Справочник для подготовки к ЕГЭ по математике

Анна Малкова

ЕГЭ
математика

Все формулы и темы ЕГЭ по математике

ЕГЭ-Студия
Готовьтесь с профессионалами

Таблица квадратов целых чисел от 0 до 99

единицы / десятки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Формулы сокращенного умножения

Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Квадрат суммы	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Куб суммы	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Числа, оканчивающиеся на ***5***, в квадрат возводятся мгновенно.
Чтобы найти квадрат числа ***A5*** (***A*** – не обязательно цифра, любое натуральное число), умножаем ***A*** на ***A+1*** и к результату приписываем ***25***.

ПРИМЕР $45^2 = 2025;\ 85^2 = 7225.$

Делимость чисел

Число а делится на число b≠0, если найдется такое число ***c***, что $a = bc$.

ПРИМЕР ***15*** делится на ***3***, а ***49*** делится на ***7***. Обозначение: $a \vdots b$

Если а делится на ***b***, то число ***b*** называется ***делителем*** числа ***a***.

- Если числа ***a и b*** делятся на ***c***, то $a + b$ тоже делится на c.
- Если числа ***a и b*** делятся на ***c***, а ***m и n*** – целые, то $ma + nb$ тоже делится на ***c***

Формула деления с остатком. Если $a = bc + r$, то число а делится на ***b*** с остатком ***r***.

ПРИМЕР при делении ***9*** на ***4*** мы получаем частное ***2*** и остаток ***1***, то есть $9 = 4 \cdot 2 + 1$.

Простые числа – те, что делятся только на себя и на единицу. Единица не является ни простым, ни составным числом. Простые числа: ***2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19***...

Любое натуральное число можно разложить на простые множители.

ПРИМЕР $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, а $98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$.

Основная теорема арифметики: Любое натуральное число можно представить в виде произведения простых делителей, взятых в натуральных степенях, причем это разложение единственно.

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}$$

ПРИМЕР $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

Количество делителей натурального числа равно $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_s+1)$.

Наименьшее общее кратное двух чисел (НОК) — это наименьшее число, ***которое делится*** на оба данных числа.

Наибольший общий делитель двух чисел (НОД) — это наибольшее число, ***на которое делятся*** два данных числа.

ПРИМЕР Найдем ***НОД*** и ***НОК*** для чисел ***72*** и ***150***.

$72 = 2^3 \cdot 3^2$,

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Оба эти числа делятся на ***2*** и на ***3***. Значит, они делятся на ***6***.

НОД $(72; 150) = 6$.

НОК чисел ***72*** и ***150*** должно делиться на 2^3, на 3^2 и на 5^2.

Оно равно $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1800$.

Признаки делимости

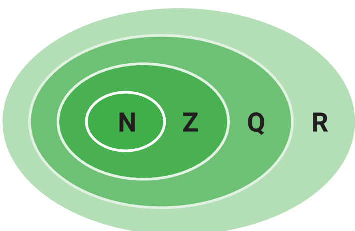
число ***a*** делится на ***2***	последняя цифра числа *а* четная.
на ***3***	сумма цифр числа *а* делится на ***3***
на ***4***	число, составленное из двух последних цифр числа ***a***, делится на ***4***.
на ***5***	число ***a*** заканчивается на ***0*** или на ***5***
на ***8***	число, составленное из трех последних цифр числа ***a***, делится на ***8***.
на ***9***	сумма цифр числа *а* делится на ***9***
на ***10***	последняя цифра числа *а* равна ***0***
на ***11***	суммы цифр на четных и нечетных позициях числа ***a*** равны или их разность кратна ***11***.

Натуральные числа — это числа ***1,2,3,*** ... – те, что мы используем для счёта предметов. Ноль не является натуральным числом.

Множество натуральных чисел обозначается ***N***.

Целые числа — это ***0, ±1, ±2, ±3*** ...
Множество целых чисел обозначается ***Z***.

Рациональные — числа, которые можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$, где ***p*** — целое, а ***q*** — натуральное. Например, $3; \frac{1}{2}; \frac{7}{15}; 0{,}12$. Рациональные числа — это периодические десятичные дроби. Множество рациональных чисел обозначается ***Q***.



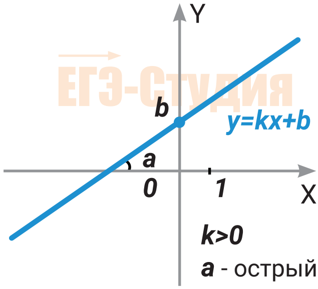
Иррациональные числа – те, которые нельзя записать в виде $\frac{p}{q}$ или в виде периодической десятичной дроби. Числа π и ***e***, $\sqrt{2}$, $\log_3 5$ – иррациональные.

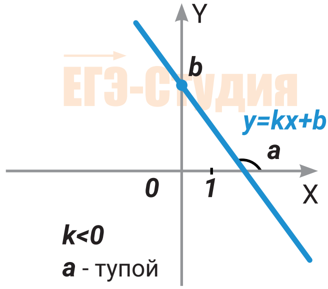
Множества рациональных и иррациональных чисел вместе образуют множество действительных чисел ***R***.

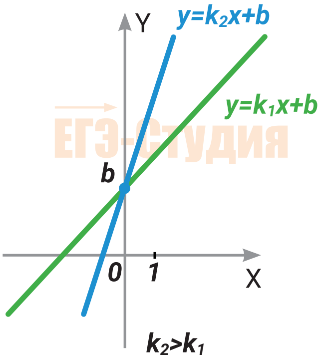
Линейная функция

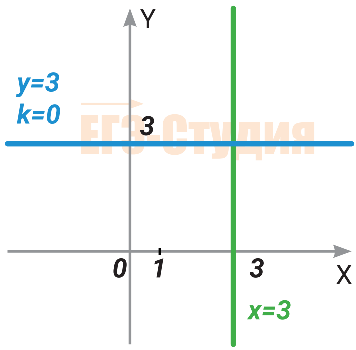
Линейная функция – функция вида $y = kx+b$. График линейной функции – прямая.

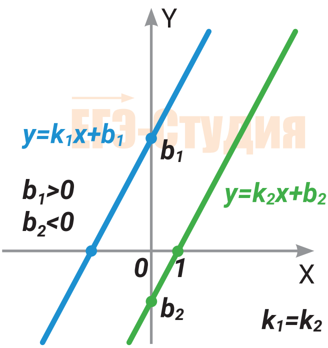
k – угловой коэффициент прямой, $k = tg\alpha$.

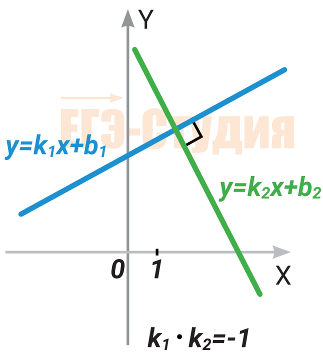












Если $k_1 = k_2$, прямые параллельны.

Если $k_1 k_2 = -1$, прямые перпендикулярны.

Квадратное уравнение

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Дискриминант квадратного уравнения: $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, квадратное уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.
Если $D = 0$, квадратное уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{b}{2a}$.
Если $D < 0$, квадратное уравнение не имеет действительных корней.

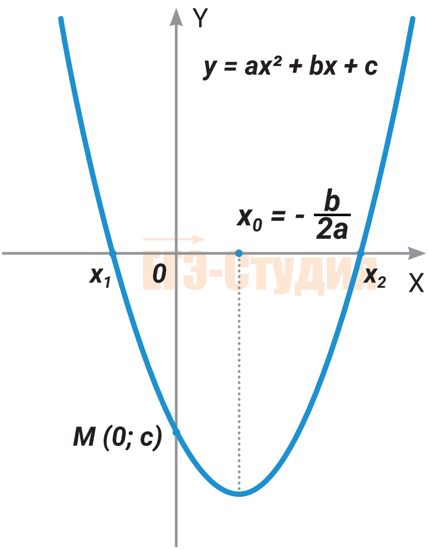
Теорема Виета

Если x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Здесь x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$.



Координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.

Если $a>0$, ветви вверх
Если $a<0$, ветви вниз

Точки пересечения с осью X: x_1 и x_2,
где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

Точка пересечения с осью Y: $M(0; c)$.

Квадратный корень

Арифметический квадратный корень из числа ***a*** – это такое неотрицательное число, квадрат которого равен ***a***.

$(\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{a} \geq 0$, при этом $a \geq 0$

Модуль числа, или абсолютная величина числа

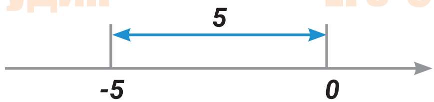
$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Модуль числа всегда неотрицателен: $|x| \geq 0$.

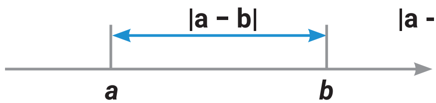
ПРИМЕР $|7| = 7$; $|-1{,}28| = 1{,}28$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.

Модуль числа — это расстояние от нуля до данного числа.

ПРИМЕР $|-5| = 5$. Расстояние от точки -5 до нуля равно 5.



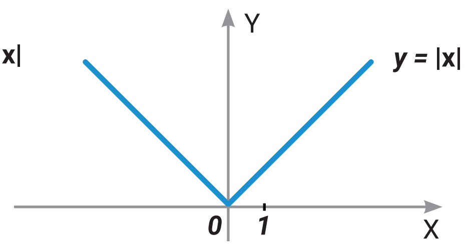
Для чисел ***a и b*** значение выражения $|a-b|$ равно расстоянию между ***a*** и ***b*** на числовой прямой.



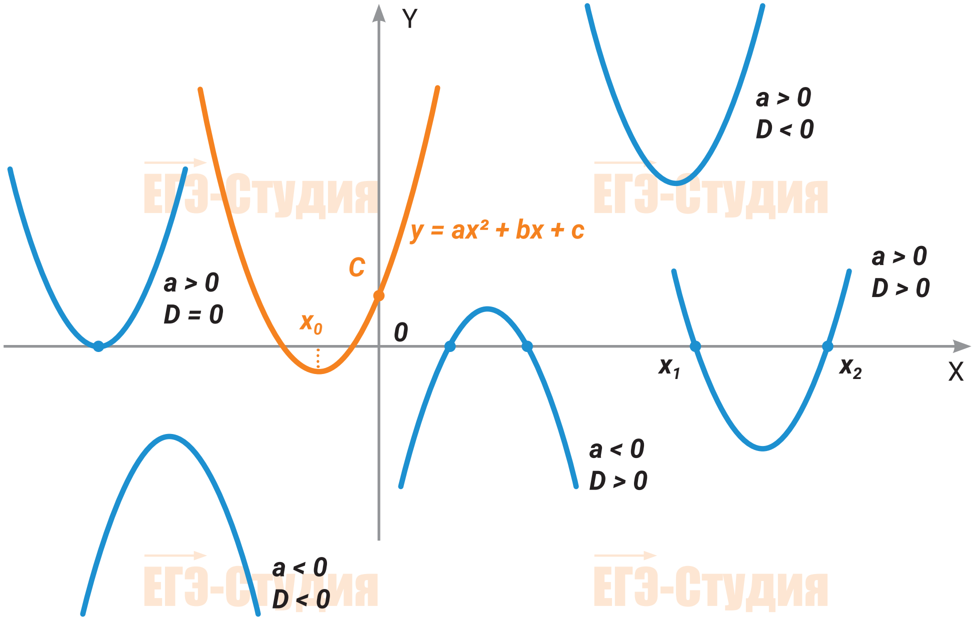
$|a - b| = |b - a|$

$\sqrt{a^2} = |a|$

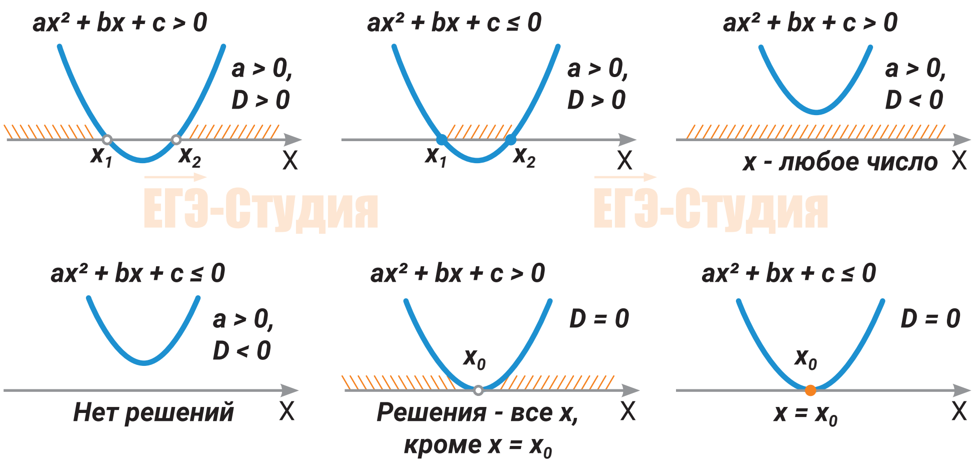
График функции $y = |x|$



Расположение графика квадратичной параболы



Квадратичные неравенства



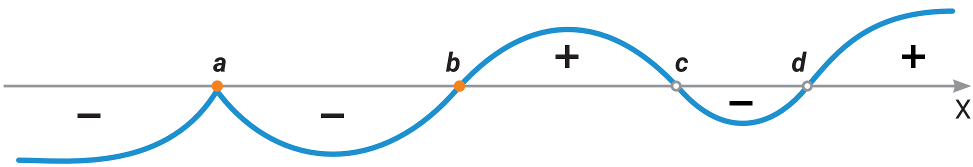
Метод интервалов

Применяется для решения неравенств вида $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} \geq 0$

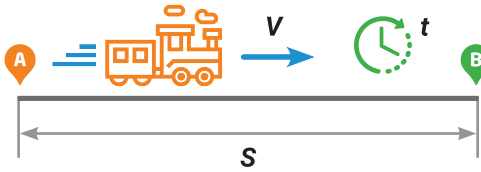
(знак неравенства может быть любой: **>, <, ≤**).

ПРИМЕР Решим неравенство $\dfrac{(x-a)^2(x-b)}{(x-c)(x-d)} \geq 0$

1. Отметим на оси ***X*** точки ***a, b, c, d***, в которых функция в левой части неравенства равна нулю или не существует.
2. Эти точки разбивают ось ***X*** на промежутки (интервалы).
3. Определяем знак функции в левой части неравенства на каждом из интервалов. Для определения знака функции на каждом интервале берем любую удобную точку, принадлежащую этому интервалу.
4. При переходе через точки c и d (где знаменатель равен нулю) и через точку b (где числитель равен нулю) функция в левой части неравенства меняет знак.
5. При переходе через точку, для которой соответствующий множитель входит в формулу функции в квадрате (в четной степени), функция не меняет знак.



Правила решения задач на движение



1. Основная формула: $\boxed{S = v \cdot t}$

(Расстояние = Скорость · Время)

2. В качестве переменных лучше всего выбирать скорости.
3. Составляем таблицу: скорость, время, расстояние. Записываем в таблицу все известные величины.
4. Составляем уравнение.
5. Решаем уравнение. Или сразу подбираем целый положительный корень.

