Муниципальный этап областной олимпиады школьников по математике

2020-2021 учебный год

10 класс. Решения и оценивание.

1. Петя бежал вниз по эскалатору, считая ступеньки. Ровно на середине спуска он споткнулся, и оставшийся путь пролетел кубарем (летает Петя в 3 раза быстрее чем бегает). Сколько ступенек на эскалаторе, если ногами (т.е., до падения) Петя насчитал 20 ступенек, а боками (после падения) – 30 ступенек?

Ответ: 80.

Решение. Пусть эскалатор имеет длину 2L (ступенек), скорость движения эскалатора равна u, Петя бегает со скоростью x, и летает со скоростью 3x. Тогда время до падения равно $\frac{L}{u+x}$, и за это время Петя насчитает $\frac{Lx}{u+x}$ ступенек. Отсюда: $\frac{1}{20} = \frac{1}{L}(1 + \frac{u}{x})$. Аналогичное уравнение получается «после падения» : $\frac{1}{30} = \frac{1}{L}(1 + \frac{u}{3x})$. Умножая на 3, и вычитая первое, получим: $\frac{3}{30} - \frac{1}{20} = \frac{2}{L}$, так что L=40, и 2L=80.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов.

2. Можно ли число 2020 представить в виде суммы квадратов шести нечетных чисел?

Ответ: нет.

Решение. Квадрат нечетного числа 2n+1 равен $4n^2 + 4n + 1$. Число n(n+1) четно, поэтому квадрат нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1. Значит, сумма 6 квадратов нечетных чисел при делении на 8 имеет остаток, равный 6. Но для 2020 этот остаток равен 4, противоречие.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов.

3. Решить уравнение $(101x^2 - 18x + 1)^2 - 121x^2 \cdot (101x^2 - 18x + 1) + 2020x^4 = 0$

Ответ: $\frac{1}{9}, \frac{1}{18}$

Решение. Пусть $y = (101x^2 - 18x + 1)$, $z = \frac{y}{x^2}$. После деления уравнения на (ненулевое число: x=0 не подходит) x^4, получим z^2-121z+2020=0. Корни этого уравнения легко находим по теореме Виета: z=101 или z=20. В первом случае получается уравнение $-18x + 1 = 0$, во втором - $81x^2 - 18x + 1 = 0$, откуда и находим искомое.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и CL и медиана BM. Оказалось, что ML - биссектриса угла AMB, MK- биссектриса угла CMB. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 30^o,30^o, 120^o.

Решение. По свойству биссектрисы, AM:MB=AL:LB=AC:CB. Но AC=2AM, так что CB=2MB. Аналогично AB=2MB, и, значит, треугольник ABC – равнобедренный. Но тогда BM – высота, треугольник BMC – прямоугольный, и его катет BM в 2 раза меньше его гипотенузы BC. Значит, угол C равен 30^o (и равен углу A), и тогда угол B равен 120^o.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов.

5. Назовем прямоугольный треугольник элегантным, если у него один катет в 10 раз больше другого. Можно ли квадрат разрезать на 2020 одинаковых элегантных треугольников?

Ответ: можно.

Решение. Элегантный треугольник с катетами 10 и 100 можно разрезать на 100 треугольников с катетами 1 и 10 (прямыми, параллельными его сторонам). Из четырех таких больших треугольников составим квадрат (его сторонами будут гипотенузы этих треугольников) с дыркой (в виде квадрата со стороной 100-10=90). Этот квадрат можно разбить на прямоугольники со сторонами 1 и 10 (их будет 810 штук), а каждый такой прямоугольник разбивается на два треугольника с катетами 1 и 10. Всего получилось $4 \cdot 100+2 \cdot 810 =2020$ элегантных треугольников.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов.