МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Единый Государственный Экзамен

Готовимся к итоговой аттестации

#ЕГЭучебник2021

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Ященко,
И. Р. Высоцкий, П. И. Захаров

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ГОТОВИМСЯ К ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Под общей редакцией научного руководителя Центра педагогического мастерства
Ященко И. В.

В сборнике использованы задачи, предложенные
И. Р. Высоцким, Д. Д. Гущиным, П. И. Захаровым, М. А. Посицельской, С. Е. Посицельским,
А. В. Семеновым, В. А. Смирновым, А. С. Трепалиным, С. А. Шестаковым, Д. Э. Шнолем,
И. В. Ященко

Семенов, А. В.

Данное пособие предназначено для подготовки к Единому государственному экзамену по математике профильного уровня. Издание включает типовые задания по всем содержательным линиям экзаменационной работы, а также 30 тренировочных вариантов в формате ЕГЭ 2021 года.

Пособие поможет школьникам проверить свои знания и умения по предмету, а учителям — оценить степень достижения требований образовательных стандартов отдельными учащимися и обеспечить их целенаправленную подготовку к экзамену.

ВВЕДЕНИЕ

Государственная итоговая аттестация по математике в форме Единого государственного экзамена с 2015 года проводится на базовом и профильном уровнях. Содержание заданий с кратким ответом контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена базового и профильного уровней в 2021 году не будут принципиально отличаться от содержания соответствующих вариантов 2020 года. С окончательной структурой варианта можно ознакомиться на сайте Федерального института педагогических измерений (www.fipi.ru) в разделе «ЕГЭ: демоверсии, спецификации, кодификаторы». В рамках спецификации продолжается расширение тематики задач, особенно это касается геометрической части экзамена, а также заданий по началам математического анализа. Указанные изменения нашли свое отражение в книге, которую вы держите в руках.

В контрольных измерительных материалах единого государственного экзамена на профильном уровне задания с кратким ответом проверяют уровень освоения ФГОС на базовом и повышенном уровнях. В первой части задания с кратким ответом даются на базовом уровне сложности, а во второй части задания с кратким ответом даются уже на повышенном уровне сложности. Основной акцент в большей части таких заданий сделан на проверку освоения математических компетенций (в первую очередь на применение математических знаний к решению практических задач). Ответом ко всем заданиям с кратким ответом должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Эти ответы нужно записывать в Бланке ответов № 1 в соответствии с прилагаемой инструкцией заполнения бланка. Особенностью проверки правильности выполнения таких задач является проверка только ответов (решения не проверяются). Все задания с кратким ответом берутся из открытого банка заданий ЕГЭ Федерального института педагогических измерений. Большой банк математических задач, из которого формируется банк ФИПИ, содержится на сайте www.mathege.ru.

Вторая часть варианта экзамена по математике содержит задания повышенного и высокого уровней сложности и предназначается прежде всего для дифференциации по уровню подготовки будущих абитуриентов. Задания с кратким ответом второй части проверяют профильный уровень математической подготовки. Задания с развернутым ответом проверяют уровень освоения ФГОС на повышенном уровне. Все решения заданий с развернутым ответом должны быть записаны в Бланке ответом № 2 (дополнительном бланке ответов № 2). Обоснованность и полноту решения этих заданий устанавливают эксперты и выставляют баллы в соответствии с Критериями оценивания заданий с развернутым ответом (демонстрационный вариант ЕГЭ по математике на сайте ФИПИ).

В контрольных измерительных материалах единого государственного экзамена на базовом уровне задания проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, умение анализировать информацию, представленную на графиках и в таблицах, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В экзаменационную работу включены задания базового уровня по всем основным предметным разделам: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика.

Учебное пособие «Математика. Профильный уровень. ЕГЭ. Готовимся к итоговой аттестации» создан на основе Открытого банка заданий по математике профильного уровня и Открытого банка заданий по математике базового уровня. Использование пособия «Математика. Профильный уровень. ЕГЭ. Готовимся к итоговой аттестации» позволяет выпускникам и учителям заранее выбрать уровень итоговой аттестации, осуществлять диагностику проблемных зон, эффективно встраивать стратегию и тактику итогового повторения и подготовку к экзамену.

Опыт проведения экзамена с использованием открытого банка заданий по математике в 2010—2020 годах показывает, что наименее эффективны, к сожалению, наиболее популярные стратегии подготовки — прорешивать, начиная с сентября месяца, подряд все задания открытого банка (в котором более 50 000 математических заданий) или прорешивать имеющиеся в большом количестве варианты, аналогичные демонстрационному варианту ЕГЭ (либо из опубликованных пособий, либо составленные с использованием открытого банка).

Залог успеха на экзамене — регулярные занятия математикой в течение всего периода обучения в школе, своевременное выявление и ликвидация возникающих (неизбежно!) проблем. Поэтому настоящая книга позволит учителю включать задания, аналогичные заданиям ЕГЭ, в текущий учебный процесс, начиная с 6 класса.

Учителя и учащиеся при организации итогового повторения и подготовки к экзамену с помощью этой книги имеют возможность повторить задания основных тем курсов алгебра, алгебры и начал математического анализ, геометрии, теории вероятностей и статистики.

Авторы пособия много лет анализируют выполнение заданий экзамена и «вынуждены» рекомендовать определенные подготовительные задания, те задания, которые в явном виде и не даются на экзамене, но без правильного выполнения таких простых заданий нельзя получить правильный ответ в более сложных экзаменационных заданиях.

Раздел «Алгебра» включает в себя задания на рациональные, иррациональные, степенные, тригонометрические и логарифмические уравнения и выражения.

В пункт «Рациональные уравнения и выражения» собраны задания с разных позиций варианта, есть и подготовительные задания: линейные уравнения, простейшие дробно-рациональные уравнения, квадратные — это те уравнения, в которых участники экзамена допускают много ошибок. В этом пункте присутствуют задания на вычисление по формулам, традиционные текстовые задачи на совместную работу, движение, проценты, концентрацию растворов и сплавов.

В пункт «Иррациональные уравнения и выражения» собраны задания с разных позиций варианта, но объединяет эти задания наличие радикала (корня). В начале пункта даются задания на преобразование числовых выражений, содержащих корень, в таких вычислениях делается много ошибок участниками экзамена. Авторы рекомендуют при выполнении этих заданий не прибегать к помощи калькулятора, поскольку на экзамене использование калькулятора не предусмотрено. Очень много досадных ошибок допускается в простейших иррациональных уравнениях, поэтому таких уравнений в пособии дается много. Задания на вычисления по формулам, содержащих радикал, также включены в этот пункт.

В пункт «Степенные уравнения и выражения» собраны задания с разных позиций варианта. В начале пункта дается большое количество заданий на преобразование числовых выражений, содержащих степень. Простейшие показательные уравнения есть в вариантах экзамена, поэтому таких уравнений в пособии дается много. Задания на вычисления по формулам, содержащих степень, также включены в этот пункт.

В пункт «Тригонометрические уравнения и выражения» собраны задания с разных позиций варианта, но объединяет эти задания наличие тригонометрических функций. В начале пункта даются задания на нахождение по одной тригонометрической функции других тригонометрических функций, в пособии дается очень большое количество заданий на преобразование тригонометрических выражений с использованием основного тригонометрического тождества, формул приведения, тригонометрических формул двойного угла, знание табличных значений тригонометрических функций. В этот пункт включены также простейшие тригонометрические уравнения, без правильного решения которых нельзя получить правильный ответ в заданиях повышенного уровня. Задания на вычисления по формулам, содержащих тригонометрические функции, также включены в этот пункт.

В пункт «Логарифмические уравнения и выражения» собраны задания с разных позиций варианта, но объединяет эти задания наличие логарифма. В начале пункта даются задания на нахождение значений выражений, содержащих логарифм. Задания подобраны так, чтобы учащийся с помощью этого банка заданий имел возможность повторить все свойства логарифмов. В этот пункт включены также простейшие логарифмические уравнения, без правильного решения которых нельзя получить правильный ответ в заданиях повышенного и высокого уровней. Задания на вычисления по формулам, содержащих логарифм, также включены в этот пункт.

Раздел «Практико-ориентированные задачи» включают в себя текстовые задачи, задания на диаграммы и графики зависимостей, а так же задания курса «Теория вероятностей и статистика».

В пункт «Текстовые задачи» собраны задания с разных позиций варианта. Для решения задач этого пункта не нужно составлять уравнений, чаще всего эти задачи решаются по действиям, иногда устно. Это задачи, в которых нужно посчитать плату за электроэнергию по показаниям счётчика, посчитать сдачу, которую должен получить покупатель, рассчитать наиболее выгодный тарифный план и т.д. Прежде всего, это задания на вычисления, которые возникают в различных реальных ситуациях.

В пункт «Графики и диаграммы» включены задания на чтение диаграмм. В этом пункте даны диаграммы выпадения осадков, температур, различных курсов денежных единиц, цен металлов, нефти. По этим диаграммам нужно ответить на разного рода вопросы. Казалось бы, что может быть проще, но на экзамене каждый десятый выпускник не дает верного ответа на эти простые вопросы.

В пункте «Вероятность» собрано большое количество заданий, в которых нужно вычислить вероятность наступления или не наступления события. Наряду с простыми заданиями в этот пункт включены и сложные задания.

Раздел «Геометрия» включает в себя задания стереометрии и задания планиметрии, разбитые по темам: длины, углы, тригонометрия, площади.

В пункте «Длины» собрано большое количество заданий, в которых нужно вычислить длину отрезка. Это может быть и треугольник, и четырёхугольник. В этот пункт включено много подготовительных задач — простых планиметрических задач на какой-то один геометрический факт. Для решения таких заданий авторы рекомендуют обязательно сделать рисунок. Иногда такие задания можно решать практически устно, применяя известные соотношения, иногда для решения задачи нужно составить уравнение или систему уравнений. Наряду с простыми заданиями в этот пункт включены и сложные задания.