	V	t	S
из A в B	x	$\frac{100}{x}$	100
из B в A	$x+5$	$\frac{100}{x+5}$	100

Средняя скорость находится по формуле:

$$V_{ср} = \frac{S_{общ}}{t_{общ}} = \frac{S_1 + S_2}{\frac{S_1}{V_1} + \frac{S_2}{V_2}}$$

$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x+5} = 1$$

$$x = 20$$

Правила решения задач на работу

1. Основная формула для решения задач на работу:

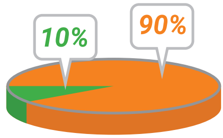
$\boxed{A = p \cdot t}$ ***(Работа = Производительность · Время)***

Производительность – это работа в единицу времени. Производительность можно иначе назвать скоростью работы: сколько сделано в час.

2. В качестве переменных в задачах на работу удобно выбирать производительности.
3. Составляем таблицу: производительность, время, работа. Записываем в нее данные условия.
4. При совместной работе производительности складываются.
5. Если работа не дана и не важна по условию, принимаем ее за ***1***.

	P	t	A
первый	$\frac{1}{3}$	3	1
второй	$\frac{1}{6}$	6	1
вместе	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$	2	1

Правила решения задач на проценты



1. Один процент — это одна сотая часть чего-либо.

2. За ***100%*** принимается та величина, с которой сравниваем.

3. Если величину x увеличить на p процентов, получим $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

Если величину x уменьшить на p процентов, получим $x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$;

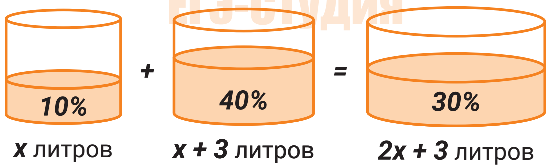
4. Если величину x увеличить на p процентов, а затем уменьшить на q процентов, получим $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{q}{100}\right)$;

Если величину x дважды увеличить на p процентов, получим $x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$;

Если величину x дважды уменьшить на p процентов, получим $x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$.

Правила решения задач на растворы, сплавы, смеси

1. *Концентрация раствора* - это отношение объема вещества к объему раствора. Или – отношение массы вещества к массе раствора. Концентрацию часто выражают в процентах.



$$0{,}1x + 0{,}4\,(x+3) = 0{,}3\,(2x+3)$$

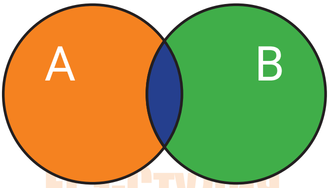
$$x = 3$$

2. Изображаем сосуд с растворами (или куски сплава) схематично – так, как будто вещества в них не перемешаны между собой, а разделены.

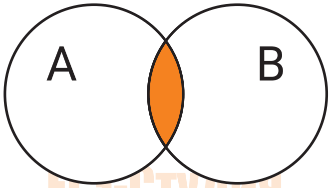
3. Подписываем, сколько литров содержат сосуды и сколько в них процентов вещества.

4. Составляем и решаем уравнение для одного из веществ, входящих в раствор. Поскольку химических превращений не происходит, масса этого вещества в начале и в конце должна быть одинаковой.

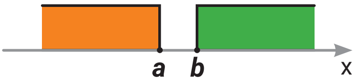
Логика

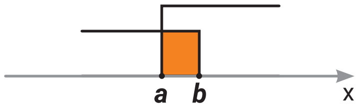


$A \cup B$



$A \cap B$





объединение множеств (интервалов),
сумма событий,
знак ∪
или,
совокупность условий,
знак [

пересечение множеств (интервалов),
произведение событий,
знак ∩
и,
система условий,
знак {

Греческий алфавит

Αα альфа	***Ββ*** бета	***Γγ*** гамма	***Δδ*** дельта	***Εε*** эпсилон	***Ζζ*** дзета
Ηη эта	***Θθ*** тета	***Ιι*** йота	***Κκ*** каппа	***Λλ*** лямбда	***Μμ*** мю
Νν ню	***Ξξ*** кси	***Οο*** омикрон	***Ππ*** пи	***Ρρ*** ро	***Σσ*** сигма
Ττ тау	***Υυ*** ипсилон	***Φφ*** фи	***Χχ*** хи	***Ψψ*** пси	***Ωω*** омега

Теория вероятностей

Случайным называется событие, которое может либо произойти, либо нет.

Вероятность события равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов.

Вероятность не может быть больше единицы.

ПРИМЕР Перед экзаменом вы выучили 3 билета из 20. Вероятность вытянуть счастливый билет равна $\frac{3}{20}$.

События, взаимоисключающие друг друга в рамках данной задачи, называются ***несовместными***. Появление одного из несовместных событий исключает появление других.

ПРИМЕР Вы бросаете монету. «Выпал орел» и «выпала решка» - несовместные события.

Сумма двух событий – термин, означающий, что произошло или первое событие, или второе, или оба сразу.

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей.

ПРИМЕР Вы бросаете игральную кость. Вероятность выпадения «тройки» равна $\frac{1}{6}$. Вероятность выпадения «шестерки» также равна $\frac{1}{6}$. Вероятность выпадения числа, которое делится на 3, равна $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Произведение двух событий – термин, означающий, что произошло и одно, и другое событие.

События А и В называют ***независимыми***, если вероятность появления события А не меняет вероятности появления события В.

Для нескольких независимых событий вероятность того, что все они произойдут, равна произведению вероятностей.

ПРИМЕР

Пусть вероятность того, что новый смартфон сломается сразу после покупки, равна $\frac{1}{200}$.

А вероятность того, что новый ноубук сломается сразу после покупки, равна $\frac{1}{100}$.

Тогда вероятность того, что оба купленных гаджета независимо друг от друга сломаются сразу после покупки, равна $\frac{1}{200} \cdot \frac{1}{100}$.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Арифметическая прогрессия	*Геометрическая прогрессия*
Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен ***сумме*** предыдущего члена и некоторого фиксированного числа ***d***: $a_{n+1} = a_n + d \quad n = 1,2,\ldots$ Фиксированное число ***d*** называется ***разностью*** арифметической прогрессии.	Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен ***произведению*** предыдущего члена и некоторого фиксированного числа ***q***: $b_{n+1} = b_n q \quad n = 1,2,\ldots$ Фиксированное число ***q*** называется ***знаменателем*** геометрической прогрессии.
ПРИМЕР последовательность ***1, 4, 7, 10, 13…*** является арифметической прогрессией ***с*** $a_1 = 1$ ***и*** $d=3$.	ПРИМЕР последовательность ***1, 4, 16, 64, 256…*** является геометрической прогрессией с $b_1=1$ ***и*** $q=4$
Формула ***n***-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + (n-1)d.$	Формула ***n***-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 q^{n-1}$
Сумма первых n членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ вычисляется по формуле: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$	Сумма первых n членов геометрической прогрессии $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ вычисляется по формуле: $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$
Основное свойство арифметической прогрессии: Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	***Основное свойство геометрической прогрессии:*** Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

Функция

1. Функция – это ***зависимость одной переменной величины от другой***. Это взаимосвязь между величинами. Любой физический закон, любая формула отражает такую взаимосвязь величин.

Запись ***y = f(x)*** означает, что величина у зависит от величины х по определенному закону, или правилу, обозначаемому ***f***.

2. Функция – это определенное действие над переменной.

3. Функция – это соответствие между двумя множествами, причем каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

Каждому элементу множества ***X*** по определенному правилу мы ставим в соответствие элемент множества ***Y***. Множество ***X*** называется ***областью определения функции***. Множество ***Y*** – ***областью значений***.

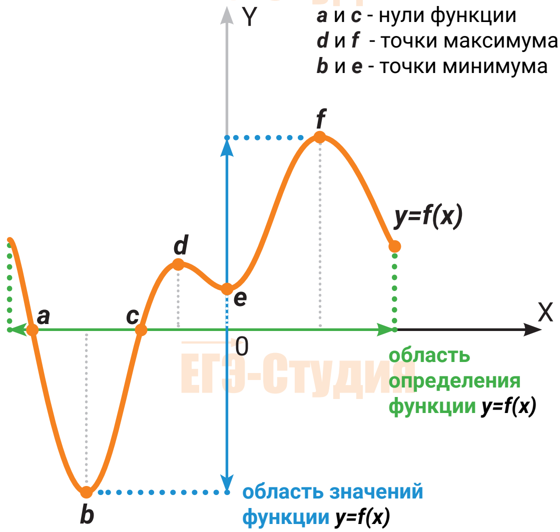
График функции

Абсцисса — это координата точки по горизонтали.
Ордината — координата по вертикали.

Ось абсцисс — горизонтальная ось, или ось ***X***.
Ось ординат — вертикальная ось, или ось ***Y***.

Аргумент — независимая переменная, от которой зависят значения функции. Обычно обозначается ***x***.

Область определения функции — множество тех (и только тех) значений аргумента х, при которых функция существует. Обозначается: ***D(f)*** или ***D(y)***.



Область значений функции — это множество значений, которые принимает переменная у. Обозначается: ***E(f)*** или ***E(y)***

Нули функции — точки, где значение функции равно нулю, то есть $y = 0$.

Значения функции ***положительны*** там, где $y > 0$.
Значения функции ***отрицательны*** там, где $y < 0$.

Функция $y = f(x)$ возрастает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Для возрастающей функции большему значению x соответствует большее значение y, то есть график идет вправо и вверх.

Функция $y = f(x)$ убывает на множестве M, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству M, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.
Для убывающей функции большему значению x соответствует меньшее значение y.
График идет вправо и вниз.

Точка максимума — это внутренняя точка области определения, такая, что значение функции в ней больше, чем во всех достаточно близких к ней точках.
Это такая точка, значение функции в которой больше, чем в соседних («холмик» на графике).

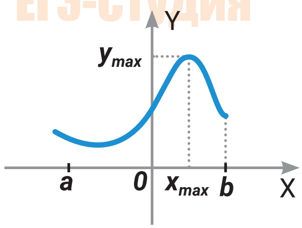
Точка минимума — внутренняя точка области определения, такая, что значение функции в ней меньше, чем во всех достаточно близких к ней точках.
Это такая точка, что значение функции в ней меньше, чем в соседних («ямка» на графике)

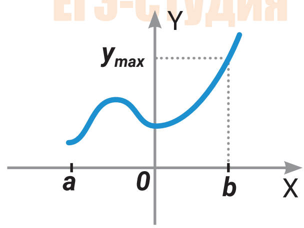
Точки максимума и минимума вместе называются ***точками экстремума функции***.

Минимум функции — это ее значение в точке минимума.

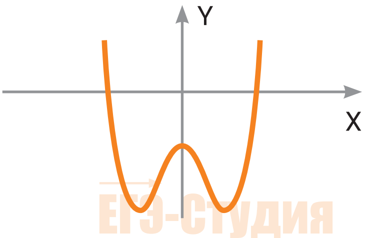
Максимум функции – это ее значение в точке максимума

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке достигаются либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.





Четная функция



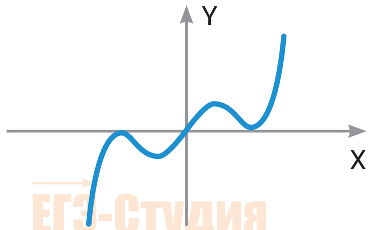
Функция $y=f(x)$ - ***четная***, если $D(f)$ симметрична относительно нуля и

$$f(-x) = f(x) \text{ для всех } x \in D(f).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

ПРИМЕР $y = x^2$, $y = cosx$, $y = |x|$ - четные функции.

Нечетная функция

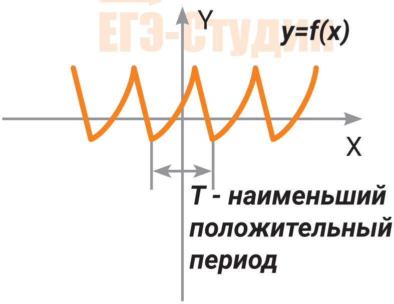


Функция $y=f(x)$ - ***нечетная***, если $D(f)$ симметрична относительно нуля и $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in D(f)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

ПРИМЕР $y = x^3$, $y = sinx$, $y = tgx$, $y = \frac{x}{2}$ - нечетные функции.

Периодическая функция



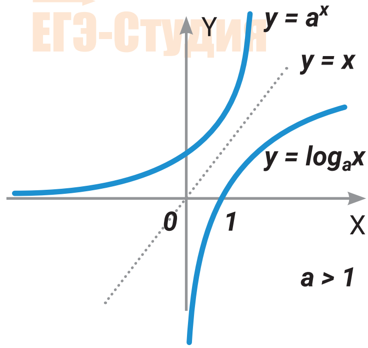
Функция $y=f(x)$ - ***периодическая***, если существует такое число T, не равное нулю, что для любого x из ее области определения $f(x + T) = f(x)$.

Число T называется периодом функции.

ПРИМЕР $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ – периодические функции.

Для функций $y = sinx$ и $y = cosx$ период $T = 2\pi$. Для функций tgx и $y = ctgx$ период $T = \pi$.

Обратная функция



Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются взаимно-обратными, если $f(g(x)) = x$.

ПРИМЕР $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ при $x \geq 0$,
$y = a^x$ и $y = log_a x$ при $x > 0$
$y = sinx$ и $y = arcsinx$ при $x \in [-1; 1]$.

Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Функции и графики

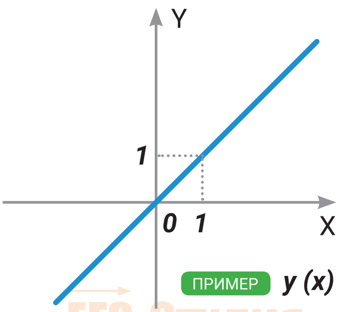
Элементарные функции и их графики

1. *Степенные* - функции вида $y = x^a$.
   ПРИМЕР линейные, квадратичные, кубические, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$.
2. Показательные – функции вида $y = a^x$.
3. Логарифмические – функции вида $y = \log_a x$.
4. Тригонометрические – функции вида $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg x$, $y = ctg x$.
5. Обратные тригонометрические – функции вида $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg x$, $y = arcctg x$.

