

Муниципальный этап областной олимпиады школьников
по математике

2020-2021 учебный год

6 класс. Решения и оценивание.

1. Можно ли разложить 2020 конфет на 65 кучек так, чтобы ни в каких двух кучках не было поровну конфет?

Ответ: нельзя.

Решение. В самой маленькой кучке – не менее одной конфеты. В следующей по величине – не менее двух, и т.д., в 65-й – не менее 65. Но сумма $1+2+\dots+65 > 2020$, противоречие.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. Если решатель допускает кучки нулевого объема – оценку не снижать.

2. Интересным будем называть натуральное число, которое делится на 3, но не делится ни на 5, ни на 7. Сколько интересных чисел среди натуральных чисел, не превосходящих 2020?

Ответ: 462.

Решение. Из первых 2020 натуральных на 3 делятся $2020:3=673$ числа. Из этих чисел, на 5 делятся $673:5=134$ числа, на 7 делятся $673:7=96$ чисел, и на 35 делятся $96:5=19$ чисел. Поэтому интересных чисел $673-134-96+19=462$ числа.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов.

3. В тереме сидят 15 принцесс, из которых 5 вредных, а 10 – добрых (внешне добрые и вредные - неразличимы). Стукнув принцессу волшебной палочкой, фея меняет характер принцессы на противоположный. Сможет ли фея, постучав по некоторым принцессам, разделить их затем на две группы так, чтобы вредных принцесс в этих группах было поровну?

Ответ: сможет.

Решение. Фея может действовать, например, так: стукнуть любых пятерых, и отправить их в одну группу, а остальных в другую. Проверим, что в этих группах вредных будет поровну. Если среди стукнутых было x вредных, то станет $5-x$ вредных – ровно столько вредных было и в нестукнутой группе....

Оценивание. Полное решение – 7 баллов.

4. Килограмм говядины стоит 390 рублей, килограмм говядины без костей стоит 450 рублей, а килограмм костей стоит 75 рублей. Сколько грамм костей в килограмме говядины?

Ответ: 160 грамм.

Решение. Пусть x (кг) – количество костей в килограмме говядины. Тогда $390=75x+450(1-x)$, так что $375x=60$, $x=0,16$

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. Допустимы и прямые – без уравнений – решения.

5. Можно ли доску размера 8×8 покрыть доминошками размера 1×2 так, чтобы 17 из них располагались «горизонтально», а 15 – «вертикально»?

Ответ: нет.

Решение. Рассмотрим «матрасную» раскраску доски (чередующиеся черные и белые полосы). Черных и белых клеток будет поровну – по 32 штуки. Но каждая «вертикальная» доминошка покрывает ровно одну черную клетку, а каждая «горизонтальная» – четное количество черных клеток. Значит, доминошки накроют нечетное количество черных клеток, что противоречит четности числа 32.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. Решения, основанные на переборе вариантов размещения доминошек – при наличии пробелов в переборе (а они заведомо будут; их, конечно, надо найти) – не засчитывать.