В пункте «Углы» собрано большое количество заданий, в которых нужно вычислить величину угла. Это может быть и угол в треугольнике или в четырёхугольнике, и вписанный или центральный угол. В этот пункт также включено много подготовительных задач — простых планиметрических задач на какой-то один геометрический факт. Для решения таких заданий авторы рекомендуют обязательно сделать рисунок. Иногда такие задания можно решать практически устно, применяя известные соотношения, иногда для решения задачи нужно составить уравнение. Наряду с простыми заданиями в этот пункт включены и сложные задания.

Практически все задания пункта «Тригонометрия» носят подготовительный характер, потому что авторы специально большое количество заданий на тригонометрические соотношения дали для прямоугольного треугольника в качестве важного повторения.

В пункте «Площади» собрано большое количество заданий, в которых нужно вычислить площадь фигуры. Это может быть и площадь треугольника, и площадь четырёхугольника (параллелограмма, трапеции), и площадь круга. Наряду с классическими задачами на эту тему в пункт включено большое количество геометрических задач на «клеточках» или в декартовой системе координат.

В пункте «Стереометрия» собрано большое количество заданий, в которых нужно решить стереометрическую задачу. Это может быть и расстояние между вершинами многогранника, и длина ребра прямоугольного параллелепипеда, и высота правильной пирамиды, и площадь полной поверхности многогранника, и объём части конуса и т.д. В основном в этот пункт включены задания базового уровня сложности.

Раздел «Начала математического анализа» включает задания на геометрический и физический смысл производной, технику дифференцирования и исследование функций, нахождение первообразной и применение первообразной для нахождения площади фигуры.

В пункте «Геометрический и физический смысл производной» собрано большое количество заданий. В пункте есть классические задания на уравнение касательной, а есть и задания, когда по графикам функции и касательной нужно вычислить значение производной в точке. В этот пункт также включено большое количество заданий на рисунках: по графику производной указать какие-то свойства функции или по графику функции ответить на вопросы про производную этой функции.

Практически все задания пункта «Техника дифференцирования» носят подготовительный характер, потому что авторы специально дали большое количество заданий на нахождение производной различных функций. Для выполнения этих заданий потребуется знание табличных производных и правил дифференцирования.

В пункте «Исследование функций» собрано большое количество заданий. В этот пункт включено большое количество заданий на рисунках: по графику производной указать какие-то свойства функции (точка экстремума, скорость изменения) или по графику функции ответить на вопросы про производную этой функции. В этом пункте есть большое количество классических задач на нахождение точек экстремума (локального), наибольшего или наименьшего значения функции на заданном отрезке.

В пункте «Первообразная» даны задания, в которых есть понятие «первообразная». В этот пункт включены задания на рисунках: по графику одной из первообразных указать какие-то свойства функции или по графику функции вычислить площадь фигуры или приращение первообразной. В этом пункте также даны классические задачи на первообразную базового уровня сложности.

Раздел «Задачи повышенной сложности» дает представления (не претендуя на полноту) о заданиях повышенного и высокого уровня сложности с развернутым ответом: тригонометрические уравнения, системы неравенств, уравнения и неравенства с параметром, планиметрические и стереометрические задачи и задачи высокого уровня сложности по арифметике и алгебре.

В пункте «Тригонометрические уравнения» дается набор уравнений повышенного уровня сложности, сводящихся к решению тригонометрических уравнений. Для того, чтобы прийти к простейшему тригонометрическому уравнению, нужно решить сначала или квадратное уравнение, или иррациональное уравнение, или показательное уравнение, или логарифмическое. Задания этого пункта даны на языке экзамена: решить уравнение и найти корни этого уравнения, принадлежащие данному отрезку.

В пункте «Неравенства и системы неравенств» дается небольшой набор неравенств повышенного уровня сложности. Здесь есть и рациональные неравенства, и показательные, и логарифмические.

В пункте «Уравнения и неравенства с параметром» дается небольшой набор заданий с параметром высокого уровня сложности.

В пункте «Планиметрия» дается небольшой набор геометрических заданий повышенного уровня сложности. Задания этого пункта даны на языке экзамена: доказать геометрический факт и что-то вычислить.

В пункте «Стереометрия» дается небольшой набор геометрических заданий повышенного уровня сложности на нахождение расстояний от точки до прямой или плоскости, на нахождение угла между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями.

Основное назначение пункта «Арифметика и алгебра» — дать представление о задачах высокого уровня сложности.

В пункте «Экономические задачи» дается небольшой набор задач с экономическим содержанием.

Учебное пособие «Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации» содержит 30 тренировочных вариантов, аналогичных заданиям государственной итоговой аттестации по математике в форме ЕГЭ, вошедших в обновленный открытый банк заданий ФИПИ.

Предложенные тренировочные варианты помогут участнику экзамена выбрать свою стратегию сдачи экзамена. При решении тренировочных вариантов можно попробовать разные варианты планирования работы, обращая внимание на то, что условия работы должны быть такими же, как на экзамене: не допускается использование калькулятора, не следует отвлекаться в течение всего времени, отведенного на выполнение варианта. Перед выполнением заданий варианта обязательно прочитайте инструкцию (в пособии она дана). На экзамене (тренировке) следует пропускать те задания, которые на этапе подготовки, например, с помощью учебного пособия «Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации», вызывали затруднения, и выполнять их после того, как будут решены те задания, в решении которых уверены. Каждый участник экзамена во время выполнения заданий каждой части может выделить больше времени на те задачи, которые он может решить: более подготовленный, быстро решив простые задачи, имеет возможность сосредоточиться на более сложных (задания второй части в вариантах профильного уровня), а менее подготовленный сможет все время потратить на решение заданий базового уровня сложности (задания первой части).

Данный сборник позволяет учителю вести планомерную подготовку к итоговой аттестации по математике, включая задания сборника в классную и домашнюю работу. В основном одинаковые задания даются парами: одну задачу решили в классе, другую — дома.

Учащиеся имеют возможность самостоятельно выстраивать тактику подготовки к экзамену с использованием материалов данного издания, открытого банка математических заданий с опорой на школьные учебники.

Авторы выражают уверенность в том, что задания сборника позволят не только успешно подготовиться к экзамену, но и закрепить математические знания, которые пригодятся в обычной жизни и при продолжении образования.

1. АЛГЕБРА

1.1. Рациональные уравнения и выражения

1.1.1. Найдите корень уравнения $2-5x=11-2x$.

1.1.2. Найдите корень уравнения $-4(3-x)=2x+7$.

1.1.3. Найдите корень уравнения $\frac{7}{8}x=19\frac{1}{4}$.

1.1.4. Найдите корень уравнения $\frac{5}{9}x=-1\frac{2}{3}$.

1.1.5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{5x-5}=2$.

1.1.6. Найдите корень уравнения $\frac{1}{x-5}=\frac{1}{4}$.

1.1.7. Найдите корень уравнения $\frac{x-40}{x-4}=-5$.

1.1.8. Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x+2}=\frac{1}{3x-6}$.

1.1.9. Решите уравнение $\frac{2}{5}x^2=4{,}9$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.10. Решите уравнение $\frac{1}{11}x^2=9\frac{1}{11}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.11. Найдите корень уравнения $x^2-9x+14=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

1.1.12. Найдите корень уравнения $x^2-4x-45=0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

1.1.13. Решите уравнение $(2x-7)^2=(2x-1)^2$.

1.1.14. Найдите корень уравнения $(x-10)^2=(x+3)^2$.

1.1.15. Найдите корень уравнения $x^2-4=(x-2)^2$.

1.1.16. Найдите корень уравнения $x^2-5=(x+1)^2$.

1.1.17. Решите уравнение $(x-1)^2=-4x$.

1.1.18. Найдите корень уравнения $(x-2)^2=-8x$.

1.1.19. Решите уравнение $\frac{2}{x^2+1}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

1.1.20. Решите уравнение $\frac{19x}{x^2-5}=2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.21. Найдите корень уравнения $x=\frac{-x-10}{x+6}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

1.1.22. Найдите корень уравнения $x = \frac{-4x-7}{x-12}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

1.1.23. Найдите корень уравнения $\frac{10}{x^2-15} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.24. Найдите корень уравнения $\frac{8}{x^2-8} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.25. Найдите корень уравнения $\frac{x-4}{4x-1} = \frac{x-4}{3x-10}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.26. Найдите корень уравнения $\frac{x-8}{7x-2} = \frac{x-8}{6x-7}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.27. Найдите корень уравнения $(x+4)^9 = 512$.

1.1.28. Найдите корень уравнения $(x-7)^3 = -216$.

1.1.29. Решите уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

1.1.30. Решите уравнение $x^4 + x^2 - 2 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

1.1.31. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ (^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

1.1.32. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ (^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

1.1.33. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 110 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

1.1.34. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 100 - 4p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

1.1.35. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 500\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 300 000 руб.

1.1.36. Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 900\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 600 000 руб.

1.1.37. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние (в метрах), t — время падения (в секундах). До дождя время падения камешков составляло 1,2 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

1.1.38. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние (в метрах), t — время падения (в секундах). До дождя время падения камешков составляло 1 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

1.1.39. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}2 + 10t - 5t^2$, где h — высота (в метрах), t — время (в секундах), прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?

1.1.40. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2$, где h — высота (в метрах), t — время (в секундах), прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 4 метров?

1.1.41. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время (в минутах), $\omega = 75°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 10°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 2250°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

1.1.42. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время (в минутах), $\omega = 50°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 10°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1000°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

1.1.43. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 58$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 16$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 48 км от города. Ответ выразите в минутах.

1.1.44. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 55$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 2$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в 56 км от города. Ответ выразите в минутах.

1.1.45. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление электроприбора (в омах). В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 4 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

1.1.46. Сила тока в цепи I (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в вольтах), R — сопротивление электроприбора (в омах). В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 5 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

1.1.47. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 25$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление задаётся формулой $R_{общ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом. Ответ выразите в омах.

1.1.48. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 63$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление задаётся формулой $R_{общ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 36 Ом. Ответ выразите в омах.