Степенные функции

Линейная функция

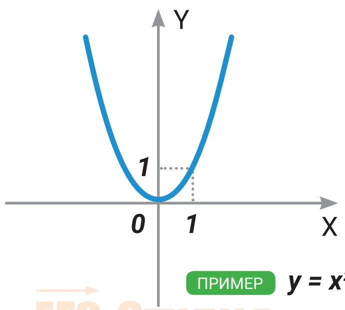
$y = kx+b$



ПРИМЕР $y(x) = x$

Квадратичная парабола

$y = ax^2 + bx + c$



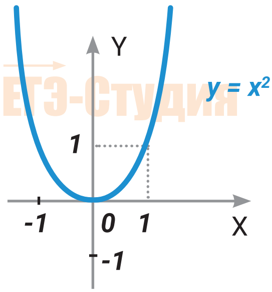
ПРИМЕР $y = x^2$

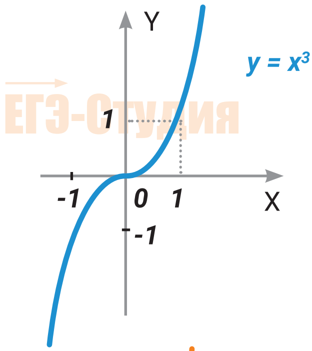
Степенные функции

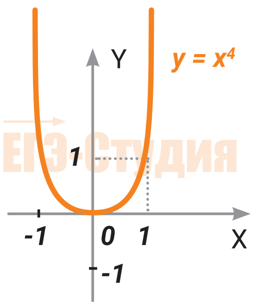
Функция $y = x^n$, n - натуральное

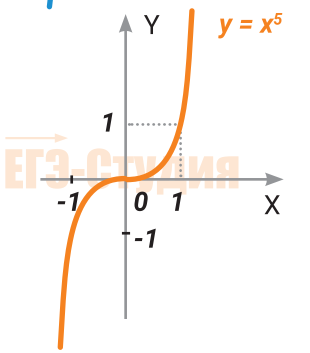
n – четное, функция четная

n – нечетное, функция нечетная







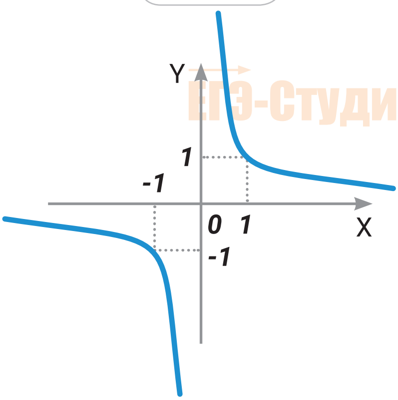


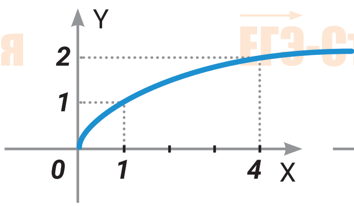
Гипербола

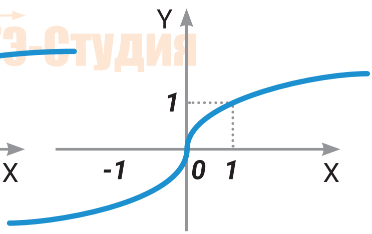
$y = \dfrac{k}{x}$

$y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt[3]{x}$

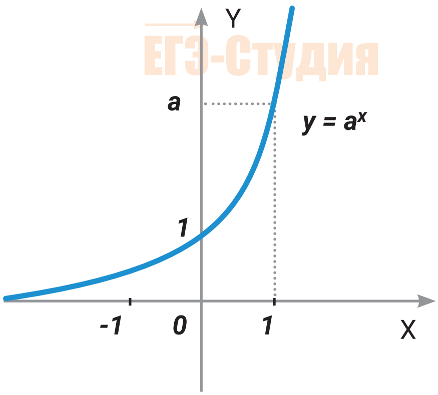




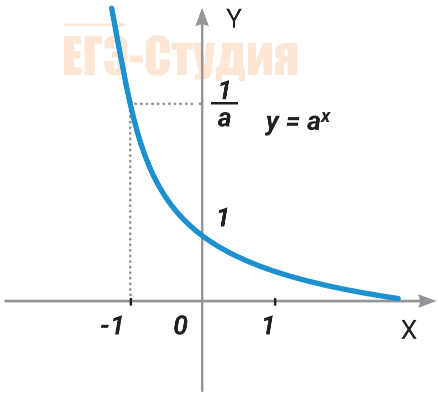


Показательная функция $y=a^x$

$a>1$

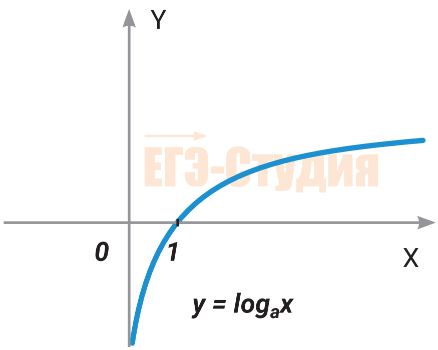


$0 < a < 1$

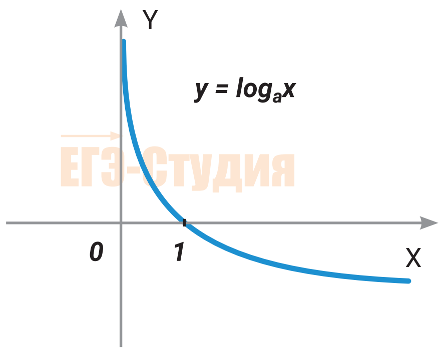


Логарифмическая функция $y = \log_a x$

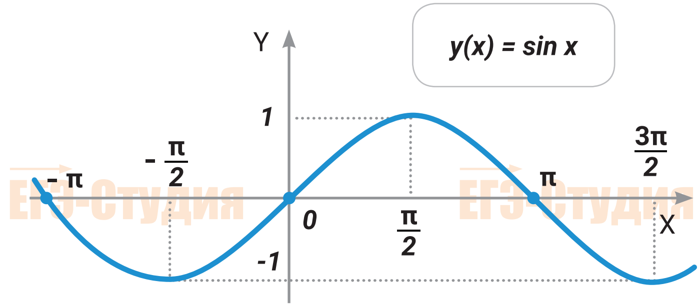
$a>1$

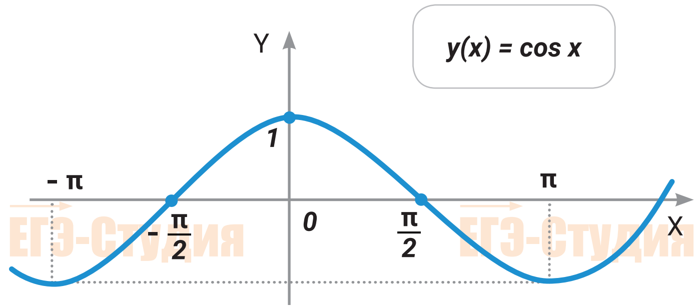


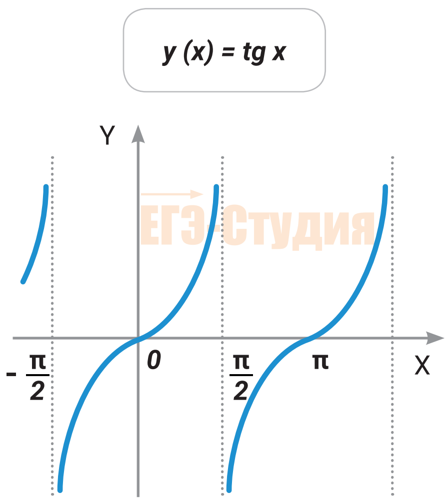
$0 < a < 1$

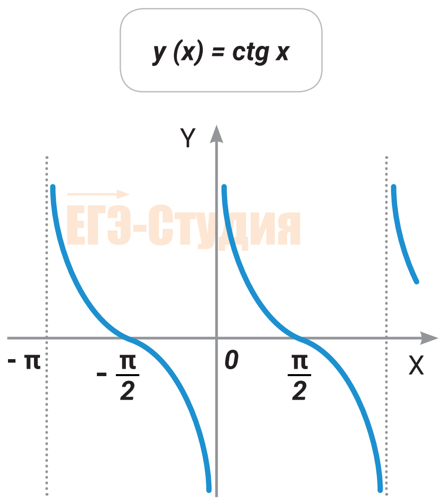


Тригонометрические функции



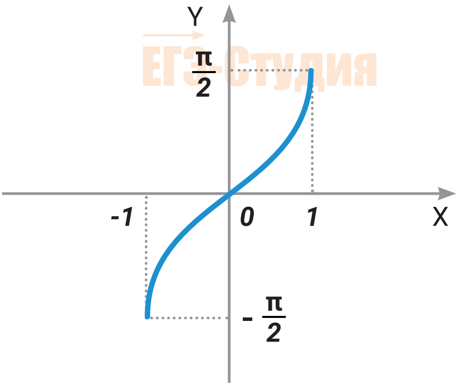




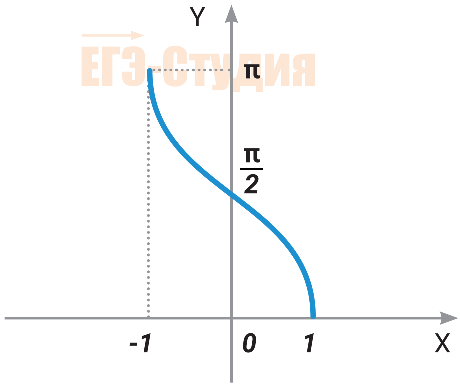


Обратные тригонометрические функции

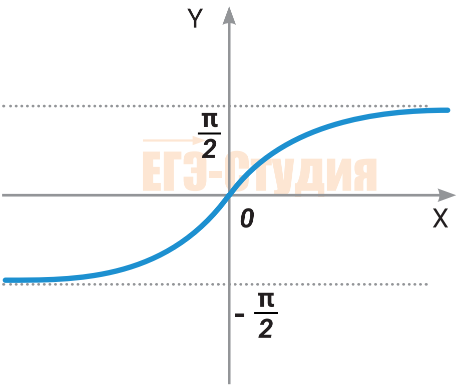
y = arcsin x



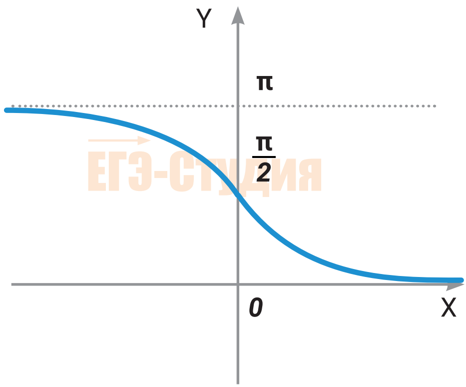
y = arccos x



y = arctg x



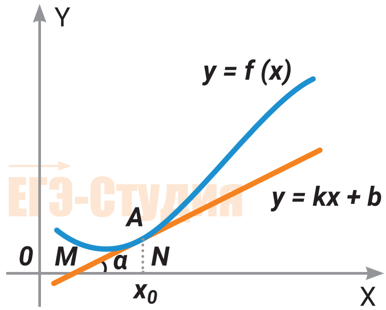
y = arcctg x



Производная функции

Производная — это скорость изменения функции.

Производная функции ***f (x)*** в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке x_0. Производная также равна тангенсу угла наклона касательной.



$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$

Условия касания графика функции ***y = f(x)*** и прямой ***y = kx + b***: $\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}$

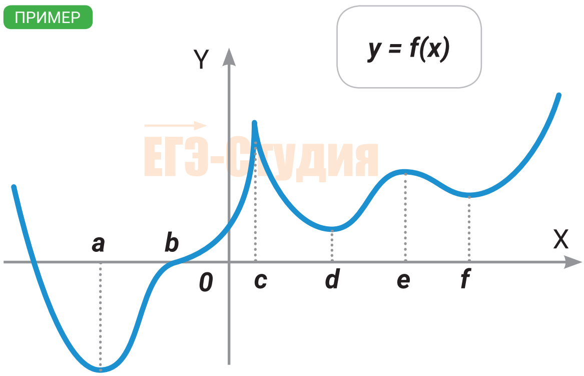
Если ***f' (x) > 0***, то функция ***f (x)*** возрастает.
Если ***f' (x) < 0***, то функция ***f (x)*** убывает.

В точке максимума производная равна нулю и меняет знак с «плюса» на «минус».

В точке минимума производная тоже равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс».

f(x)	возрастает	точка максимума	убывает	точка минимума	возрастает
f' (x)	**+**	***0***	**–**	***0***	**+**

ПРИМЕР



Точки ***a, d, f*** - точки минимума функции ***y = f(x)***.

В этих точках ***f'(x) = 0***.

Точки ***c, e*** - точки максимума функции ***y = f(x)***.

В точке ***c*** производная не существует.

В точке ***e f'(x) = 0***.

Точка ***b*** - точка перегиба функции ***y = f(x)***.

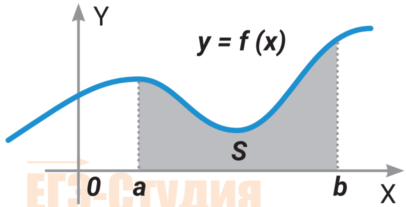
В точке ***b f'(x) = 0***

Таблица производных

$f(x)$ (функция)	$f'(x)$ (производная)
C (константа)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
Правила дифференцирования	
$(u+v)' = u' + v'$ $(u-v)' = u' - v'$ $(u \cdot v)' = u'v + v'u$ $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $(c \cdot f)' = c\,(f)'$	u, v, f – функции c – константа

Первообразная функции

Функция ***F(x)***, для которой ***f(x)*** является производной, называется ***первообразной*** функции ***y = f(x)***. Функции вида ***y = F(x) + C*** образуют множество первообразных функции ***y = f(x)***.



Криволинейная трапеция – фигура, ограниченная графиком непрерывной функции ***y = f (x)***, осью ***X*** и прямыми ***x=a*** и ***x=b***.

Пусть $y = f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$.
Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле ***Ньютона-Лейбница***:

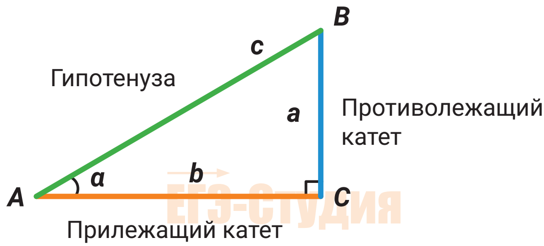
$$S = F(b) - F(a)$$

Таблица первообразных

f(x) (функция)	F (x) (первообразная)
0	C (константа)
1	$x + C$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$

Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике - это отношение противолежащего катета к гипотенузе,



$$sin\angle A = \frac{a}{c}.$$

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике - это отношение прилежащего катета к гипотенузе,

$$cos\angle A = \frac{b}{c}.$$

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике - это отношение противолежащего катета к прилежащему,

$$tg\angle A = \frac{a}{b}.$$

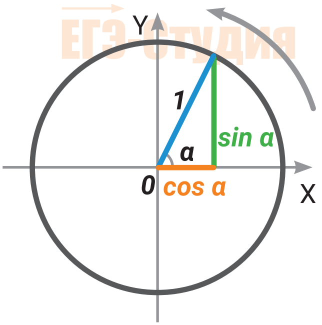
Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике - это отношение прилежащего катета к противолежащему,

$$ctg\angle A = \frac{b}{a}.$$

Тригонометрия для произвольного угла

Единичная окружность – окружность с центром в начале координат и радиусом 1.

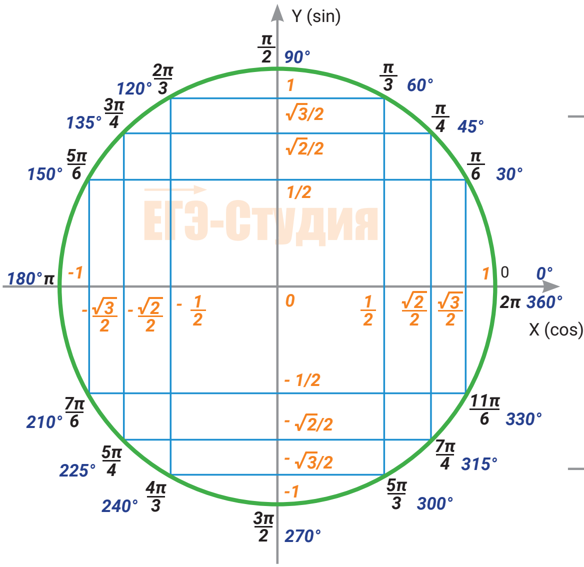
Отсчитываем углы от положительного направления оси X против часовой стрелки.



