Муниципальный этап областной олимпиады школьников
по математике
2020–2021 учебный год

Решения задач. Критерии оценивания

5 класс

1. Три мальчика заглянули в коробку, где лежат шарики двух разных цветов. Петя сказал: «Там есть красные и зеленые шарики». Влад сказал: «Там есть синие шарики». Тимур сказал: «Там есть красные и синие шарики». Оказалось, что каждый из них верно назвал ровно один цвет. Шарики каких цветов лежат в коробке? Ответ объясните.

Ответ: в коробке лежат синие и зелёные шарики.

Решение. Начнём с Влада. Он назвал всего один цвет. Значит, это цвет (синий) присутствует. Этот цвет назвал и Тимур, но он указал ещё красный цвет. Поэтому красного цвета нет. Теперь из высказывания Пети получаем, что должен быть зелёный цвет.

Оценивание. За верное решение 7 б.

2. Расстояние между городами A и B 360 км. Из A выехал поезд со скоростью 40 км/ч. Через 30 мин навстречу ему из города B со скоростью 50 км/ч выехал другой поезд. На каком расстоянии друг от друга они будут за час до встречи?

Ответ: 90 км.

Решение. Поезда сближаются со скоростью 90 км/ч. Поэтому за последний час они вместе проедут 90 км. Такое расстояние и будет между ними за час до встречи.

Оценивание. За верное решение 7 б.

3. Барон Мюнхаузен утверждает: если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27. Прав ли он?

Ответ: не прав.

Решение. Самый маленький контрпример: 1899.

Оценивание. За любой верный контрпример 7 б.

4. Имеется 11 камней и специальные весы, с помощью которых за одно взвешивание можно узнать суммарный вес любых двух камней. Можно ли за 7 взвешиваний узнать общий вес 11 камней?

Ответ: можно.

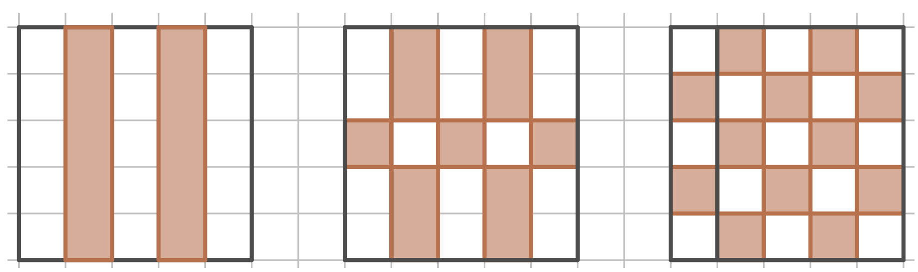
Решение. Сначала возьмём три камня. Если их веса a, b и c, то за три взвешивания мы узнаем $a+b$, $b+c$ и $c+a$. Разделив на два сумму этих трёх чисел, мы найдём суммарный вес данных трёх камней. Оставшиеся восемь камней разобьём на 4 пары и за 4 взвешивания найдём их общий вес.

Оценивание. За верное решение 7 б.

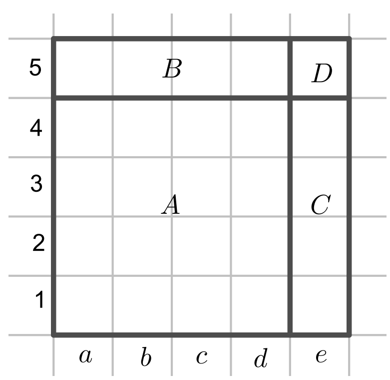
5. Имеется белый квадрат, разбитый на 25 одинаковых квадратов. Петя покрасил какие-то n клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 ровно две покрашенных клетки. Найдите все значения, которые может принимать n.

Ответ: 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Решение. На рис. приведены примеры для $n = 10, 11, 12$. Инвертирование раскраски даёт примеры для $n = 15, 14, 13$.



Докажем, что $n \geqslant 10$. Будем называть, покрашенные клетки чёрными. Разобьём весь квадрат на 4 части, как показано на рис.



В области A ровно 8 чёрных клеток. Из клеток $d5$, $e4$, $e5$ одна или две чёрные. Если две, то $n \geqslant 10$. Рассмотрим случай, когда ровно одна.

Если это $e5$ и $n < 10$, то области B и C будут белыми, но тогда клетки $a4, b4, c4, d4$ должны быть чёрными, как и клетки $d1, d2, d3$. Получилось, что $c4, d4, d3$ — три чёрные клетки в квадрате 2×2.

Если это $e4$ и $n < 10$, то, по-прежнему, область B белая, и должны быть чёрными клетки $a4, b4, c4, d4$. Получилось, что 4-я строка вся чёрная. Это однозначно определяет раскраску остальных клеток — получится полосатая раскраска, в которой 10 чёрных клеток.

Аналогичное рассуждение, если $d5$ — чёрная клетка, а $e4$ и $e5$ белые. Всё доказано.

Мы доказали, что чёрных клеток не меньше 10. Тогда и белых клеток не меньше 10, откуда чёрных не больше 15.

Замечание. Возможно и решение, основанное на такой идее. Можно доказать, что либо во всех строках, либо во всех столбцах цвета клеток чередуются. Пусть, например, в строках. Тогда в каждой строке 2 или 3 покрашенные клетки.

Оценивание. За каждый пример по 0.5 б. За доказательство того, что $n \geqslant 10$, 2 б. За доказательство того, что $n \leqslant 15$, 2 б. Все баллы складываются. Если не доказано ни одно из двух неравенств, но отмечено, что они равносильны, за это 1 б.