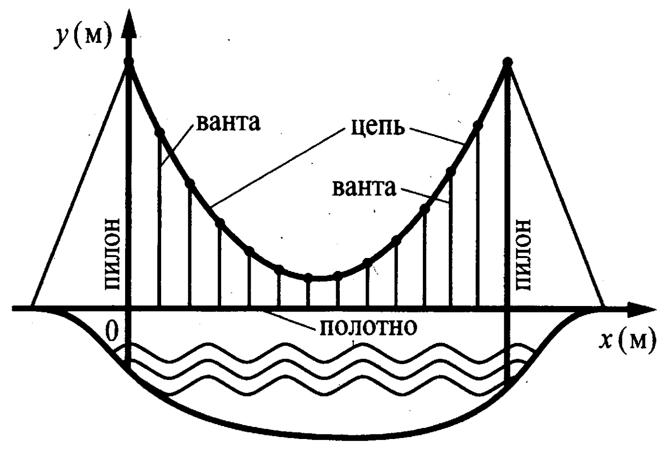
1.1.49. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 20%, если температура холодильника $T_2 = 320$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

1.1.50. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 65%, если температура холодильника $T_2 = 301$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

1.1.51. Зависимость температуры (в Кельвинах) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температур вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -50$ К/мин^2, $b = 400$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1750 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

1.1.52. Зависимость температуры (в Кельвинах) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температур вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 680$ К, $a = -16$ К/мин^2, $b = 224$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

1.1.53. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}0043x^2 - 0{,}8x + 42$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 90 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



1.1.54. На рисунке к задаче 1.1.29 изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}0013x^2 - 0{,}29x + 20$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 10 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

1.1.55. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \frac{(r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}})}{(K+1)^m}$, где $m = \frac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 7, их средняя оценка равна 0,32, а оценка экспертов равна 0,22.

1.1.56. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \frac{(r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}})}{(K+1)^m}$, где $m = \frac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 7, их средняя оценка равна 0,11, а оценка экспертов равна 0,15.

1.1.57. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 5. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вчетверо дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{3In + Op + 4Tr}{A}$. Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 1.

1.1.58. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель — целое число от 1 до 10. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вчетверо, а объективность — втрое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид $R = \frac{4In + Op + 3Tr}{A}$. Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 20.

1.1.59. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 3,6 км от места отправления. Один идёт со скоростью 3 км/ч, а другой — со скоростью 4,2 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в км.

1.1.60. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,4 км от места отправления. Один идёт со скоростью 3 км/ч, а другой — со скоростью 3,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в км.

1.1.61. Дорога между пунктами А и В состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 35 км. Путь из А в В занял у туриста 14 часов, из которых 7 часов ушло на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

1.1.62. Дорога между пунктами А и В состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 22 км. Путь из А в В занял у туриста 8 часов, из которых 3 часа ушло на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

1.1.63. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 200 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 10 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 10 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

1.1.64. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 162 км. На следующий день он отправился обратно в А со скоростью на 9 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 9 часов. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

1.1.65. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 42 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью на 28 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

1.1.66. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 36 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью на 24 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

1.1.67. Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

1.1.68. Два велосипедиста одновременно отправились в 165-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

1.1.69. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 513 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 23 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 54 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

1.1.70. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 336 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 5 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 48 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

1.1.71. Моторная лодка прошла против течения реки 117 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

1.1.72. Моторная лодка прошла против течения реки 247 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 16 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

1.1.73. На изготовление 27 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 54 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

1.1.74. На изготовление 572 деталей первый рабочий затрачивает на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 650 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

1.1.75. Заказ на изготовление 180 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 3 детали больше?

1.1.76. Заказ на изготовление 240 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 1 деталь больше?

1.1.77. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 4 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

1.1.78. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 9 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 5 дней выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

1.1.79. Плиточник должен уложить 168 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 2 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

1.1.80. Плиточник должен уложить 324 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 9 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 6 дней раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

1.1.81. Смешали некоторое количество 18-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 16-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.1.82. Смешали 3 литра 10-процентного водного раствора некоторого вещества с 12 литрами 40-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.1.83. Имеется два сплава. Первый содержит 5% никеля, второй — 25% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 250 кг, содержащий 20% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

1.1.84. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

1.1.85. Бригада маляров красит забор длиной 140 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 70 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

1.1.86. Рабочие прокладывают тоннель длиной 112 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 7 метров туннеля. Определите, сколько метров туннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 7 дней.

1.1.87. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 72 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 342 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 276 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 45 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

1.1.88. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 66 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 385 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 372 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

1.1.89. По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 60 км/ч и 40 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 350 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 18 секундам. Ответ дайте в метрах.

1.1.90. По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 60 км/ч и 30 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 400 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 38 секундам. Ответ дайте в метрах.

1.1.91. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 32 круга по кольцевой трассе протяжённостью 5,1 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 6 минут. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 51 минуту после старта? Ответ дайте в км/ч.

1.1.92. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 99 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 4 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 22 минуты. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 20 минут после старта? Ответ дайте в км/ч.

1.1.93. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 21 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 420 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

1.1.94. Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 40 км/ч, вторую треть — со скоростью 60 км/ч, а последнюю — со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

1.1.95. Петя и Митя выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 10 вопросов теста, а Митя— на 16. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Мити на 117 минут. Сколько вопросов содержит тест?

1.1.96. Коля и Митя выполняют одинаковый тест. Коля отвечает за час на 12 вопросов теста, а Митя— на 21. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Коля закончил свой тест позже Мити на 105 минут. Сколько вопросов содержит тест?

1.1.97. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 9 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

1.1.98. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 17 часов. Через 1 час после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

1.1.99. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 13 рабочих, а во второй — 23 рабочих. Через 3 дня после начала работы в первую бригаду перешли 20 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

1.1.100. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 9 рабочих, а во второй — 11 рабочих. Через 6 дней после начала работы в первую бригаду перешли 3 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

1.1.101. Один мастер может выполнить заказ за 28 часов, а другой — за 21 час. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

1.1.102. Первый насос наполняет бак за 30 минут, второй — за 48 минут, а третий — за 1 час 20 минут. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

1.1.103. Две трубы наполняют бассейн за 4 часа 30 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 18 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

1.1.104. Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

1.2. Иррациональные уравнения и выражения

1.2.1. Найдите значение выражения $\frac{(2\sqrt{2})^2}{2}$.

1.2.2. Найдите значение выражения $\frac{(3\sqrt{5})^2}{15}$.

1.2.3. Найдите значение выражения $\sqrt{34^2-30^2}$.

1.2.4. Найдите значение выражения $\sqrt{233^2-208^2}$.

1.2.5. Найдите значение выражения $(\sqrt{32}-\sqrt{18})\cdot\sqrt{8}$.

1.2.6. Найдите значение выражения $(\sqrt{27}-\sqrt{48})\cdot\sqrt{12}$.

1.2.7. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{4,8}\cdot\sqrt{1,8}}{\sqrt{0,24}}$.

1.2.8. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{1,5}\cdot\sqrt{2,1}}{\sqrt{0,35}}$.

1.2.9. Найдите значение выражения $(\sqrt{14}-\sqrt{12})(\sqrt{14}+\sqrt{12})$.

1.2.10. Найдите значение выражения $(\sqrt{8}-\sqrt{18})(\sqrt{8}+\sqrt{18})$.

1.2.11. Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{18})^2}{16}$.

1.2.12. Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{17})^2}{12+\sqrt{119}}$.

1.2.13. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{3}}-\sqrt{16\frac{2}{3}}\right):\sqrt{\frac{2}{27}}$.

1.2.14. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{5}}-\sqrt{5\frac{2}{5}}\right):\sqrt{\frac{3}{125}}$.

1.2.15. Найдите корень уравнения $\sqrt{x-5}=4$.

1.2.16. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+3}=3$.

1.2.17. Найдите корень уравнения $\sqrt{-32-9x}=2$.

1.2.18. Найдите корень уравнения $\sqrt{10-x}=2$.

1.2.19. Решите уравнение $\sqrt{18-7x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

1.2.20. Решите уравнение $\sqrt{56-x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

1.2.21. Решите уравнение $\sqrt{\frac{4}{3x-17}}=\frac{1}{2}$.

1.2.22. Решите уравнение $\sqrt{\frac{5}{8-3x}}=\frac{1}{13}$.

1.2.23. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+10}=2$.

1.2.24. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+1}=2$.

1.2.25. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч^2, вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,3 километра, приобрести скорость не менее 90 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

1.2.26. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч^2, вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,4 километра, приобрести скорость не менее 140 км/ч. Ответ выразите в км/ч^2.

1.2.27. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 12 километров? Ответ выразите в метрах.

1.2.28. Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 32 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 36 километров?

1.2.29. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{81} \cdot 10^{15}$ м², а мощность её излучения равна $9{,}12 \cdot 10^{20}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

1.2.30. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8} \ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в Кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{125} \cdot 10^{15}$ м², а мощность её излучения равна $4{,}56 \cdot 10^{21}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

1.3. Степенные уравнения и выражения

1.3.1. Найдите значение выражения $3^4 \cdot 9^{-2}$.

1.3.2. Найдите значение выражения $2^3 \cdot 16^{-\frac{1}{2}}$.

1.3.3. Найдите значение выражения $5^{0{,}36} \cdot 25^{0{,}32}$.

1.3.4. Найдите значение выражения $8^{0{,}6} \cdot 32^{0{,}04}$.

1.3.5. Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{7}} \cdot 49^{\frac{5}{7}}$.

1.3.6. Найдите значение выражения $3^{\frac{5}{6}} \cdot 9^{\frac{1}{12}}$.

1.3.7. Найдите значение выражения $\dfrac{4^{5{,}5}}{16^{1{,}25}}$.

1.3.8. Найдите значение выражения $\dfrac{7^{3{,}8}}{49^{1{,}4}}$.

1.3.9. Найдите значение выражения $\dfrac{25^{6{,}2}}{5^{10{,}4}}$.

1.3.10. Найдите значение выражения $\dfrac{9^{3{,}7}}{3^{5{,}4}}$.

1.3.11. Найдите значение выражения $\dfrac{2^{3{,}2} \cdot 6^{6{,}2}}{12^{5{,}2}}$.

1.3.12. Найдите значение выражения $\dfrac{2^{2{,}5} \cdot 5^{5{,}5}}{10^{2{,}5}}$.