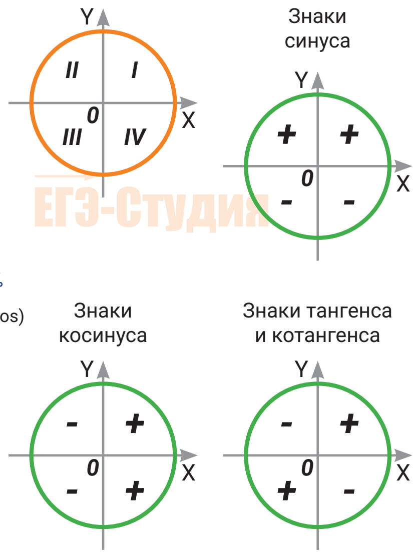
Косинус угла ***α*** – это абсцисса точки на единичной окружности, соответствующей углу ***α***.

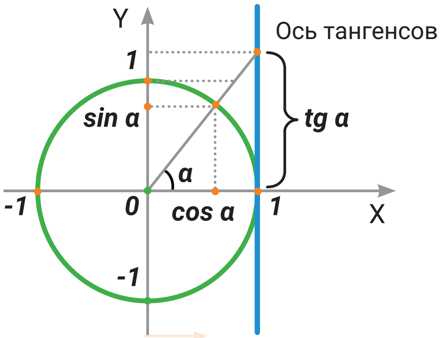
Синус угла ***α*** – это ордината точки на единичной окружности, соответствующей углу ***α***.

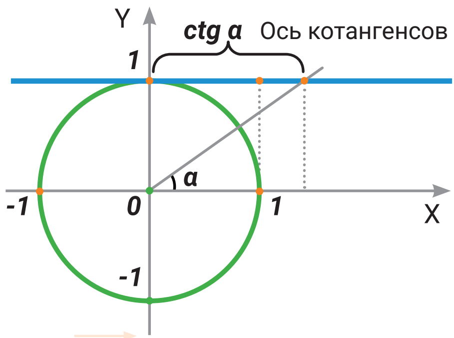
Тригонометрический круг



Четверти тригонометрического круга







Значения тангенса и котангенса для углов от 0 до π:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$tg\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\varphi$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	не существует

Обратные тригонометрические функции

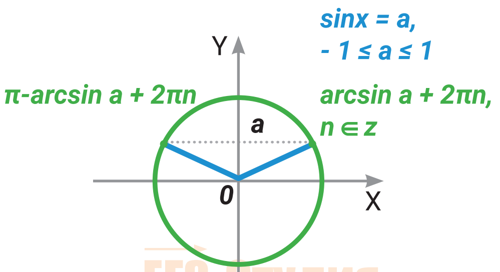
Арксинус числа ***a*** – это число $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, такое, что $\sin\varphi = a$.

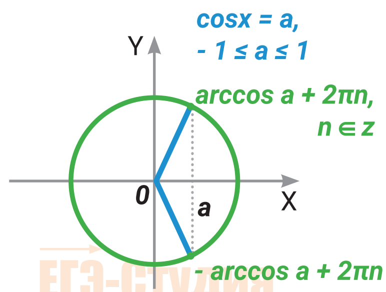
Арккосинус числа ***a*** – это число $\varphi \in [0; \pi]$, такое, что $\cos\varphi = a$.

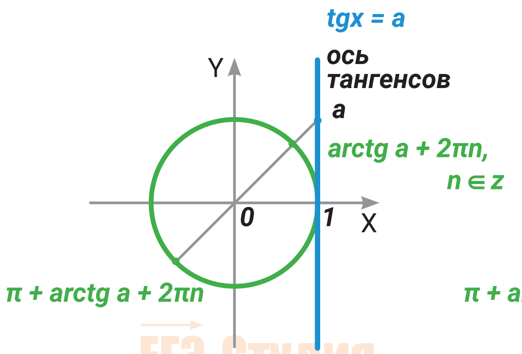
Арктангенс числа ***a*** – это число $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, такое, что $\mathrm{tg}\,\varphi = a$.

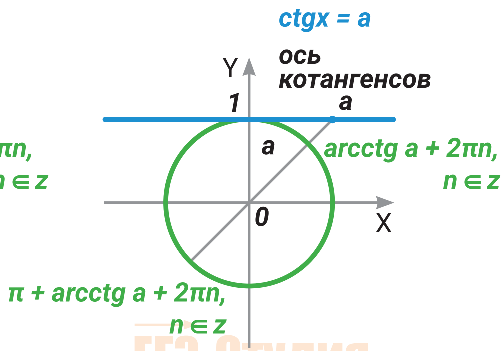
Арккотангенс числа ***a*** – это число $\varphi \in (0; \pi)$, такое, что $\mathrm{ctg}\,\varphi = a$.

Решение простейших тригонометрических уравнений









Формулы решений тригонометрических уравнений

Уравнение	*Решения*
$\sin x = a$, $\lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$
$\cos x = a$, $\lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$
$\mathrm{tg}x = a$	$x = \mathrm{arctg}\,a + \pi n$, $n \in Z$
$\mathrm{ctg}x = a$	$x = \mathrm{arcctg}\,a + \pi n$, $n \in Z$

Формулы тригонометрии

Основное тригонометрическое тождество	
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $\quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
Двойные углы	**Синус суммы, косинус разности...**
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ $tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $tg(\alpha\pm\beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha\, tg\beta}$
Сумма синусов, разность косинусов...	**Преобразование произведения в сумму**
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$	$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
Универсальная тригонометрическая замена	**Формулы понижения степени**
Пусть $t = tg\frac{\alpha}{2}$. Тогда $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$	$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
Тройные углы	
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$	

Формулы приведения

Помогают **привести** тригонометрические выражения к более простым.

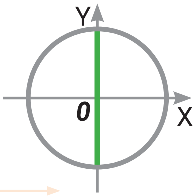
Первая часть правила

К аргументу прибавляется (вычитается) нечетное число, умноженное на $\frac{\pi}{2}$

Это формулы вида

$\cos(x + \frac{3\pi}{2}),\ \sin(\frac{\pi}{2} - x),\ tg(x + \frac{\pi}{2})$

Прибавляем (вычитаем) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ – в общем, то, что лежит на ***вертикальной*** оси.



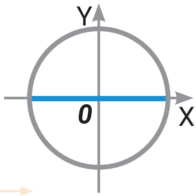
Вертикально киваем головой: ***ДА***, меняется функция на кофункцию. Синус поменяется на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс и наоборот.

К аргументу прибавляется целое число, умноженное на π.

Это формулы вида

$\sin(x + \pi),\ \cos(\pi - x)$

Прибавляем (вычитаем) π, 3π, 5π – в общем то, что лежит на ***горизонтальной*** оси.



Горизонтально мотаем головой: ***НЕТ***, не меняется функция на кофункцию

Вторая часть правила

Знак получившегося выражения такой же, каким будет знак тригонометрической функции в левой его части, при условии, что аргумент мы берем из первой четверти.

ПРИМЕР Упростим выражение $\cos(x+\frac{\pi}{2})$.

Поскольку $\frac{\pi}{2}$ лежит на вертикальной оси, функция меняется на кофункцию (на синус).

Взяв x из первой четверти и прибавив к нему $\frac{\pi}{2}$, попадем во вторую четверть. Во второй четверти косинус отрицателен. Значит, получится $-\sin x$.

Еще примеры:

$\cos(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin x$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$tg(x + \frac{\pi}{2}) = -ctg x$

$\sin(x + \pi) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

Корни и степени

Степень – это выражение вида a^c.
Здесь a – основание степени, c – показатель степени.

По определению, $a^1 = a$

$a^2 = a \cdot a$ $\quad a^3 = a \cdot a \cdot a$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, где n – натуральное.

$a^0 = 1$ при $a \neq 0$.

Выражение 0^0 не определено.

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ $\qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Правила действий со степенями

$a^m a^n = a^{m+n}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$

$a^n b^n = (ab)^n$

$\dfrac{a^n}{b^n} = (\dfrac{a}{b})^n$

Арифметический квадратный корень из числа а — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен а.

$(\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{a} \geq 0$

При этом $a \geq 0$.

Свойства арифметического квадратного корня:

$\sqrt{a} \geq 0$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$(\sqrt{a^2}) = |a|$

Корень n-ной степени из числа а — это такое число, при возведении которого в n-ную степень получается число a.

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

Корень нечетной степени можно извлекать как из положительных, так и из отрицательных чисел.
Квадратный корень, а также корень четной степени, можно извлекать только из неотрицательных чисел.
Сам корень четной степени при этом также является неотрицательным числом.

По определению,

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

В общем случае

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ при $a > 0$.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ при $a > 0$.

Логарифмы

Логарифм положительного числа b по основанию a — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

При этом $b>0,\ a>0,\ a\neq 1$.

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b,\quad \log_a a^c = c.$$

Основные формулы для логарифмов:

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$ (Логарифм произведения равен сумме логарифмов)

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (Логарифм частного равен разности логарифмов)

$\log_a b^m = m \log_a b$ (Формула для логарифма степени)

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Десятичный логарифм: логарифм с основанием 10.
Обозначается: $\lg b$

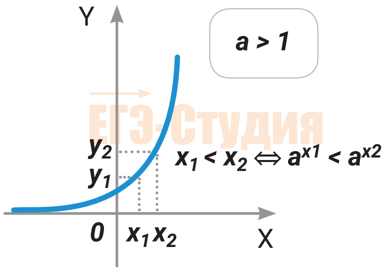
Натуральный логарифм: логарифм с основанием e.
Обозначается: $\ln b$

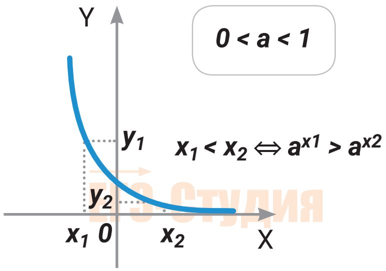
Число $e \approx 2{,}7182818...$

ПРИМЕР $\log_2 8 = 3$; $\log_4 16 = 2$; $\log_5 \frac{1}{5} = -1$; $\log_3 81 = 4$;
$\lg 100 = 2$; $\ln e^3 = 3$; $\log_7 7 = 1$; $\log_{13} 1 = 0$.

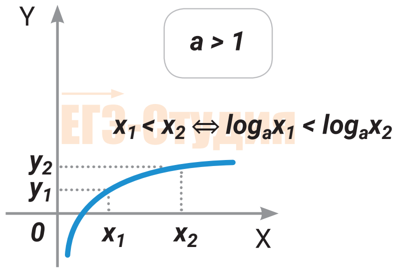
Показательные и логарифмические неравенства

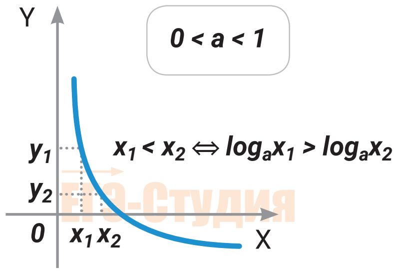
Показательные неравенства





Логарифмические неравенства





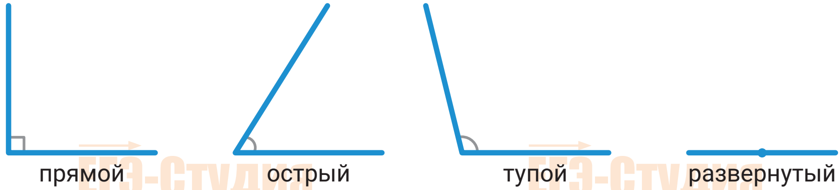
Метод замены множителя (рационализации)

Сложный множитель	*На что заменить*
$\log_h f$	$(h - 1)(f - 1)$
$\log_h f - 1$	$(h - 1)(f - h)$
$\log_h f - \log_h g$	$(h - 1)(f - g)$
$h^f - h^g$	$(h - 1)(f - g)$
$h^f - 1$	$(h - 1) \cdot f$
$f^h - g^h$	$(f - g) \cdot h$
$\|f\|-\|g\|$	$f^2 - g^2$

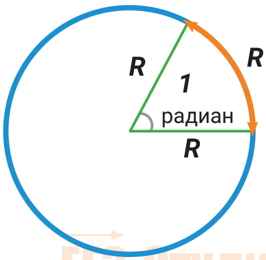
f, g – функции от ***x***.
h – функция или число.
f, g, h – такие, что соответствующие выражения определены.

Геометрия

Углы

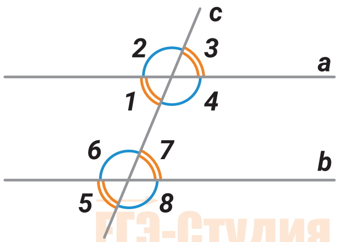


Прямой – угол, равный ***90°***,
Острый – угол, меньший ***90°***,
Тупой угол – угол от ***90°*** до ***180°***.
Развернутый – угол, равный ***180°***.



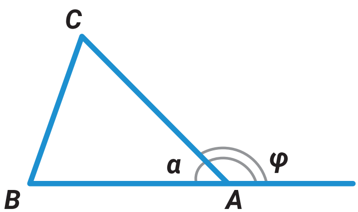
1 радиан – центральный угол, опирающийся на дугу, равную радиусу окружности.

Смежные углы - углы, у которых одна сторона общая, а две другие лежат на одной прямой



Углы при параллельных прямых и секущей

$\angle 1 = \angle 3$ - вертикальные углы равны
$\angle 3 = \angle 5$ - накрест лежащие углы равны.
$\angle 2 = \angle 6$ - соответственные углы равны
$\angle 2 + \angle 3 = 180°$ - сумма смежных углов равна ***180°***.
$\angle 1 + \angle 6 = 180°$ - сумма односторонних углов равна ***180°***.



Внешний угол треугольника – угол, смежный с одним из углов треугольника.

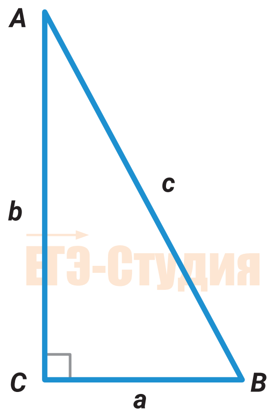
$\alpha + \varphi = 180°$
$\sin\varphi = \sin\alpha$; $\cos\varphi = -\cos\alpha$; $\mathrm{tg}\varphi = -\mathrm{tg}\alpha$
$\varphi = \angle B + \angle C$

Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним.

Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

a и b – катеты, c – гипотенуза.



