$

Тогда Маше $2n-2=26$ лет. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

2 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. Существует ли 19–значное число, у которого сумма цифр равна произведению цифр?

Ответ: да, существует.

Решение. Примером такого числа является число, состоящее из одной тройки, трёх двоек и пятнадцати единиц. Сумма его цифр равна

$$1\cdot 3+3\cdot 2+15\cdot 1=3+6+15=24.$$

Произведение его цифр есть

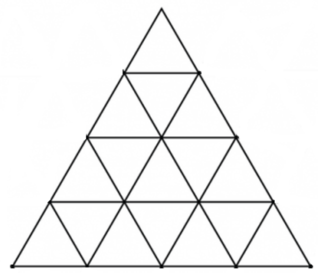
$$3\cdot 2^3\cdot 1^{15}=3\cdot 8=24.$$ □

Критерии

7 б. Приведён любой, удовлетворяющий условию задачи, пример.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. Правильный треугольник со стороной длины 4 разбит параллельными сторонам линиями на 16 маленьких треугольников со стороной длины 1, как показано на рисунке:



За ход разрешается стереть любую одну сторону у любого из маленьких треугольников. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы у каждого маленького треугольника была стёрта по меньшей мере одна сторона?

Ответ: за 10 ходов.

Решение. Легко видеть, что есть два вида маленьких треугольников: 10 треугольников, направленных «острием вверх» и 6 треугольников, направленных «острием вниз». У каждого треугольника первого вида должна быть стёрта по крайней мере одна из сторон, причём общих сторон у них нет. Значит, нужно стереть не менее 10 сторон.

Заметим, что если у каждого треугольника первого вида стереть нижнюю сторону, то у каждого треугольника второго вида окажется стёрта верхняя сторона. Т.е. цель можно достигнуть ровно за 10 ходов. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

5 б. Доказано, что необходимо стереть хотя бы 10 сторон, но не приведен пример, как это можно сделать.

2 б. Приведён пример, как можно стереть 10 сторон, чтобы выполнялось условие задачи, но отсутствует обоснование, что меньшим числом «стираний» обойтись не удастся.

1 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. На доске записаны числа $1, 2, \ldots, n$. Затем одно из чисел стёрли, после чего оказалось, что сумма всех оставшихся чисел равна 100. Какое число стёрли?

Ответ: 5.

Решение. Предположим, $n \leqslant 13$. Тогда сумма первых n натуральных чисел не превосходит

$$13 + 12 + \ldots + 1 = (13 + 1) + (12 + 2) + \ldots + (8 + 6) + 7 = 6 \cdot 14 + 7 = 91 < 100.$$

Предположим, $n \geqslant 15$. Тогда даже после удаления одного из чисел сумма оставшихся не может оказаться меньше, чем сумма первых 14 натуральных чисел

$$14 + 13 + \ldots + 1 = (14 + 1) + (13 + 2) + \ldots + (8 + 7) = 7 \cdot 15 = 105 > 100.$$

Значит, $n = 14$. До удаления одного из чисел сумма всех была равна 105, значит, стёрли число 5. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Доказано, что $n < 15$.

3 б. Доказано, что $n > 13$.

1 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. Точка M является серединой стороны CD квадрата $ABCD$. Из вершины B опустили перпендикуляр BH на прямую AM. Докажите, что прямая AM параллельна биссектрисе угла BCH.

Решение. Обозначим биссектрису угла BCH через CL, а угол CBM через α (рис. 1). Легко видеть, что треугольники CBM и DAM равны, поэтому $\angle DAM = \alpha$. Пусть N — середина стороны AB. Тогда $\angle BMN = \angle MBC = \alpha$ и $\angle AMN = \angle MAD = \alpha$, откуда $\angle BMA = 2\alpha$.

Заметим, что противоположные углы H и C четырёхугольника $BHMC$ прямые, поэтому этот четырёхугольник вписанный. Поэтому $\angle CHM = \angle CBM = \alpha$ и $\angle BCH = \angle BMH = 2\alpha$.

Тогда $\angle LCH = \alpha = \angle CHM$, откуда $CL \parallel HM$, что и требовалось доказать. □

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

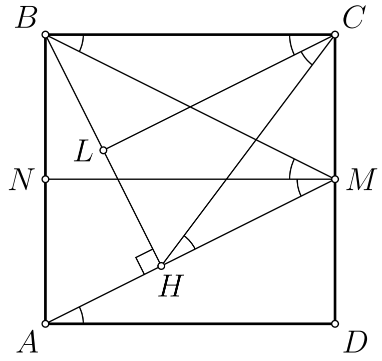


Рис. 1: к решению задачи 5

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

3 б. Доказано, что $\angle BCH = \angle BMH$, но дальнейших продвижений нет.

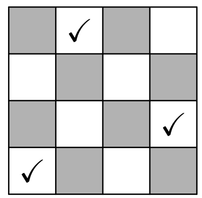
2 б. Доказана вписанность четырёхугольника $BCMH$, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 6. В каждой клетке доски 4×4 сидит жук. Некто хлопнул в ладоши, и каждый жук в панике перебежал в одну из соседних по стороне клеток доски. Какое наибольшее число пустых клеток могло при этом получиться?

Ответ: 10.

Решение. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Заметим, что жуки с чёрных клеток перебегают на белые, а жуки с белых клеток — на чёрные. Выделим следующие три клетки доски:



Заметим, что выделенные жуки окажутся на чёрных клетках, причем никакие два выделенных жука не могут попасть на одну и ту же чёрную клетку. Значит, по меньшей мере три чёрные клетки окажутся заняты. По аналогичным соображениям по меньшей мере три белых клетки окажутся заняты. Значит, свободно будет не более 10 клеток.

Теперь покажем, как добиться того, чтобы десять клеток доски остались свободными. Для этого выделим следующие шесть клеток доски:

×	×	×	×
	×	×	

Рядом с каждой клеткой доски есть по меньшей мере одна выделенная, поэтому каждый жук может перебежать в одну из выделенных клеток. После этого все жуки окажутся на выделенных клетках, а остальные 10 клеток останутся свободны. $\square$

Критерии

7 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

5 б. Доказано, что свободно будет не более 10 клеток.

2 б. Приведён пример, как добиться того, чтобы десять клеток доски остались свободными.

0 б. Задача не решена или решена неверно.