1.3.13. Найдите значение выражения $4^4 \cdot 3^9 : 12^4$.

1.3.14. Найдите значение выражения $12^{-2{,}8} \cdot 4^{1{,}8} : 3^{-4{,}8}$.

1.3.15. Найдите значение выражения $9\cdot\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[12]{125}$.

1.3.16. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{64}\cdot\sqrt[3]{64}$.

1.3.17. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[20]{5}\cdot\sqrt[5]{5}}{\sqrt[4]{5}}$.

1.3.18. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{9}}$.

1.3.19. Найдите значение выражения $\left(2^5\right)^6:2^{32}$.

1.3.20. Найдите значение выражения $\left(36^6\right)^3:\left(6^4\right)^8$.

1.3.21. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{2}}\right)^3$.

1.3.22. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(5^{\frac{4}{7}}\cdot 11^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{55^{12}}$.

1.3.23. Найдите значение выражения $\dfrac{17(m^4)^6+7(m^8)^3}{(4m^{12})^2}$.

1.3.24. Найдите значение выражения $\dfrac{7(m^4)^3+18(m^3)^4}{(5m^6)^2}$.

1.3.25. Найдите значение выражения $\dfrac{(6x)^3\cdot x^{-7}}{x^{-3}\cdot 2x^{-1}}$.

1.3.26. Найдите значение выражения $\dfrac{(4x)^2\cdot x^5}{x^4\cdot 5x^3}$.

1.3.27. Найдите корень уравнения $3^{x-4}=9$.

1.3.28. Найдите корень уравнения $4^{2-x}=16$.

1.3.29. Найдите корень уравнения $4^{2x-17}=\dfrac{1}{64}$.

1.3.30. Найдите корень уравнения $36^{x-5}=\dfrac{1}{6}$.

1.3.31. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-12}=\dfrac{1}{8}$.

1.3.32. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x-7}=3$.

1.3.33. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{4+x}=125$.

1.3.34. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-5+x}=125$.

1.3.35. Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{18-3x}=64$.

1.3.36. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = 9$.

1.3.37. Найдите корень уравнения $5^{7+2x} = 25^{2x}$.

1.3.38. Найдите корень уравнения $3^{3+4x} = 1{,}5 \cdot 2^{3+4x}$.

1.3.39. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 32^x$.

1.3.40. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} = 2^x$.

1.3.41. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин.) — время, прошедшее от начального момента, T (мин.) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 36$ мг. Период его полураспада $T = 10$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 9 мг?

1.3.42. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин.) — время, прошедшее от начального момента, T (мин.) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 48$ мг. Период его полураспада $T = 8$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 3 мг?

1.3.43. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где p (Па) — давление в газе, V — объём газа (в кубических метрах), a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вчетверо объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 2 раза?

1.3.44. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где p (Па) — давление в газе, V — объём газа (в кубических метрах), a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a увеличение в 32 раза объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к уменьшению давления не менее, чем в 2 раза?

1.4. Тригонометрические уравнения и выражения

1.4.1. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

1.4.2. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in (1{,}5\pi; 2\pi)$.

1.4.3. Найдите $18\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}7$.

1.4.4. Найдите $-46\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}1$.

1.4.5. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

1.4.6. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

1.4.7. Найдите значение выражения $8\sin 135° \cdot \cos 45°$.

1.4.8. Найдите значение выражения $27\sqrt{6}\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$.

1.4.9. Найдите значение выражения $6\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{3}$.

1.4.10. Найдите значение выражения $32\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

1.4.11. Найдите $17\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$.

1.4.12. Найдите $49\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{7}$.

1.4.13. Найдите значение выражения $-4\sqrt{3}\cos(-750°)$.

1.4.14. Найдите значение выражения $-44\sqrt{2}(\cos -315°)$.

1.4.15. Найдите значение выражения $-32\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-600°)$.

1.4.16. Найдите значение выражения $-29\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-60°)$.

1.4.17. Найдите значение выражения $30\sqrt{3}\sin 1020°$.

1.4.18. Найдите значение выражения $-34\sqrt{3}\cos 930°$.

1.4.19. Найдите значение выражения $10\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,390°$.

1.4.20. Найдите значение выражения $35\,\mathrm{tg}\,14°\cdot\mathrm{tg}\,76°$.

1.4.21. Найдите значение выражения $\frac{48\sin 76°}{\sin 284°}$.

1.4.22. Найдите значение выражения $\frac{35\cos 82°}{\cos 98°}$.

1.4.23. Найдите значение выражения $\frac{28\,\mathrm{tg}\,48°}{\mathrm{tg}\,132°}$.

1.4.24. Найдите значение выражения $\frac{17\cos 86°}{\sin 4°}$.

1.4.25. Найдите значение выражения $-24\,\mathrm{tg}\,70°\cdot\mathrm{tg}\,160°$.

1.4.26. Найдите значение выражения $\frac{2\sin 32°\cdot\cos 32°}{\sin 64°}$.

1.4.27. Найдите значение выражения $\frac{-6\sin 32°}{\sin 16°\cdot\sin 74°}$.

1.4.28. Найдите значение выражения $\frac{-9\sin 136°}{\cos 68°\cdot\cos 22°}$.

1.4.29. Найдите значение выражения $\frac{30(\sin^2 28° - \cos^2 28°)}{\cos 56°}$.

1.4.30. Найдите значение выражения $\sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{8}\cdot\cos\frac{13\pi}{8}$.

1.4.31. Найдите значение выражения $\sqrt{75}\cos^2\frac{7\pi}{12} - \sqrt{75}\sin^2\frac{7\pi}{12}$.

1.4.32. Найдите значение выражения $\sqrt{32}\cos^2\frac{\pi}{8} - \sqrt{8}$.

1.4.33. Найдите значение выражения $\frac{-12}{\sin^2 131° + \sin^2 221°}$.

1.4.34. Найдите значение выражения $\frac{-4}{\sin^2 27° + \sin^2 117°}$.

1.4.35. Найдите значение выражения $\frac{-24}{\cos^2 127^\circ + \cos^2 217^\circ}$.

1.4.36. Найдите значение выражения $\frac{-38}{\cos^2 15^\circ + \cos^2 105^\circ}$.

1.4.37. Найдите $\frac{2\sin 4\alpha}{5\cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = 0{,}2$.

1.4.38. Найдите $\frac{3\sin 6\alpha}{5\cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = 0{,}8$.

1.4.39. Найдите $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

1.4.40. Найдите $8\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\alpha \in (1{,}5\pi; 2\pi)$.

1.4.41. Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $4\sin^2\alpha + 7\cos^2\alpha = 6$.

1.4.42. Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $6\sin^2\alpha + 11\cos^2\alpha = 8$.

1.4.43. Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{4} = -1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

1.4.44. Найдите корень уравнения $\cos\frac{\pi(2x-5)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

1.4.45. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = 1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

1.4.46. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(x+1)}{3} = -\sqrt{3}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

1.4.47. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 5 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1.4.48. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 22$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 11,1 м на расстоянии 1 м?

1.4.49. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 24$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 28,8 м?

1.4.50. Два тела массой $m = 3$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2\sin^2\alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 75 джоулей?

1.5. Логарифмические уравнения и выражения

1.5.1. Найдите значение выражения $\log_2 8$.

1.5.2. Найдите значение выражения $\log_{10} 1000$.

1.5.3. Найдите значение выражения $\log_{0,25} 32$.

1.5.4. Найдите значение выражения $\log_{0,1} 100$.

1.5.5. Найдите значение выражения $\log_6 \log_2 64$.

1.5.6. Найдите значение выражения $18\log_7 \sqrt[6]{7}$.

1.5.7. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt[7]{3}} 3$.

1.5.8. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{25}$.

1.5.9. Найдите значение выражения $18\cdot 3^{\log_3 4}$.

1.5.10. Найдите значение выражения $216^{\log_6 7}$.

1.5.11. Найдите значение выражения $(\log_7 343)\cdot(\log_2 8)$.

1.5.12. Найдите значение выражения $(\log_4 16)\cdot(\log_3 9)$.

1.5.13. Найдите значение выражения $\log_{10} 0{,}01 + \log_{0,5} 4$.

1.5.14. Найдите значение выражения $\log_2 64 + \log_{0,1} 100$.

1.5.15. Найдите значение выражения $\log_5 6{,}25 + \log_5 4$.

1.5.16. Найдите значение выражения $\log_8 256 - \log_8 0{,}5$.

1.5.17. Найдите значение выражения $\log_{0,6} 10 - \log_{0,6} 6$.

1.5.18. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 729}{\log_2 9}$.

1.5.19. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 8}{\log_{81} 8}$.

1.5.20. Найдите значение выражения $\log_5 2\cdot\log_2 25$.

1.5.21. Найдите значение выражения $\log_{0,25} 9\cdot\log_9 4$.

1.5.22. Найдите значение выражения $5^{3\log_5 11}$.

1.5.23. Найдите значение выражения $36^{\log_6 \sqrt{8}}$.

1.5.24. Вычислите значение выражения $\left(7^{\log_7 2}\right)^{\log_2 7}$.

1.5.25. Вычислите значение выражения $\left(5^{\log_2 7}\right)^{\log_5 2}$.

1.5.26. Найдите корень уравнения $\log_6(-3+x) = 1$.

1.5.27. Найдите корень уравнения $\log_7(-5-x) = 3$.

1.5.28. Найдите корень уравнения $\log_4(15+x) = \log_4 2$.

1.5.29. Найдите корень уравнения $\log_8(10-x) = \log_8 7$.

1.5.30. Найдите корень уравнения $\log_6(x+7) = \log_6(6x-13)$.

1.5.31. Решите уравнение $\log_2(8+3x) = \log_2(3-x)+1$.

1.5.32. Найдите корень уравнения $\log_3(14-x) = 2\log_3 5$.

1.5.33. Найдите корень уравнения $\log_3(18-x) = 4\log_3 2$.

1.5.34. Найдите корень уравнения $3^{\log_3(7-x)} = 5$.

1.5.35. Найдите корень уравнения $2^{\log_4(x+1)} = 3$.