Часто встречающиеся пифагоровы тройки:

3; 4; 5	*7; 24; 25*
5; 12; 13	*8; 15; 17*

Тригонометрия в прямоугольном треугольнике

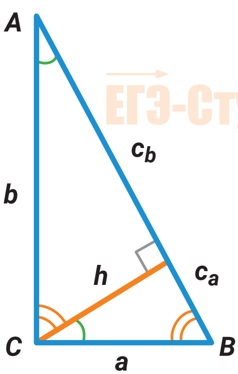
$$\sin\angle A = \frac{a}{c} \qquad \sin^2\angle A + \cos^2\angle A = 1 \qquad \angle A + \angle B = 90^\circ$$

$$\cos\angle A = \frac{b}{c} \qquad tg^2\angle A + 1 = \frac{1}{\cos^2\angle A} \qquad \sin\angle A = \cos\angle B$$

$$tg\angle A = \frac{a}{b} \qquad ctg^2\angle A + 1 = \frac{1}{\sin^2\angle A} \qquad \cos\angle A = \sin\angle B$$

$$ctg\angle A = \frac{b}{a} \qquad tg\angle A \cdot ctg\angle A = 1 \qquad tg\angle A = ctg\angle B$$

Высота в прямоугольном треугольнике ,проведенная из вершины прямого угла, делит его на два треугольника, подобных данному.



$$\triangle ABC \sim \triangle CBH \sim \triangle ACH$$

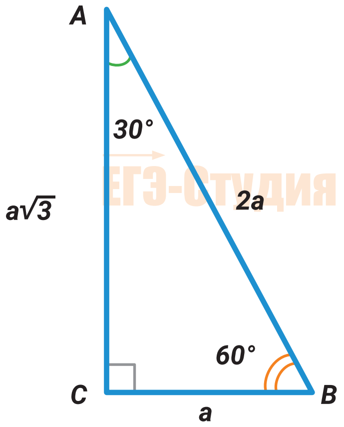
$$S_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

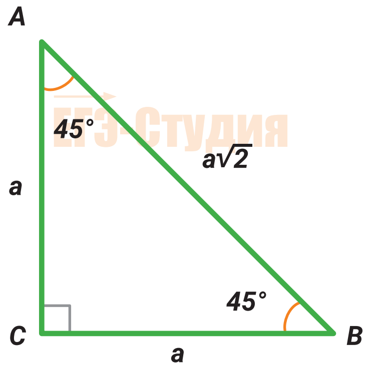
$$h^2 = c_a \cdot c_b\,; \quad a^2 = c \cdot c_a\,; \quad b^2 = c \cdot c_b$$

Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника: $R = \dfrac{c}{2}$

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r = \dfrac{a + b - c}{2}$

«Особенные» треугольники





Сумма углов треугольника: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Неравенство треугольника:

$c < a + b$

$a < b + c$

$b < a + c$

Формулы площади треугольника:

$$S_\triangle = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\angle C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p \cdot r = \frac{abc}{4R}.$$

Здесь $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр, r – радиус вписанной окружности,

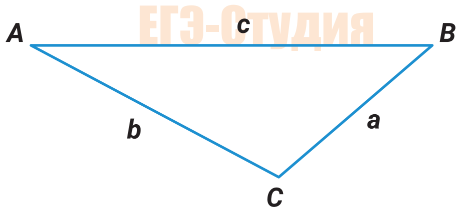
R – радиус описанной окружности.

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R$$

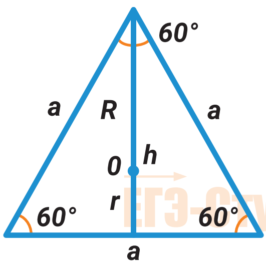
Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\angle C$$



В треугольнике напротив большего угла лежит большая сторона

Правильный треугольник



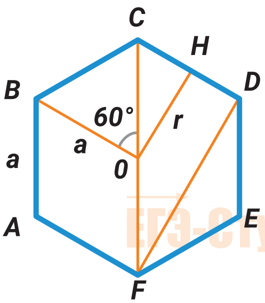
Высота правильного треугольника: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

Радиус окружности, описанной вокруг правильного треугольника: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник: $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$;

Площадь правильного треугольника: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Правильный шестиугольник



$S_{\text{пр.шестиугольника}} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$R = a$ – радиус описанной окружности,

$r = OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ – радиус вписанной окружности,

$CF = 2a$ – большая диагональ

$FD = a\sqrt{3}$ – диагональ.

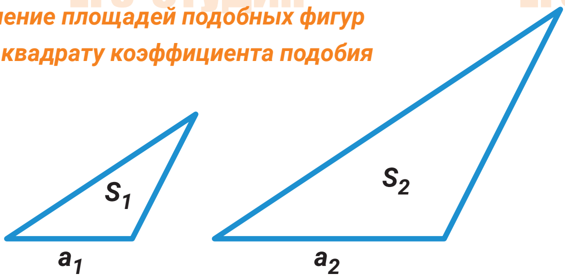
Признаки равенства треугольников

- По трем сторонам. Три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника.
- По углу и двум прилежащим к нему сторонам
- По стороне и двум прилежащим к ней углам.

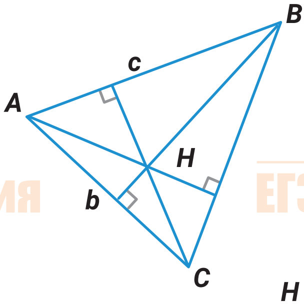
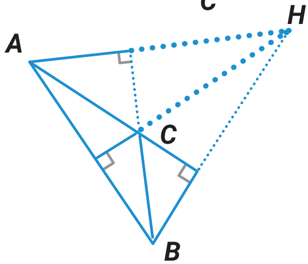
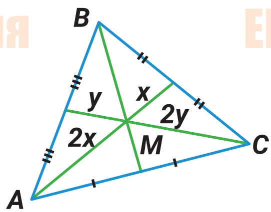
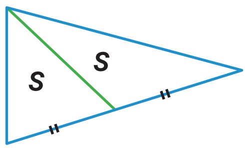
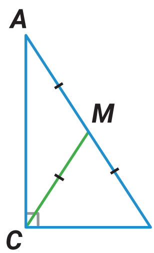
Признаки подобия треугольников

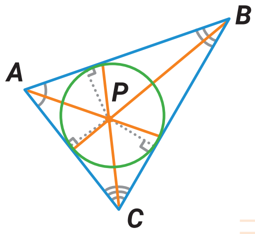
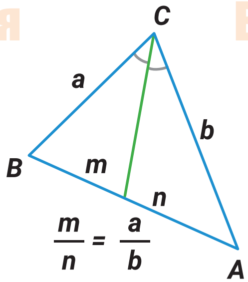
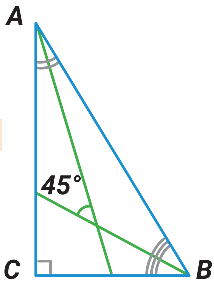
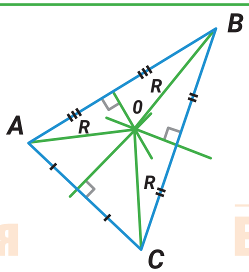
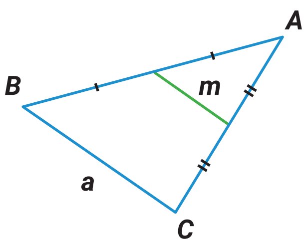
- По двум углам
- По трем сторонам.
- По углу и двум прилежащим к нему сторонам

Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия

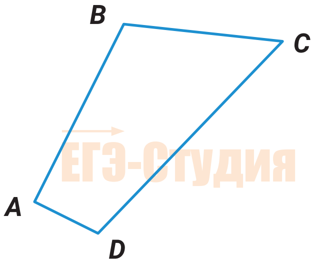
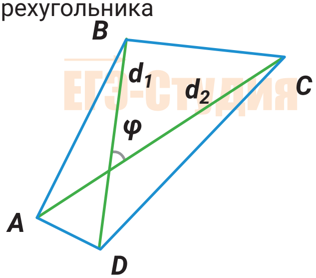
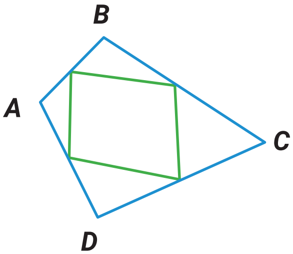


$S_1 : S_2 = (a_1 : a_2)^2 = k^2$

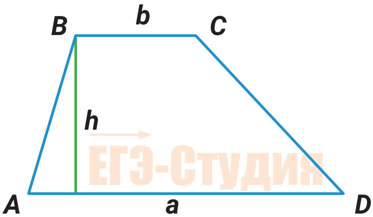
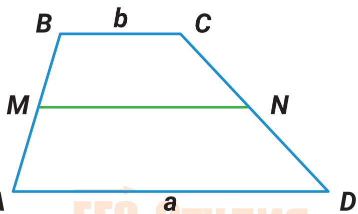
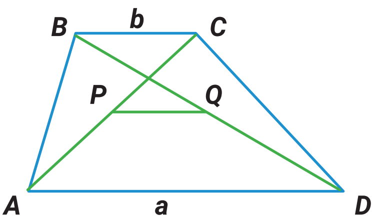
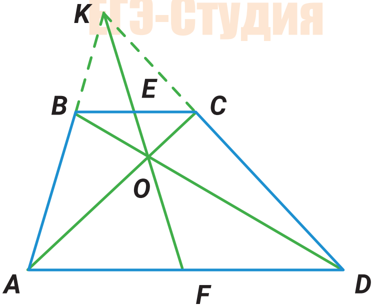
Элементы треугольника		
Высота треугольника – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону.	  	Высоты треугольника пересекаются в одной точке. В случае тупоугольного треугольника пересекаются продолжения высот. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту $S\triangle=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$
Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.	   ***CM = AM = BM = R***	Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении ***2:1***, считая от вершины. Медиана треугольника делит его на два равных по площади треугольника. Три медианы треугольника делят его на ***6*** равных по площади треугольников. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

Биссектриса треугольника делит угол треугольника пополам.	  $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ 	Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от сторон треугольника и является центром окружности, вписанной в треугольник. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону в отношении длин прилежащих сторон. Острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника равен ***45°***.
Серединный перпендикуляр к стороне треугольника – это множество точек, одинаково удаленных от ее концов.		Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от вершин треугольника и является центром окружности, описанной вокруг треугольника.
	***Средняя линия треугольника*** – отрезок, соединяющий середины его сторон. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны. $m = \frac{a}{2}; m \parallel a$	

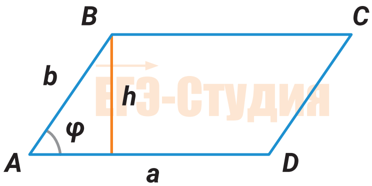
Четырехугольники

Выпуклый	Невыпуклый
 Сумма углов выпуклого четырехугольника равна ***360°*** $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ Площадь выпуклого четырехугольника  $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin\varphi.$ d_1 и d_2 – диагонали. Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма 	 На практике: представляем как комбинацию треугольников и выпуклых четырехугольников.

Трапеция – четырехугольник, имеющий ровно одну пару параллельных сторон.

	***BC* || *AD***; ***BC*** и ***AD*** – основания, ***AB*** и ***CD***– боковые стороны. $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$ $S_{трап} = \frac{a+b}{2} \cdot h$
	***M*** – середина ***AB***, ***N*** – середина ***CD***. ***MN*** – средняя линия трапеции. ***MN* || *AD*, *MN* || *BC*,** $MN = \frac{a+b}{2}$
	Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований. ***P*** – середина ***AC***, ***Q*** – середина ***BD***. $PQ = \frac{a-b}{2}$
	$K = (AB) \cap (CD)$; ***E*** - середина ***BC***, ***F*** – середина ***AD***, $O = AC \cap BD$. Замечательное свойство трапеции: середины оснований, точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.

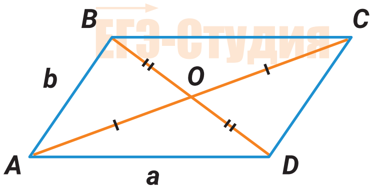
Параллелограмм **–** четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон.
$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.



$S = a \cdot h = ab\sin\varphi$

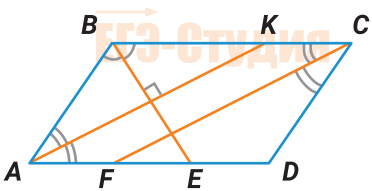
Четырехугольник является параллелограммом, если его противоположные стороны параллельны и равны.

$AB \parallel CD$, $AB = CD \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм.



Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

$AO = OC$, $BO = OD$.



$AK \parallel CF$, $AK \perp BE$.

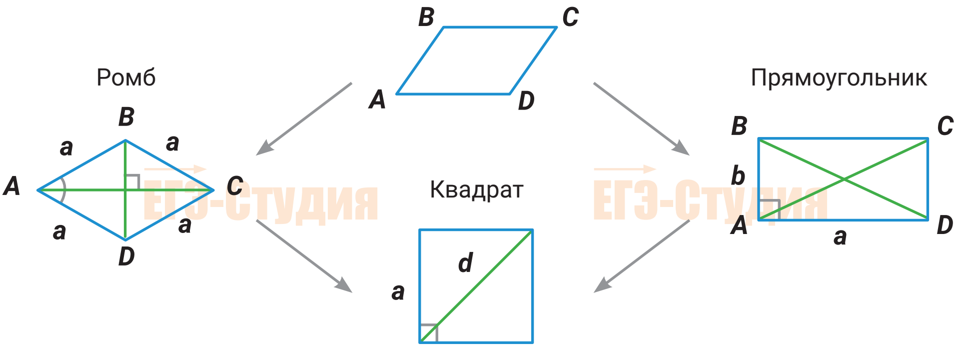
Биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны.

Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны.

Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

$AB = AE$, $DF = CD$.

Виды параллелограммов



Ромб. Параллелограмм, у которого все стороны равны.
Диагонали ромба перпендикулярны.
Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

$S_{ромба} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где d_1 и d_2 – диагонали.

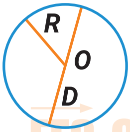
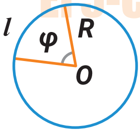
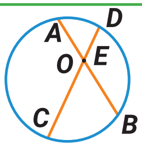
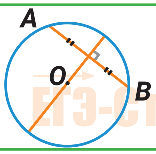
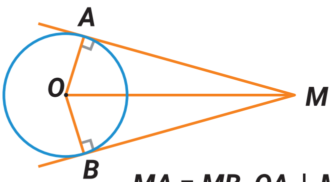
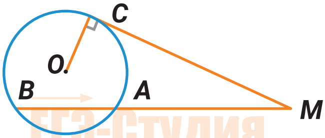
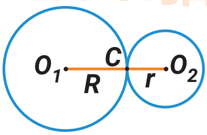
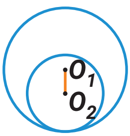
Прямоугольник. Параллелограмм, все углы которого прямые.
Диагонали прямоугольника равны.