1.5.36. Найдите корень уравнения $\log_5 25^{2x+7} = 8$.

1.5.37. Найдите корень уравнения $\log_8 2^{6-x} = 3$.

1.5.38. Решите уравнение $\log_{x+6} 9 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

1.5.39. Решите уравнение $\log_{x-7} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

1.5.40. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_{\text{П}} = 20°\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{В}} = 88°\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T(°\text{C})$, причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\text{П}}}{T - T_{\text{П}}}$ (м), где $c = 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot°\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}6$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 96 м?

1.5.41. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_{\text{П}} = 15°\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{В}} = 59°\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры $T(°\text{C})$, причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\text{П}}}{T - T_{\text{П}}}$ (м), где $c = 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 28\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot°\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}5$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 135 м?

2. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

2.1. Текстовые задачи

2.1.1. Летом килограмм клубники стоит 80 рублей. Маша купила 3 кг 500 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить с 300 рублей?

2.1.2. Летом килограмм клубники стоит 75 рублей. Маша купила 1 кг 400 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить с 200 рублей?

2.1.3. Для ремонта квартиры требуется 55 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 4 рулона?

2.1.4. Для ремонта квартиры требуется 68 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

2.1.5. Одного рулона обоев хватает для оклейки полосы от пола до потолка шириной 1,2 м. Сколько рулонов обоев нужно купить для оклейки прямоугольной комнаты размерами 1,1 м на 5,8 м?

2.1.6. Одного рулона обоев хватает для оклейки полосы от пола до потолка шириной 1,5 м. Сколько рулонов обоев нужно купить для оклейки прямоугольной комнаты размерами 1,6 м на 3,4 м?

2.1.7. Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 12 г лимонной кислоты. Лимонная кислота продаётся в пакетиках по 10 г. Какое наименьшее число пачек нужно купить хозяйке для приготовления 12 литров маринада?

2.1.8. Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 14 г лимонной кислоты. Лимонная кислота продаётся в пакетиках по 10 г. Какое наименьшее число пачек нужно купить хозяйке для приготовления 5 литров маринада?

2.1.9. В пачке 250 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 1100 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 4 недели?

2.1.10. В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 700 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 4 недели?

2.1.11. Теплоход рассчитан на 900 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

2.1.12. Теплоход рассчитан на 950 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

2.1.13. По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 11 рублей. Если на счёте осталось меньше 11 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счёте было 600 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

2.1.14. По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 22 рубля. Если на счёте осталось меньше 22 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счёте было 400 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

2.1.15. Для покраски 1 кв. м потолка требуется 130 г краски. Краска продаётся в банках по 3 кг. Какое наименьшее количество банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 35 кв. м?

2.1.16. Для покраски 1 кв. м потолка требуется 120 г краски. Краска продаётся в банках по 1,5 кг. Какое наименьшее количество банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 60 кв. м?

2.1.17. На день рождения полагается дарить букет из нечётного числа цветов. Розы стоят 80 рублей за штуку. У Вани есть 350 рублей. Из какого наибольшего числа роз он может купить букет Маше на день рождения?

2.1.18. На день рождения полагается дарить букет из нечётного числа цветов. Тюльпаны стоят 25 рублей за штуку. У Вани есть 120 рублей. Из какого наибольшего числа тюльпанов он может купить букет Маше на день рождения?

2.1.19. Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 390 рублей, а стоимость одного номера журнала — 23 рубля. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

2.1.20. Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 890 рублей, а стоимость одного номера журнала — 38 рублей. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

2.1.21. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 1 раз в день в течение 10 дней. В одной упаковке 14 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

2.1.22. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 5 раз в день в течение 7 дней. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

2.1.23. В доме, в котором живёт Петя, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 3 квартиры. Петя живёт в квартире № 49. В каком подъезде живёт Петя?

2.1.24. В доме, в котором живёт Маша, 5 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Маша живёт в квартире № 97. В каком подъезде живёт Маша?

2.1.25. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 70 копеек. Счётчик электроэнергии 1 ноября показывал 69084 киловатт-часа, а 1 декабря показывал 69230 киловатт-часов. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь?

2.1.26. В квартире, где проживает Алексей, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 июня счётчик показывал расход 100 куб. м воды, а 1 июля — 110 куб. м. Какую сумму должен заплатить Алексей за холодную воду за июнь, если цена за один куб. м холодной воды составляет 9 р. 10 коп.? Ответ дайте в рублях.

2.1.27. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 2400 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1800 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1300 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

2.1.28. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 2200 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1400 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1100 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

2.1.29. На бензоколонке один литр бензина стоит 32 руб. 60 коп. Водитель залил в бак 15 литров бензина и взял бутылку воды за 24 рубля. Сколько рублей сдачи он получит с 1000 рублей?

2.1.30. На бензоколонке один литр бензина стоит 31 руб. 60 коп. Водитель залил в бак 10 литров бензина и взял бутылку воды за 24 рубля. Сколько рублей сдачи он получит с 1000 рублей?

2.1.31. Задачу № 1 правильно решили 22 010 человек, что составляет 71% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2.1.32. Задачу № 1 правильно решили 15 050 человек, что составляет 43% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2.1.33. Шариковая ручка стоит 10 рублей. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 700 рублей после повышения цены на 10%?

2.1.34. Шариковая ручка стоит 50 рублей. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 1000 рублей после повышения цены на 25%?

2.1.35. Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее количество таких тетрадей можно будет купить на 550 рублей после понижения цены на 15%?

2.1.36. Тетрадь стоит 20 рублей. Какое наибольшее количество таких тетрадей можно будет купить на 350 рублей после понижения цены на 20%?

2.1.37. Оптовая цена учебника 180 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 5500 рублей?

2.1.38. Оптовая цена учебника 130 рублей. Розничная цена на 15% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 4000 рублей?

2.1.39. Клиент взял в банке кредит 3000 рублей на год под 18%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

2.1.40. Клиент взял в банке кредит 6000 рублей на год под 16%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

2.1.41. В городе N живет 200 000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых 45% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых жителей работает?

2.1.42. В городе N живет 150 000 жителей. Среди них 10% детей и подростков. Среди взрослых 45% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых жителей работает?

2.1.43. В магазине вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 15% от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 1500 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

2.1.44. В магазине вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 10% от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 3500 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

2.1.45. Флакон шампуня стоит 150 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 15%?

2.1.46. Флакон шампуня стоит 110 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

2.1.47. Цена на электрический чайник была повышена на 18% и составила 1652 рубля. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

2.1.48. Цена на электрический чайник была повышена на 19% и составила 2261 рубль. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

2.1.49. Магазин делает пенсионерам скидку на определённое количество процентов от стоимости покупки. Дыня стоит в магазине 50 рублей. Пенсионер заплатил за дыню 46 рублей. Сколько процентов составляет скидка для пенсионеров?

2.1.50. Магазин делает пенсионерам скидку на определённое количество процентов от стоимости покупки. Упаковка сосисок стоит в магазине 120 рублей. Пенсионер заплатил за упаковку сосисок 108 рублей. Сколько процентов составляет скидка для пенсионеров?

2.1.51. Мобильный телефон стоил 3800 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 2850 рублей. На сколько процентов была снижена цена?

2.1.52. Мобильный телефон стоил 7500 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 5250 рублей. На сколько процентов была снижена цена?

2.1.53. Среди 45 000 жителей города 50% не интересуется футболом. Среди футбольных болельщиков 85% смотрело по телевизору финал Чемпионата мира. Сколько жителей города смотрело этот матч по телевизору?

2.1.54. Среди 35 000 жителей города 30% не интересуется футболом. Среди футбольных болельщиков 90% смотрело по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрело этот матч по телевизору?

2.1.55. Железнодорожный билет для взрослого стоит 320 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 19 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

2.1.56. Железнодорожный билет для взрослого стоит 580 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 17 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

2.1.57. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 14% активного вещества. Ребенку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 0,8 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребенку весом 7 кг в течение суток?

2.1.58. Одна таблетка лекарства весит 30 мг и содержит 6% активного вещества. Ребенку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,2 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребенку весом 6 кг в течение суток?

2.1.59. Рост человека 5 футов 6 дюймов. Выразите его рост в сантиметрах, если 1 фут равен 12 дюймам. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2.1.60. Рост человека 5 футов 11 дюймов. Выразите его рост в сантиметрах, если 1 фут равен 12 дюймам. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2.1.61. Диагональ экрана телевизора равна 91 дюйму. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2.1.62. Диагональ экрана телевизора равна 22 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2.1.63. Система навигации, встроенная в спинку самолётного кресла, информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 39 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

2.1.64. Система навигации, встроенная в спинку самолётного кресла, информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 23 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

2.1.65. Бегун пробежал 350 м за 36 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

2.1.66. Бегун пробежал 450 м за 50 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

2.1.67. Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 60 км в час? (Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.)

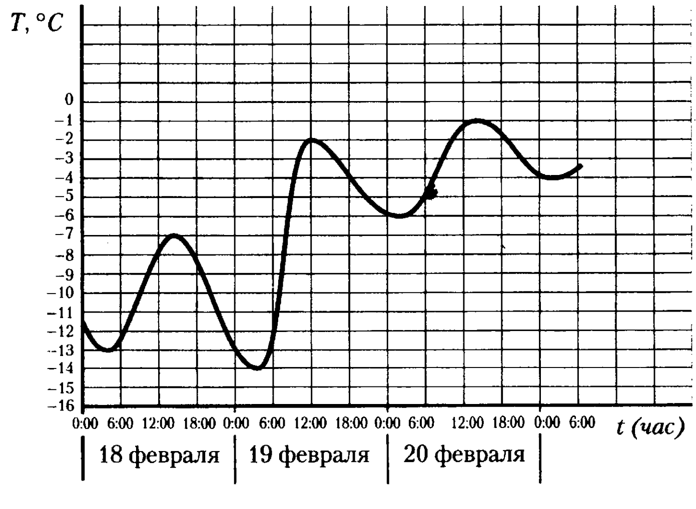
2.1.68. Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 124 км в час? (Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.)