$S_{прямоугольника} = a \cdot b$

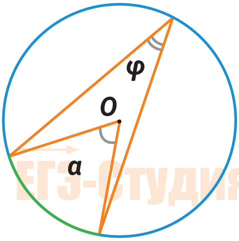
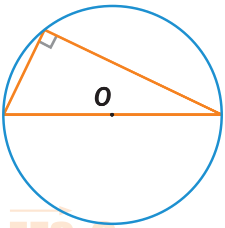
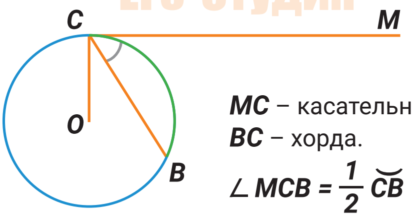
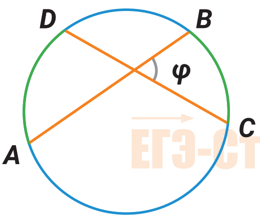
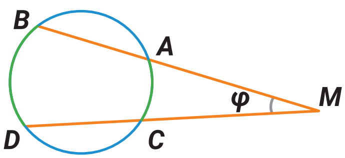
Квадрат. Ромб, все углы которого прямые. Другими словами: прямоугольник, у которого все стороны равны.

Окружность и круг

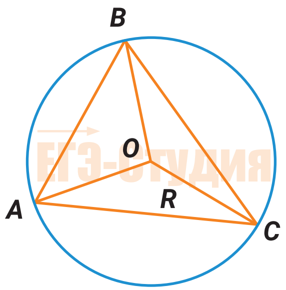
Число π равно отношению длины окружности к ее диаметру. $\pi \approx 3{,}14159...$

	$L = 2\pi R$ – длина окружности $S = \pi R^2$ – площадь круга $D = 2R$ – диаметр окружности
	$l_{дуги} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi R$ – длина дуги $S_{сектора} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi R^2$ – площадь сектора
 $AE \cdot BE = CE \cdot DE$	***Хорда*** – отрезок, соединяющий две точки на окружности. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны.
	Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
 $MA = MB,\ OA \perp MA$	Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.
	***Теорема о секущей и касательной:*** Квадрат отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей. $MC^2 = MA \cdot MB$
	Внешнее касание окружностей: $O_1O_2 = R + r$
	Внутреннее касание окружностей: $O_1O_2 = R - r$

Центральный и вписанный угол

 **α** – центральный угол, **φ** – вписанный угол. $\varphi = \alpha/2$	Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Вписанные углы, опирающиеся на равные дуги или на одну и ту же дугу, равны. Равные дуги стягиваются равными хордами.
	Вписанный угол, опирающийся на диаметр, - прямой.
 **MC** – касательная, **BC** – хорда. $\angle MCB = \frac{1}{2}\smile CB$	Угол между хордой и касательной, проведенной через конец этой хорды, равен половине угловой величины дуги, лежащей внутри этого угла.
 $\varphi = \frac{\smile AD + \smile BC}{2}$	Угол между пересекающимися хордами равен полусумме заключенных между ними дуг.
 $\varphi = \frac{\smile BD - \smile AC}{2}$	Угол между секущими (с вершиной вне окружности) равен полуразности угловых величин дуг, заключенных внутри угла.

Вписанные и описанные треугольники



Центр окружности, описанной вокруг треугольника - это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

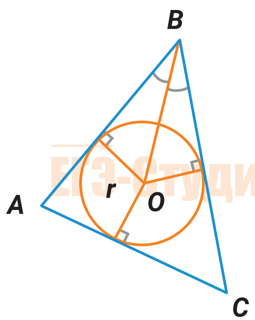
$OA = OB = OC$

Центр описанной окружности равноудален от вершин треугольника.

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$$

(теорема синусов)

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$



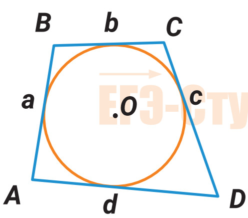
Центр окружности, вписанной в треугольник - это точка пересечения биссектрис треугольника.

Центр вписанной окружности равноудален от сторон треугольника.

$S_{\triangle ABC} = p \cdot r$, где $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2}$

Описанные и вписанные четырехугольники

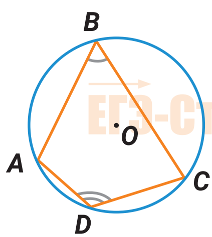
Описанный четырехугольник



$a + c = b + d$

Окружность можно вписать в четырехугольник тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Вписанный четырехугольник



$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

Окружность можно описать вокруг четырехугольника тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны $180°$

Векторы на плоскости

Физические величины, имеющие не только абсолютное значение, но и направление, называются ***векторными***.

Вектор — это направленный отрезок.

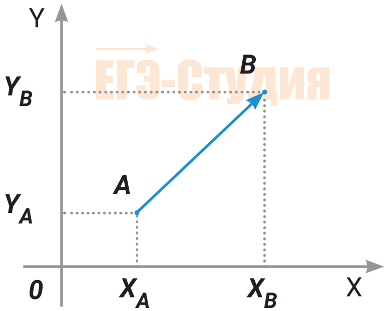
Длиной вектора называется длина этого отрезка. Обозначается: $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Равными называются векторы, имеющие одинаковые длины и одинаковое направление. Это значит, что вектор можно перенести параллельно себе в любую точку пространства.

Единичным называется вектор, длина которого равна 1. ***Нулевым*** — вектор, длина которого равна нулю. Его начало совпадает с концом.

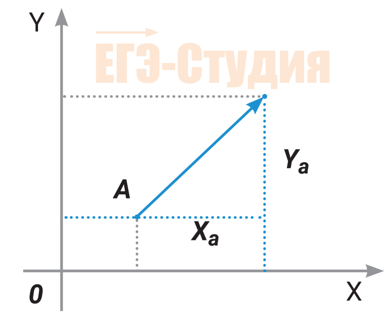
Вектор на плоскости можно задать двумя координатами: $\vec{a}\,(x_a, y_a)$

Координаты вектора на плоскости:



$$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A,\ y_B - y_A)$$

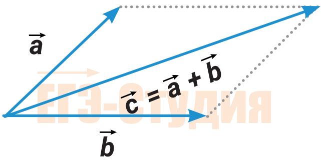
Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат



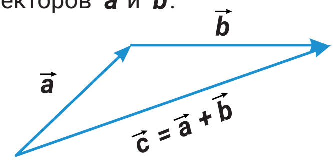
$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

Сложение векторов

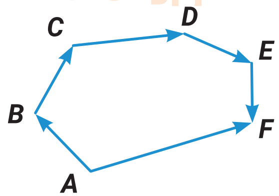
1 способ. **Правило параллелограмма**. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



2 способ. **Правило треугольника**. Возьмем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов.



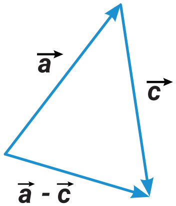
$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF}$$

При сложении векторов $\vec{a}\,(x_a, y_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b)$ получаем:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{c}\,(x_a + x_b, y_a + y_b)$

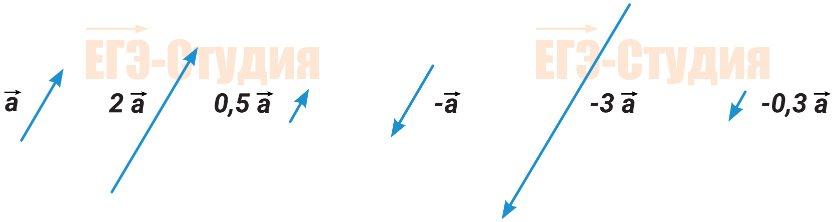
Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ - это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора - $\vec{c}$.



Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$.

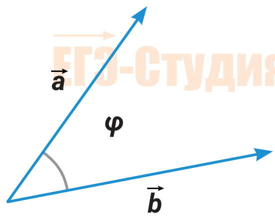
Он сонаправлен с вектором, если k больше нуля, и направлен противоположно, если k меньше нуля.



Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$



Скалярное произведение выражается через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b$$

Из формулы для скалярного произведения можно найти угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2}}$$

Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

Коллинеарность векторов.

Коллинеарными называются векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, коллинеарны, если существует такое число λ не равное нулю, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Полезные факты для решения задач ЕГЭ по геометрии

Углы, треугольники, четырехугольники

1. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.
2. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.
3. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.
4. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.
5. Площадь любого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.
6. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.
7. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали – полусумме оснований.
8. Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на однойпрямой.

Окружности

9. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
10. Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.
11. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.
12. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.
13. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.
14. Теорема о касательной и секущей. Если из одной точки к окружности проведены секущая и касательная, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной.
15. Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.
16. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.
17. Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

18. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, равен $\frac{1}{2}(a+b-c)$.

19. Точка касания окружностей лежит на прямой, соединяющей их центры.

20. Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

21. Если расстояние между центрами окружностей радиусами R и r равно a и $a > R + r$, то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$ и $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$

22. Если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна ***180*** градусов.

23. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы длин его противоположных сторон равны.

24. Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна ее средней линии.

25. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом (угол $AMB = 90$ градусов), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

26. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей с общей хордой AB, без точек A и B.

27. Если M – точка касания со стороной AC окружности, вписанной в треугольник ABC, то $AM = p - BC$, где p – полупериметр треугольника ABC.

28. Если окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC, то расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC.

29. Если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L, M, а угол BAC равен φ, то угол KLM равен $90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

30. Если прямые, проходящие через точку A, касаются окружности S в точках B и C, то центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на окружности S.

31. Если AM и CK – высоты треугольника ABC, то треугольник MBK подобен треугольнику ABC, причем коэффициент подобия равен $|\cos B|$.

32. Если площадь треугольника равна S, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}S$.

При составлении списка полезных фактов использованы учебные пособия ***Р. К. Гордина.***

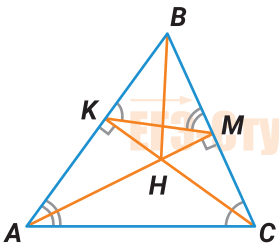


Схема 1. В треугольнике ***ABC*** проведены высоты ***AM*** и ***CK***.
H – точка пересечения высот треугольника (ортоцентр), $H = AM \cap CK$

$\triangle MBK \sim \triangle ABC$, $k = |\cos B|$
Четырехугольник ***AKMC*** можно вписать в окружность.
Четырехугольник ***BKMH*** можно вписать в окружность.
Радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ***ABC***, ***AHC***, ***BHC*** и ***ABH***, равны.
$BH = 2R\,|\cos B|$,где ***R*** – радиус описанной окружности $\triangle ABC$.

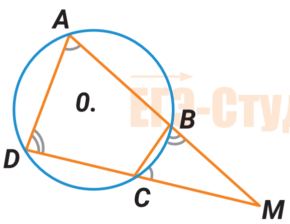


Схема 2. Пусть луч ***MA*** пересекает окружность в точках ***A*** и ***B***, а луч ***MD*** – в точках ***C*** и ***D***, причем $MA > MB$, $MD > MC$. Тогда треугольники ***BMC*** и ***DMA*** подобны.

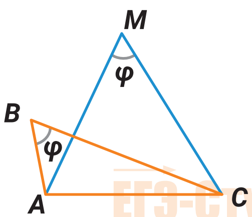


Схема 3. У треугольников ***ABC*** и ***AMC*** сторона ***AC*** – общая, угол ***B*** равен углу ***M***. Тогда точки ***A***, ***B***, ***C***, ***M*** лежат на одной окружности.

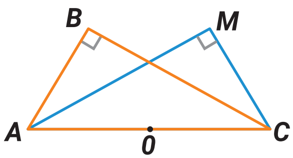
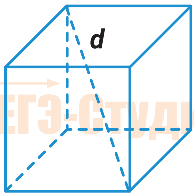
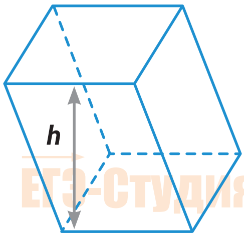
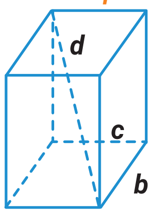
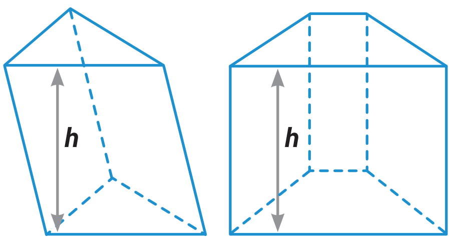


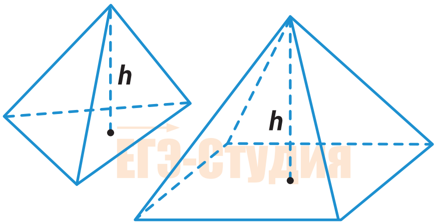
Схема 4. У треугольников ***ABC*** и ***AMC*** сторона ***AC*** – общая, углы ***B*** и ***M*** – прямые. Тогда точки ***A, B, C, M*** лежат на окружности, радиус которой равен половине ***AC***.

Стереометрия на ЕГЭ по математике. Основные формулы

Многогранники	**Объем и площадь поверхности**
Куб  $d = a\sqrt{3}$ - длина диагонали	$V = a^3$ $S = 6a^2$ a – ребро куба
Параллелепипед 	$V = S_{осн} \cdot h$ $S_{осн}$ - площадь основания h - высота Площадь поверхности паралле-лепипеда равна сумме площадей всех его граней
Прямоугольный параллелепипед  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ - длина диагонали	$V = a \cdot b \cdot c$ $S = 2ab + 2bc + 2ac$
Призма 	$V = S_{осн} \cdot h$ $S = 2S_{осн} + S_{бок}$

<table>
<tr><th>Многогранники</th><th>Объем и площадь поверхности</th></tr>
<tr><td>

Пирамида



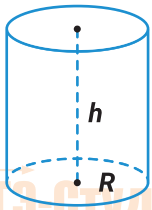
</td><td>

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$

$S = S_{осн} + S_{бок}$

</td></tr>
<tr><th>Тела вращения</th><th>Объем и площадь поверхности</th></tr>
<tr><td>

Цилиндр



h - высота цилиндра.

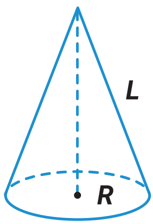
</td><td>

$V = \pi R^2 \cdot h$

$S = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\,\pi R^2 + 2\pi Rh$

</td></tr>
<tr><td>

Конус



$L = \sqrt{R^2 + h^2}$ - образующая

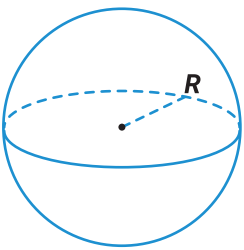
</td><td>

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$

$S = S_{осн} + S_{бок} = \pi R^2 + \pi RL$

</td></tr>
<tr><td>

Шар



</td><td>

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

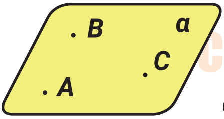
$S = 4\pi R^2$

</td></tr>
</table>

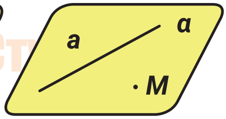
Основные понятия стереометрии

Плоскости в пространстве

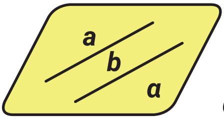
Плоскость в пространстве можно провести:



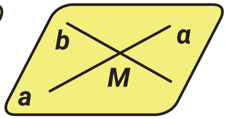
1. Через три точки не лежащие на одной прямой



2. Через прямую, и не лежащую на ней точку

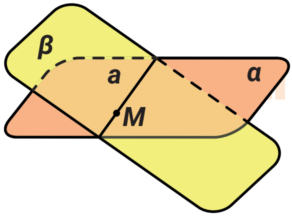


3. Через две параллельные прямые

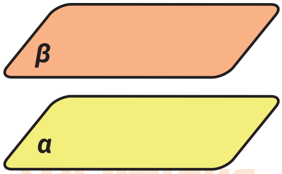


4. Через две пересекающиеся прямые

Плоскости в пространстве могут быть параллельными или пересекаться.