2.1.69. Таксист за месяц проехал 5000 км. Стоимость 1 литра бензина 19 рублей. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

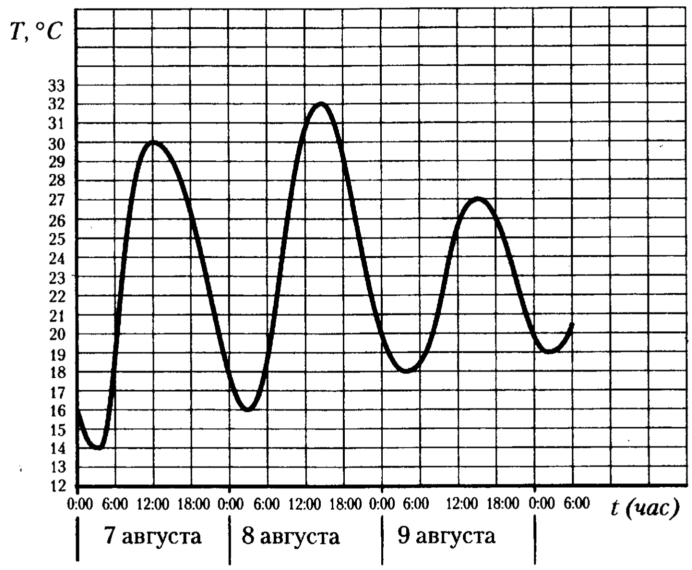
2.1.70. Таксист за месяц проехал 10 000 км. Стоимость 1 литра бензина 19,5 рубля. Средний расход бензина на 100 км составляет 11 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

2.2. Графики и диаграммы

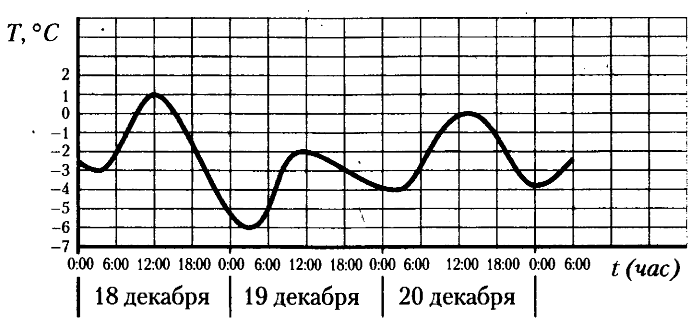
2.2.1. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 18 февраля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



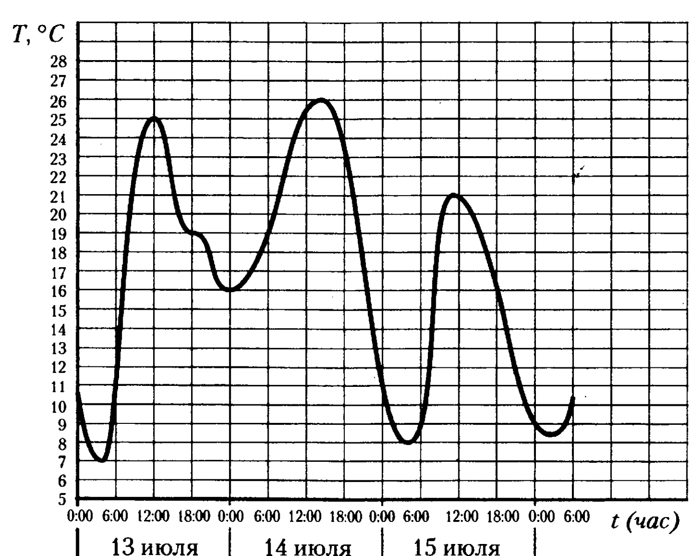
2.2.2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 9 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия.



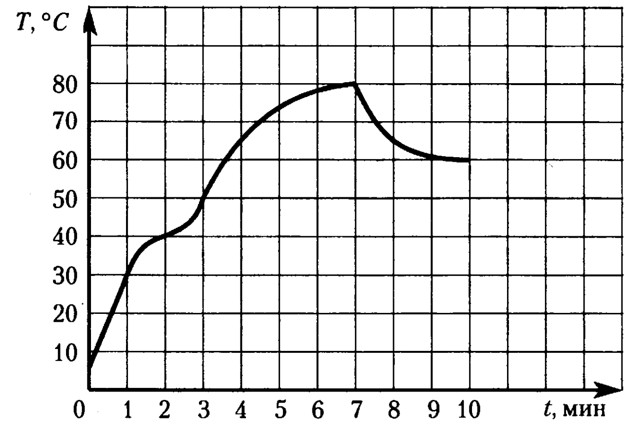
2.2.3. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 20 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



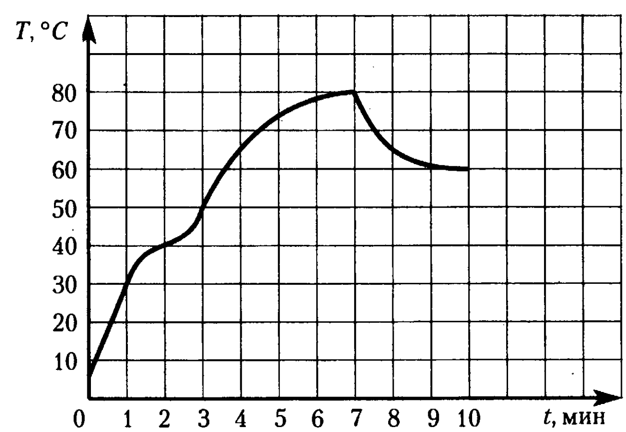
2.2.4. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 13 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



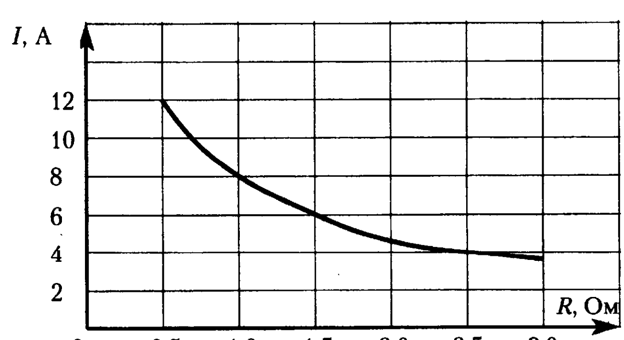
2.2.5. На графике изображена зависимость температуры от времени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, за сколько минут двигатель нагреется с 40° до 80° C.



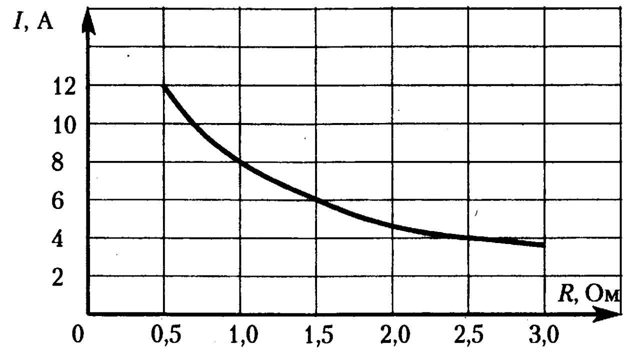
2.2.6. На графике изображена зависимость температуры отвремени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, за сколько минут двигатель нагреется с 50° до 80° C.



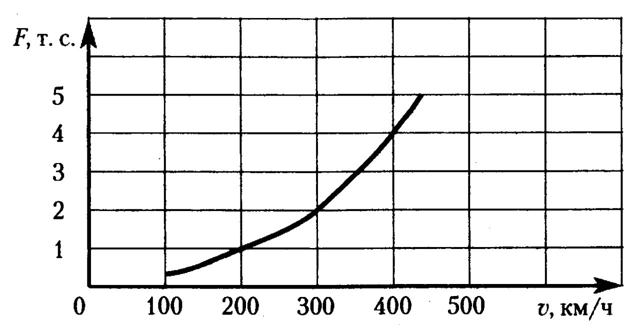
2.2.7. Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя— чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока (в амперах). Сколько ампер составляет сила тока в цепи при сопротивлении 1 Ом?



2.2.8. Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока (в амперах). Сколько ампер составляет сила тока в цепи при сопротивлении 1,5 Ом?

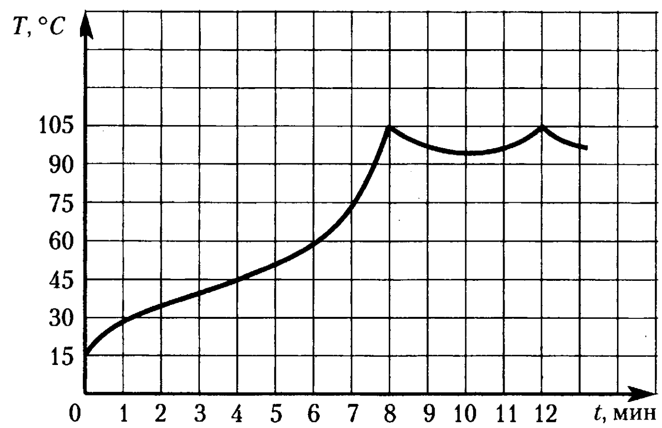


2.2.9. Когда самолет находится в горизонтальном полёте, подъёмная сила, действующая на крылья, зависит от скорости. На рисунке изображена эта зависимость для некоторого самолёта. На оси абсцисс откладывается скорость (в километрах в час), на оси ординат — сила (в тоннах силы). Определите по рисунку, при какой скорости (в километрах в час) подъёмная сила достигает 1 тонны силы.

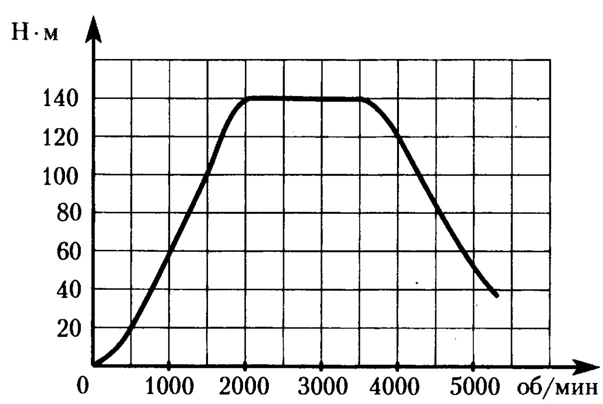


2.2.10. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, через сколько минут после начала реакции останется 8 граммов реагента.