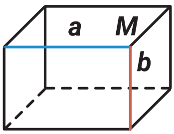


Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой



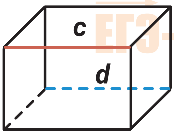
Если 2 плоскости не имеют общих точек, то они параллельны друг другу

Расположение прямых в пространстве, три случая:



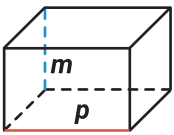
Пересекаются

$a \cap b = M$



Параллельны

$c \parallel d$



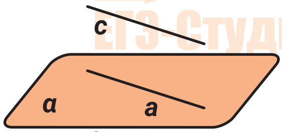
Скрещиваются

$m \dot{-} p$

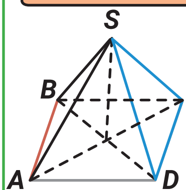
Параллельность прямой и плоскости

Определение: Прямая параллельна плоскости, если она не имеет с плоскостью общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости: Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой либо прямой, лежащей в плоскости



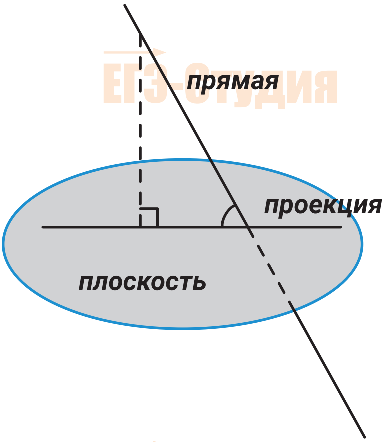
$\left.\begin{matrix} c \parallel a \\ a \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \parallel \alpha$



$\left.\begin{matrix} AB \parallel CD \\ CD \in (SCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \parallel (SCD)$

Угол между прямой и плоскостью

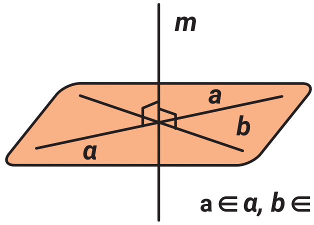
Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на плоскость.



Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение: Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

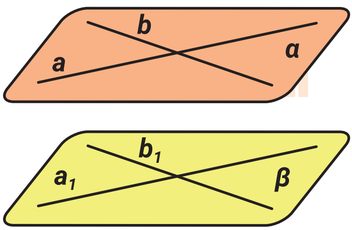


$$\left.\begin{array}{l} a \in \alpha,\ b \in \alpha \\ m \perp a \\ m \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow m \perp \alpha$$

Признак параллельности плоскостей

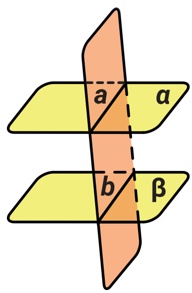
Определение: Плоскости параллельны, если они не имеют общих точек.

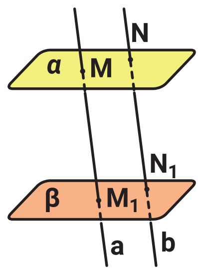
Признак параллельности плоскостей: Плоскости α и β параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.



$$\left.\begin{array}{l} a \parallel a_1 \\ a \parallel a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

Свойства параллельных плоскостей



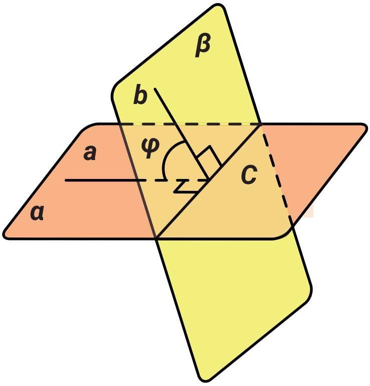


$$\left.\begin{array}{l} \varphi \cap \alpha \\ \varphi \cap a \\ \alpha \parallel \beta \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны.

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями равны.

Угол между плоскостями



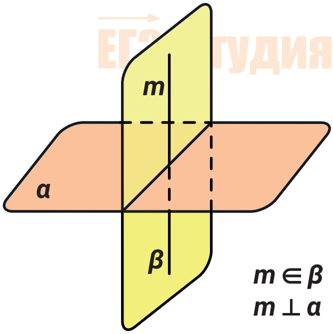
φ – угол между плоскостями α и β.

Угол между плоскостями — это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.

Перпендикулярность плоскостей

Определение: Две плоскости перпендикулярны, если угол между ними равен $90°$.

Признак перпендикулярности плоскостей.



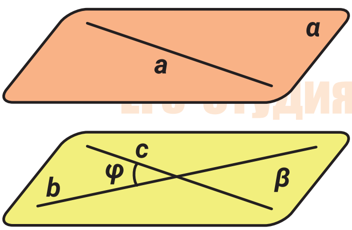
$$\left.\begin{matrix} m \in \beta \\ m \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Если плоскость α проходит через перпендикуляр к плоскости β, то плоскости α и β перпендикулярны.

Расстояние от точки до плоскости - это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Угол между скрещивающимися прямыми

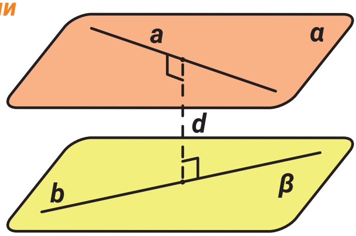
Угол между скрещивающимися прямыми равен углу между параллельными им прямыми, лежащими в одной плоскости.



$a \in \alpha$
$b \in \beta$
$\alpha \parallel \beta$

Прямые a и b – скрещиваются,
Проведем в плоскости β прямую $c \parallel a$.
Угол φ между b и c равен углу между a и b.

Расстояние между скрещивающимися прямыми



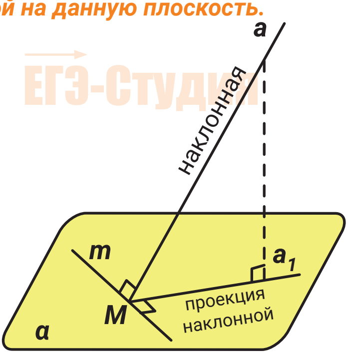
Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Другими словами, оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые.

Можно сказать, что оно равно расстоянию от одной из этих прямых до параллельной ей плоскости, в которой лежит другая прямая.

Теорема о трех перпендикулярах

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.



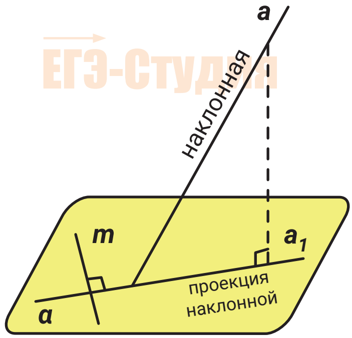
$m \in \alpha$

a – наклонная

a_1 – проекция наклонной на плоскость α

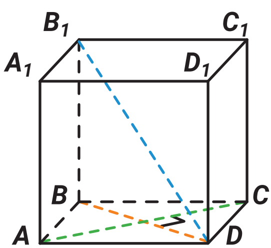
$m \perp a \Leftrightarrow m \perp a_1$

Теорема о трех перпендикулярах выполняется и в этом случае:



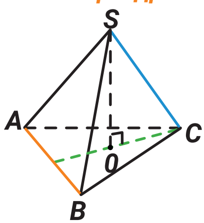
Теорема о трёх перпендикулярах в задачах

В кубе:



$BD \perp AB \Rightarrow B_1D \perp AC$

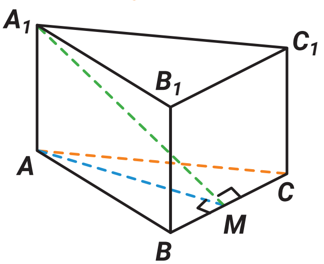
В правильном тетраэдре SABC:



OC – проекция SC на плоскость ABC.

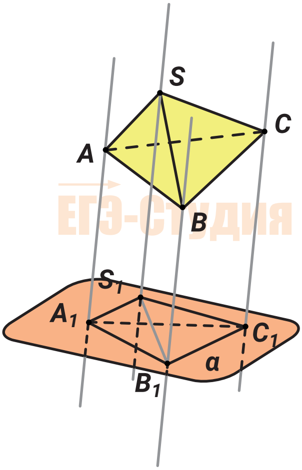
$OC \perp AB \Rightarrow SC \perp AB$

В правильной треугольной призме:



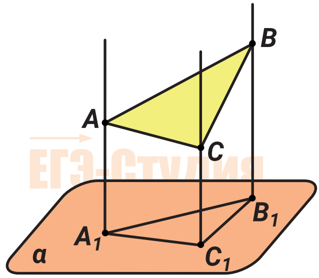
$AM \perp BC => A_1M \perp BC$

Параллельное проецирование



α – плоскость проекции

Площадь прямоугольной проекции фигуры

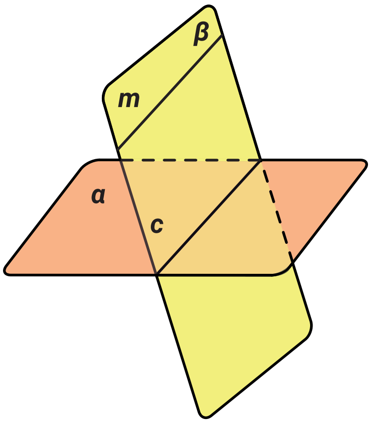


$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$$

Площадь прямоугольной проекции фигуры равна произведению площади фигуры на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции.

Теорема о прямой и параллельной ей плоскости:

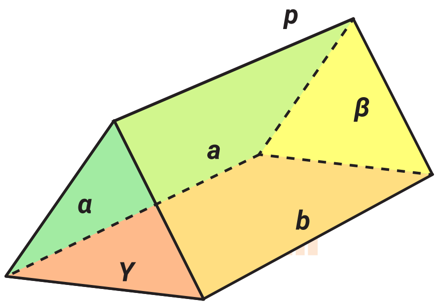
Пусть прямая ***m*** параллельна плоскости ***α***. Если плоскость ***β*** проходит через прямую ***m*** и пересекает плоскость ***α*** по прямой ***c***, то ***c*** параллельна ***m***.



$$\left.\begin{array}{r} m \parallel \alpha \\ m \in \beta \\ \beta \cap \alpha = c \end{array}\right\} \Rightarrow c \parallel m$$

Теорема. Пусть плоскости ***α*** и ***β*** пересекаются по прямой ***p***. Плоскость ***γ*** параллельна прямой ***p***. Тогда она пересекает плоскости ***α*** и ***β*** по прямым, параллельным ***p***.

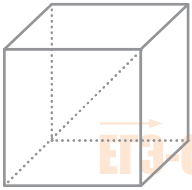
a || b || p



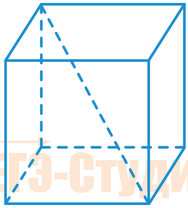
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = p \\ p \parallel \gamma \\ \beta \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b \parallel p$$

Чертежи в задачах по стереометрии

Куб

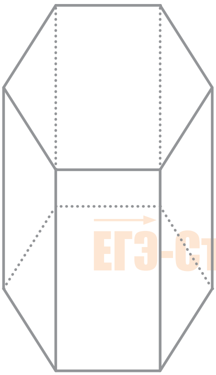


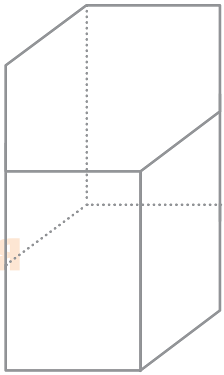
Неудачно.
Главная диагональ и боковые ребра оказались на одной линии.

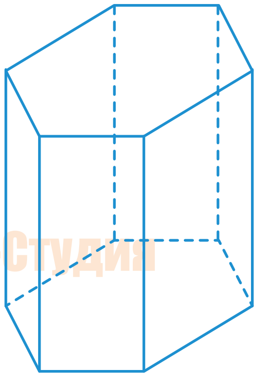


OK

Шестигранная призма





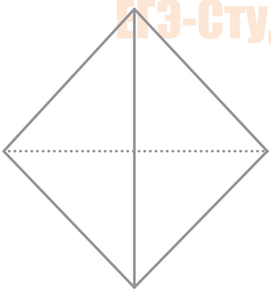


Неудачно. Нарушены правила параллельного проецирования. Ребра передней и задней грани оказались на одной линии

Неудачно. Стороны основания и боковые ребра оказались на одной линии

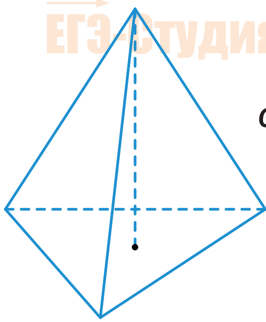
OK

Тетраэдр



Неудачно.

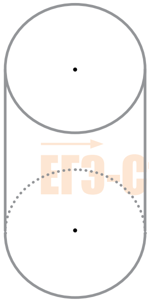
Рисунок стал «плоским».



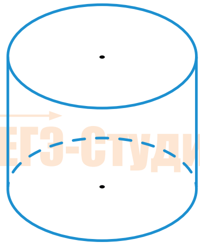
OK

Чертежи в задачах по стереометрии

Цилиндр

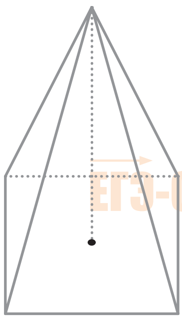


Неудачно.
Нарушены правила параллельного проецирования.

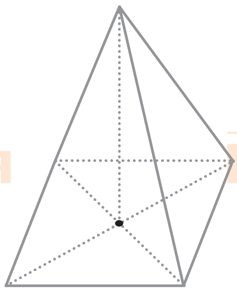


OK

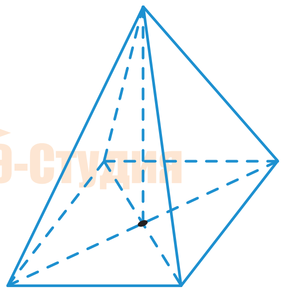
Правильная четырехугольная призма



Неудачно.
Нарушены правила параллельного проецирования



Неудачно.
Левая боковая грань не видна.



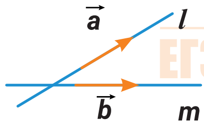
OK

1. Строим чертеж ручкой (не карандашом!), с помощью линейки. Линейкой на ЕГЭ по математике пользоваться можно и нужно.
2. Невидимые элементы объемного тела изображаем штриховыми линиями.
3. Объемное тело на вашем чертеже должно выглядеть действительно объемным. Все значимые элементы – хорошо видимыми.
4. Если чертеж вам не нравится, рисуйте другой.

Стереометрия. Векторы и координаты

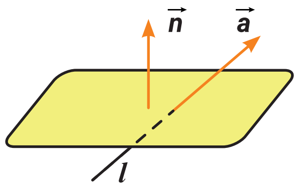
Скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

Угол между прямыми:



$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Угол между прямой и плоскостью:



$$\sin\varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$\vec{n}$ - нормаль к плоскости

Угол между плоскостями: $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ $\quad \vec{n}_1, \vec{n}_2$ - нормали

Уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$\vec{n}\,(A, B, C)$ - нормаль к плоскости

Расстояние от точки до плоскости

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

где x_0, y_0, z_0 - нормаль к плоскости

Векторы в пространстве

Вектор в пространстве можно задать тремя координатами: $\vec{a}\ (x_a; y_a; z_a)$

Координаты вектора в пространстве: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

Длина вектора в пространстве:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Сумма векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}\ (x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$$

Разность векторов:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}\ (x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b)$$

Произведение вектора на число:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{p}\ (\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a)$$

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

Косинус угла между векторами:

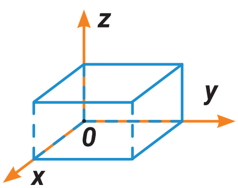
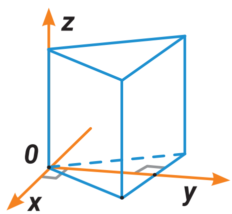
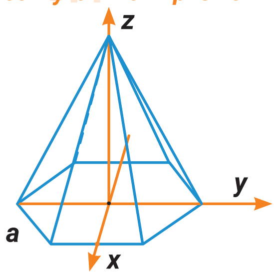
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

Компланарность векторов.

Компланарными называются векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, компланарны, если существуют такие числа m и n, не равные нулю одновременно, что $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

Координатный метод решения задач по стереометрии

Как расположить прямоугольную систему координат?		
В прямоугольном параллелепипеде 	***В правильной треугольной призме*** 	***В правильной шестиугольной призме*** 

Две схемы решения задач на кредиты и вклады

1. Выплаты кредита равными платежами (аннуитет).

Применяется также, когда известны платежи.

Пусть S – сумма кредита, n – количество платежных периодов, p – процент по кредиту, начисляемый банком. Коэффициент $k = 1 + \frac{p}{100}$ показывает, во сколько раз увеличивается сумма долга после начисления процентов.

Схема погашения кредита:

$$(((S \cdot k - X) \cdot k - X) \cdot k - X)\ldots \cdot k - X=0$$

X – очередная выплата,

n – число платежных периодов.

Раскроем скобки:

$$S \cdot k^n - X\,(k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots k^2 + k + 1) = 0$$

Применяем формулу суммы геометрической прогрессии. Получим:

$$S \cdot k^n - X \cdot \frac{k^n-1}{k-1} = 0.$$

ПРИМЕР 31 декабря Маша берет в кредит ***364 000 рублей*** под ***20%*** годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на ***20%***), затем Маша переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Маша выплатила долг тремя равными ежегодными платежами?

Пусть

S = 364 000 рублей; $p = 20\%$; X – сумма ежегодного платежа; $k = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}2$.

$$Sk^3 - X(k^2 + k + 1) = 0;$$

$$X = \frac{S \cdot k^3}{k^2+k+1} = \frac{364\,000 \cdot 1{,}2^3}{1{,}2^2 + 1{,}2 + 1} = \frac{364\,000 \cdot 1{,}728}{3{,}64} = 172\,800$$ рублей – сумма ежегодного платежа.

2. Равномерное уменьшение суммы долга (схема с дифференцированными платежами). Применяется также, когда известно, как уменьшается сумма долга.

Пусть S – сумма кредита, n – количество платежных периодов, p – процент по кредиту, начисляемый банком. Коэффициент $k = 1 + \frac{p}{100}$ показывает, во сколько раз увеличивается сумма долга после начисления процентов.

Схема погашения кредита для n платежных периодов.

$$S \to S\cdot k \xrightarrow{\text{1 выплата}} S\cdot\frac{n-1}{n} \to S\cdot k\cdot\frac{n-1}{n} \xrightarrow{\text{2 выплата}} S\cdot\frac{n-2}{n} \;\dots\; \dots \; S\cdot\frac{1}{n} \to S\cdot k\cdot\frac{1}{n} \xrightarrow{\text{последняя выплата}} 0$$

n – число платежных периодов.

1 выплата: $Z_1 = S\cdot k - S\cdot\frac{n-1}{n}$

2 выплата: $Z_2 = S\cdot\frac{n-1}{n}\cdot k - S\cdot\frac{n-2}{n}$

n-ная выплата: $Z_n = S\cdot\frac{1}{n}\cdot k$

Сумма всех выплат: $Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n =$

$$=S\cdot k\left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

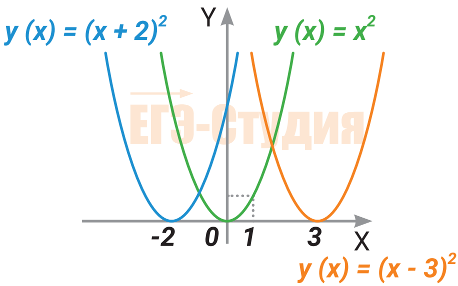
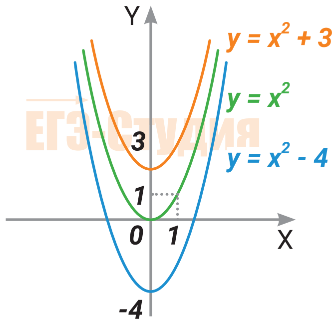
Применяем формулу суммы арифметической прогрессии. Общая сумма выплат:

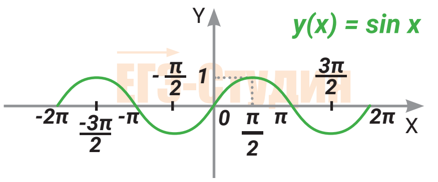
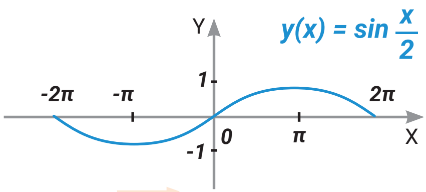
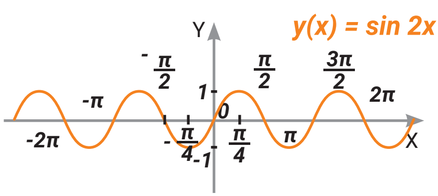
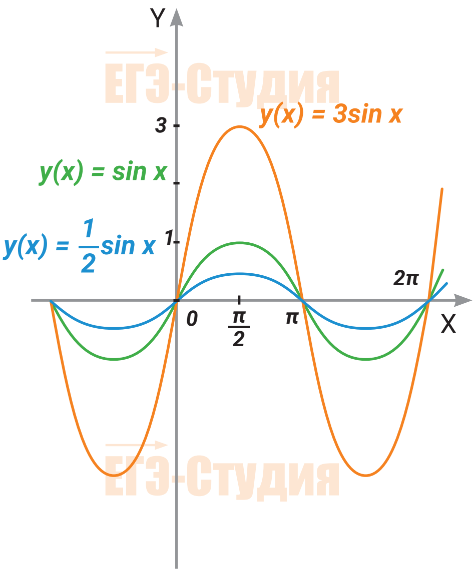
$Z = S\cdot k\cdot\frac{n+1}{2} - S\cdot\frac{n-1}{2} = S + S\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{p}{100} = S + П$, где

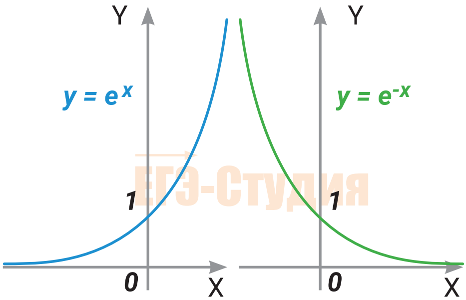
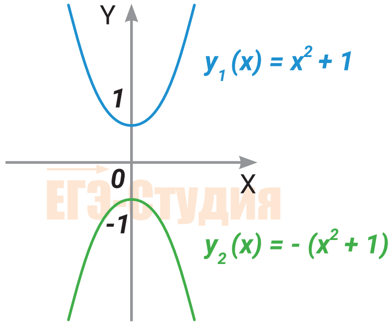
$П$ - величина переплаты,

$$П = S\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{p}{100}$$

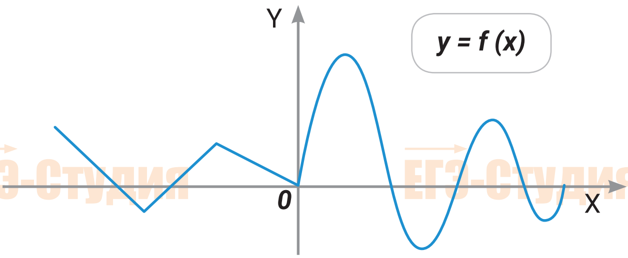
Преобразование графиков функций.

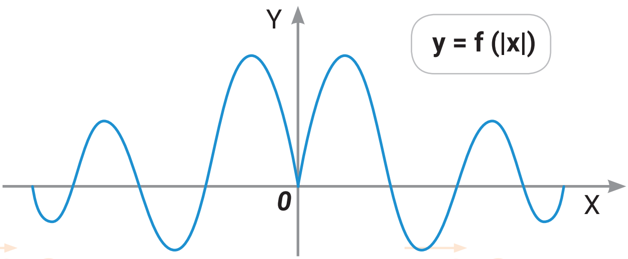
Сдвиг по горизонтали	Сдвиг по вертикали
	

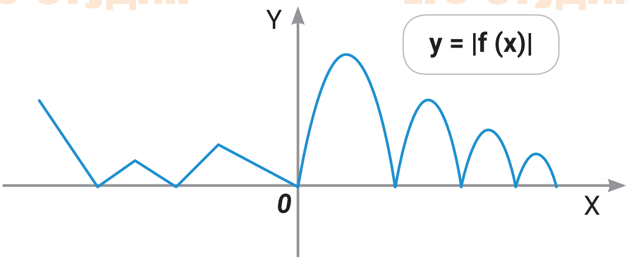
Растяжение (сжатие) по горизонтали	Растяжение (сжатие) по вертикали
  	

Отражение по горизонтали: $y = f(-x)$	Отражение по вертикали: $y = -f(x)$
	

Графики функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$



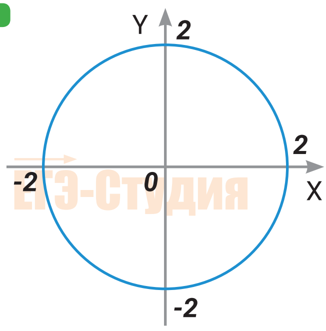




«Базовые элементы» для решения задач с параметрами.

1. Уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ задает окружность с центром в начале координат и радиусом |**R**|.

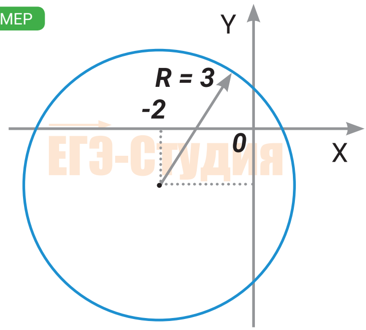
ПРИМЕР



$x^2 + y^2 = 4$

2. Уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ задает окружность с центром в точке $(a;b)$ и радиусом |**R**|.

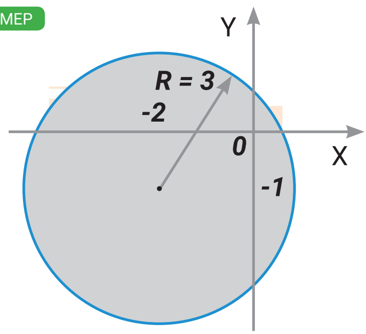
ПРИМЕР



$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

3. Неравенство $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ задает круг вместе с границей.

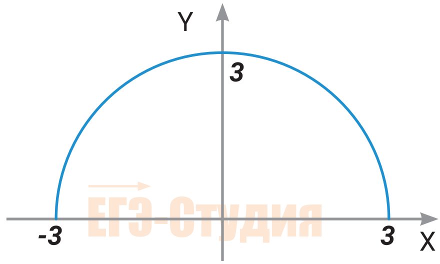
ПРИМЕР



$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 9$

4. Уравнение $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ задает верхнюю полуокружность с центром в начале координат и радиусом |**R**|.

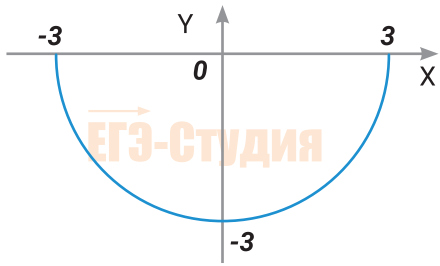
ПРИМЕР



$y = \sqrt{9 - x^2}$

5. Уравнение $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ задает нижнюю полуокружность с центром в начале координат и радиусом |**R**|.

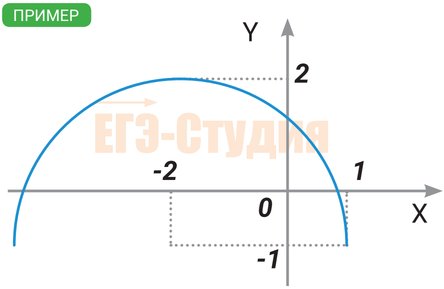
ПРИМЕР



$y = -\sqrt{9 - x^2}$

6. Уравнение $y = \sqrt{(R^2 - (x\text{-}a)^2)} + b$ задает верхнюю полуокружность центром в точке $(a;\, b)$ и радиусом |**R**|.

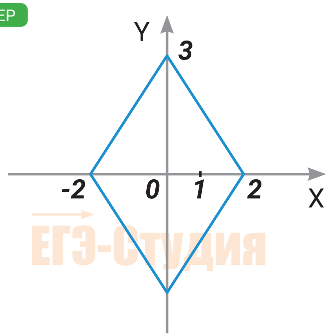
ПРИМЕР



$y = \sqrt{9 - (x+2)^2} - 1$

7. Уравнение $a|x| + b|y| = c$ при положительных a, b и c задает ромбик, симметричный относительно начала координат.

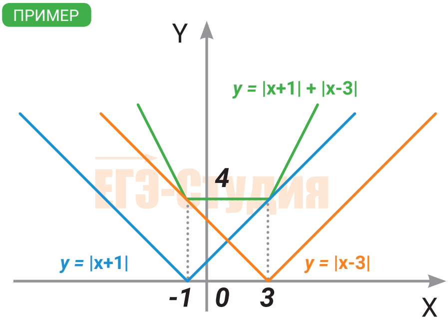
ПРИМЕР



$3|x| + 2|y| = 6$

8. Уравнение $y = |x+a| + |x+b|$ (сумма модулей)

ПРИМЕР



$y = |x+1| + |x-3|$

9. Расстояние между точками $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$ находится по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

Координаты середины M отрезка AB находятся по формуле:

$$X_M = \frac{x_1 + x_2}{2};\ Y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Уравнение отрезка [MN], концы отрезка M (a;b) и N (c;d).

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$$

Пара чисел $(x; y)$ соответствует координатам любой точки этого отрезка.