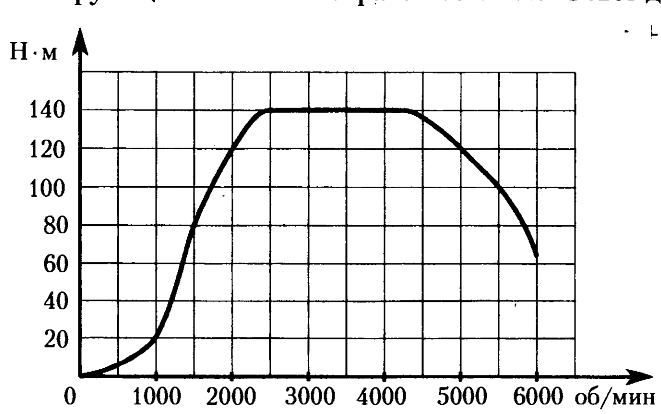
2.2.11. На графике показан процесс разогрева двигателя внутреннего сгорания при температуре окружающего воздуха 15°. На оси абсцисс откладывается время (в минутах), прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя (в градусах Цельсия). К двигателю можно подключить нагрузку, когда температура двигателя достигнет 45°. Какое наименьшее количество минут потребуется выждать, прежде чем подключить нагрузку к двигателю?



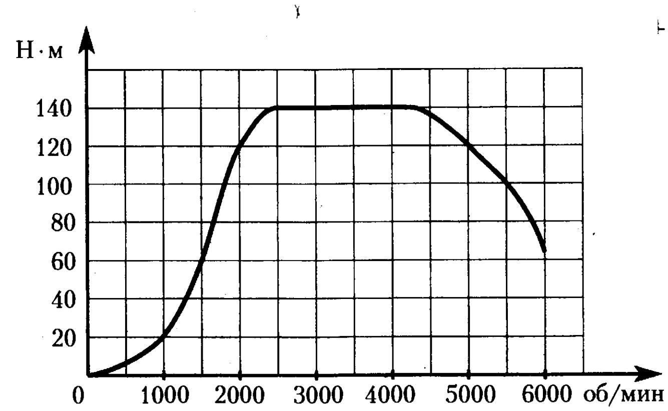
2.2.12. На графике изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат — крутящий момент (в Н · м). Какое наименьшее число оборотов в минуту должен поддерживать водитель, чтобы крутящий момент был не меньше 100 Н · м?



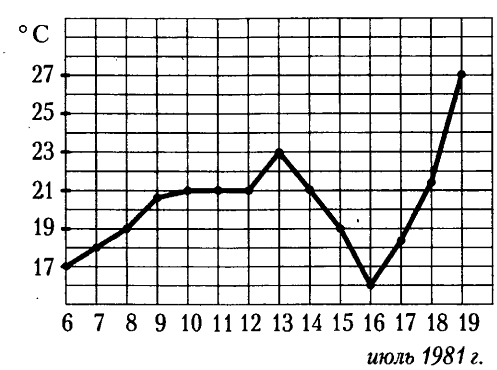
2.2.13. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент (в Н · м). Скорость автомобиля (в км/ч) приближенно выражается формулой $v = 0{,}036n$, где n — число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был равен 20 Н · м? Ответ дайте в километрах в час.



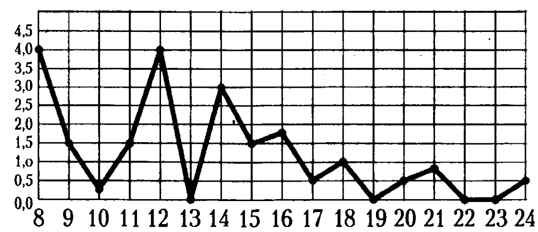
2.2.14. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент (в Н·м). Скорость автомобиля (в км/ч) приближенно выражается формулой $v = 0{,}036n$, где n — число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был равен 60 Н·м? Ответ дайте в километрах в час.



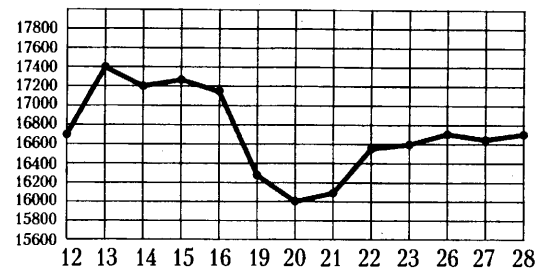
2.2.15. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какого числа в первый раз за указанный период среднесуточная температура равнялась 19 градусам.



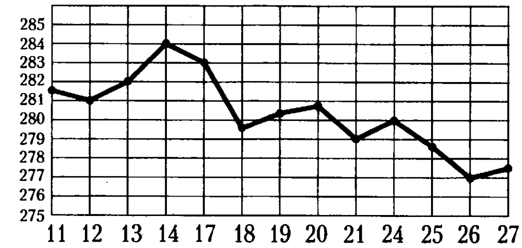
2.2.16. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа за данный период впервые выпало ровно 1,5 миллиметра осадков.



2.2.17. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 12 по 28 ноября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.



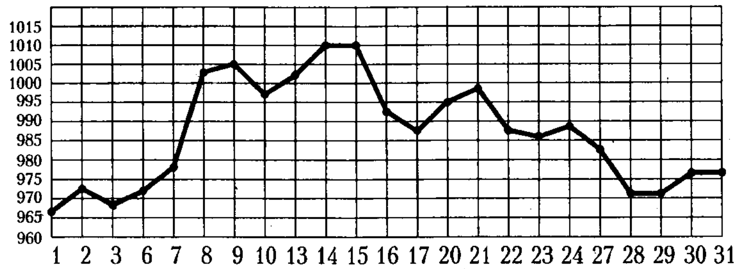
2.2.18. На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 11 по 27 июля 2000 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена золота на момент закрытия торгов была наибольшей за данный период.



2.2.19. На рисунке жирными точками показана цена платины, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни с 1 по 27 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена платины в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена платины впервые была равна 1645 рублям за грамм.

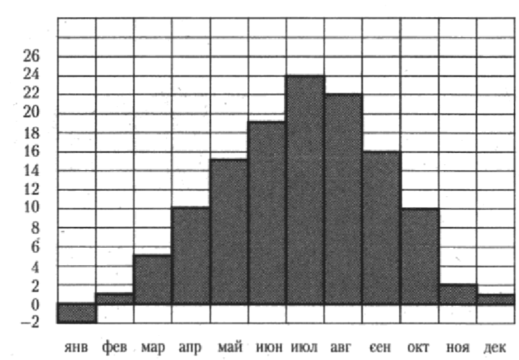
2.2.20. На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена никеля на момент закрытия торгов впервые за данный период приняла значение 10 200 долларов США за тонну.

2.2.21. На рисунке жирными точками показана цена золота, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена золота в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену золота в период с 3 по 13 октября. Ответ дайте в рублях за грамм.

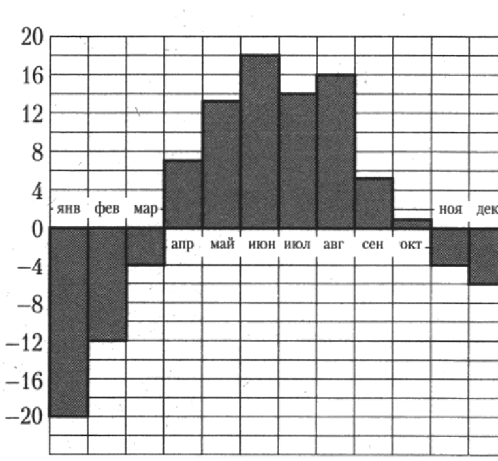


2.2.22. На рисунке жирными точками показан курс австрийского шиллинга, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 по 30 января 1999 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена шиллинга в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольший курс шиллинга в период с 1 по 20 января. Ответ дайте в рублях.

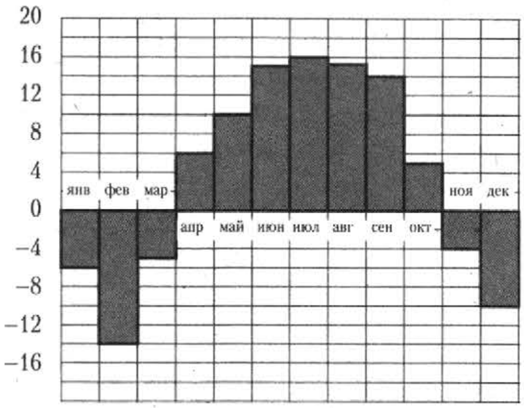
2.2.23. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1988 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



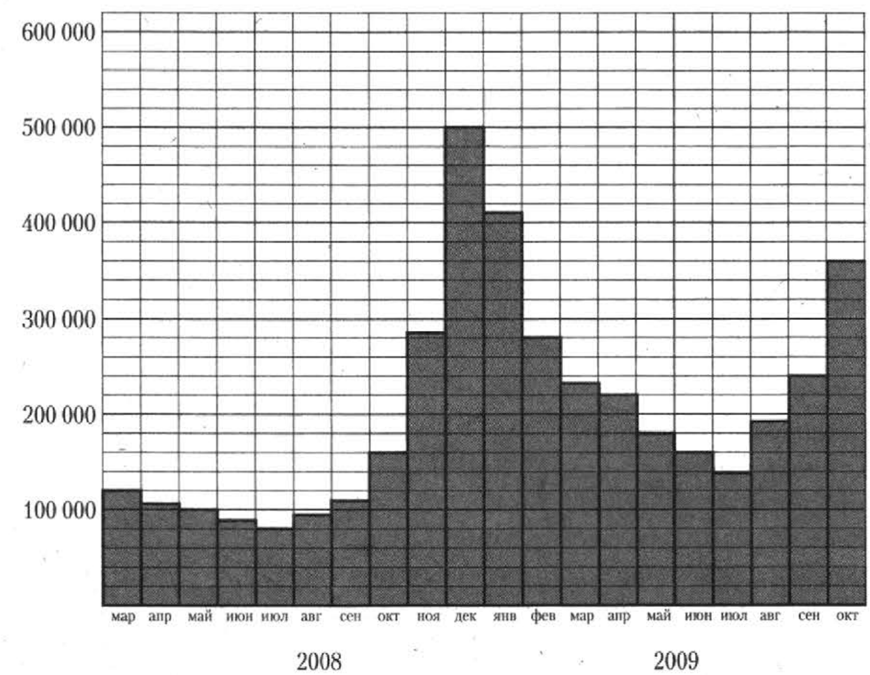
2.2.24. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1973 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



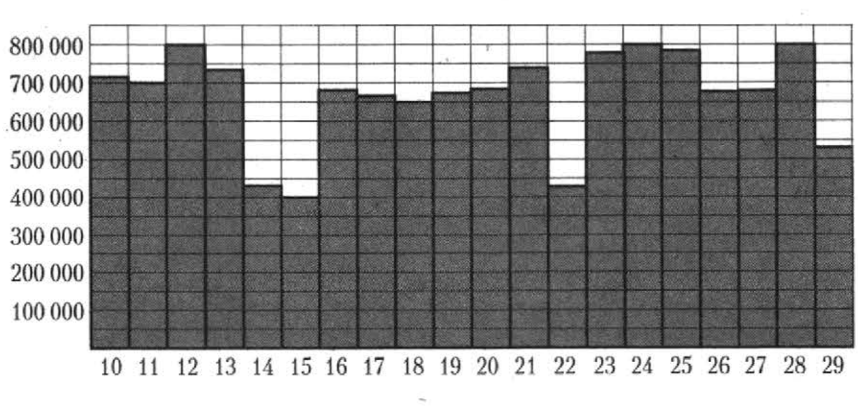
2.2.25. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



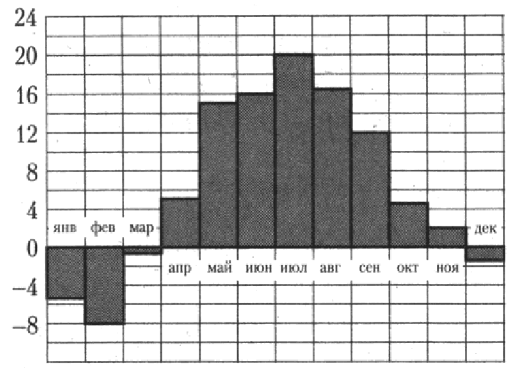
2.2.26. На диаграмме показано количество запросов со словом СНЕГ, сделанных на поисковом сайте Yandex.ru во все месяцы с марта 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество запросов за данный месяц. Определите по диаграмме разность между наибольшим и наименьшим месячными количествами запросов со словом СНЕГ в указанный период.



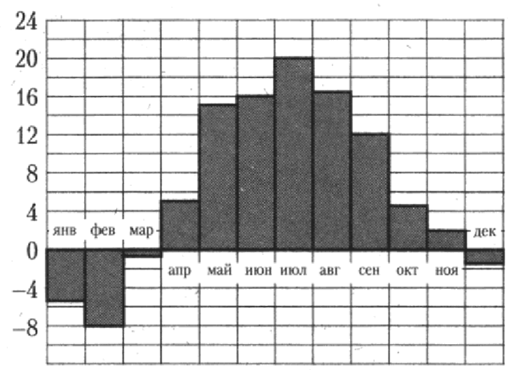
2.2.27. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, каково наибольшее суточное количество посетителей сайта РИА Новости в период с 13 по 27 ноября.



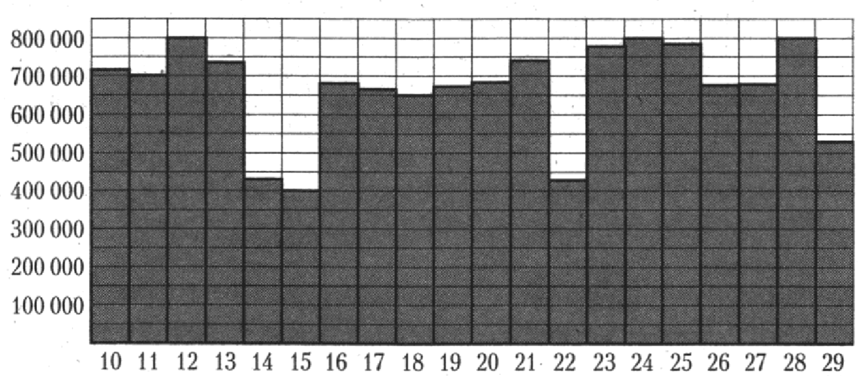
2.2.28. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в период с сентября по декабрь 2003 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



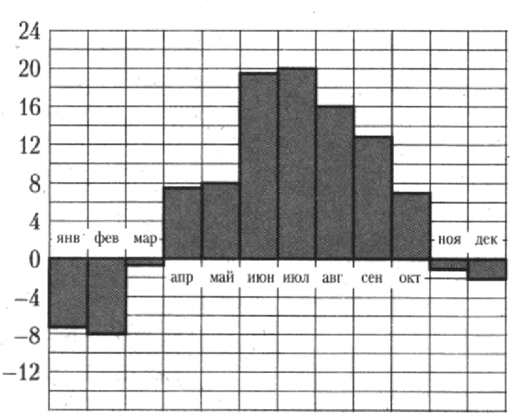
2.2.29. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура была положительной в 2003 году.



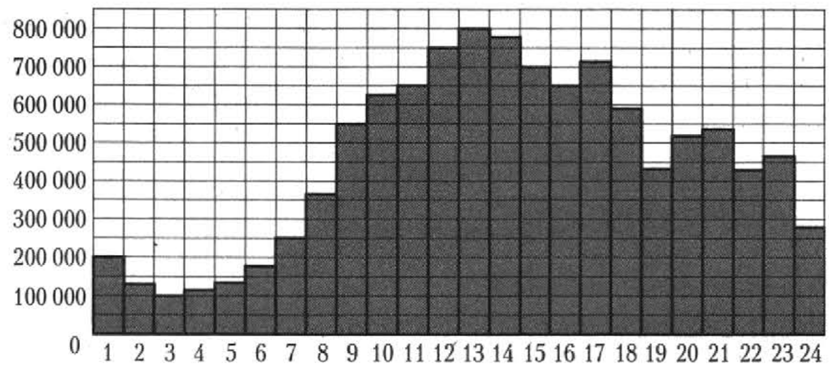
2.2.30. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, сколько было дней за данный период, когда на сайте РИА Новости было не меньше 700000 посетителей.



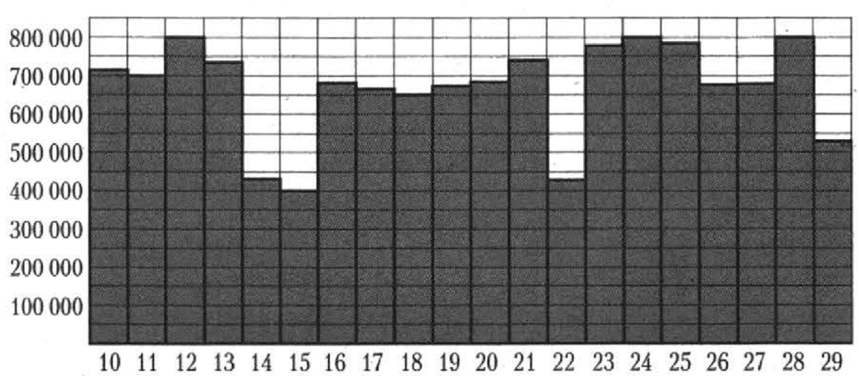
2.2.31. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 10 градусов Цельсия в 1999 году.



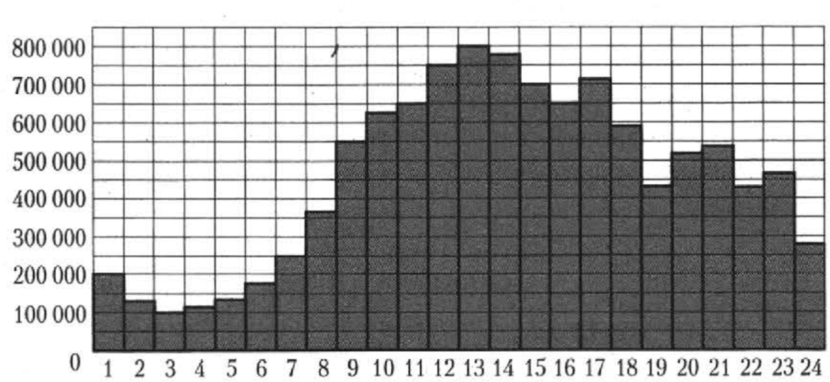
2.2.32. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали — количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, сколько было часов в данный день, когда на сайте РИА Новости было менее 300 000 посетителей.



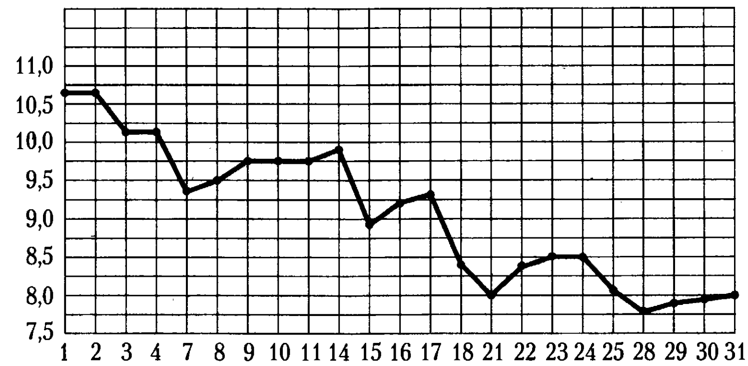
2.2.33. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа в указанный период количество посетителей сайта РИА Новости впервые приняло наибольшее значение.



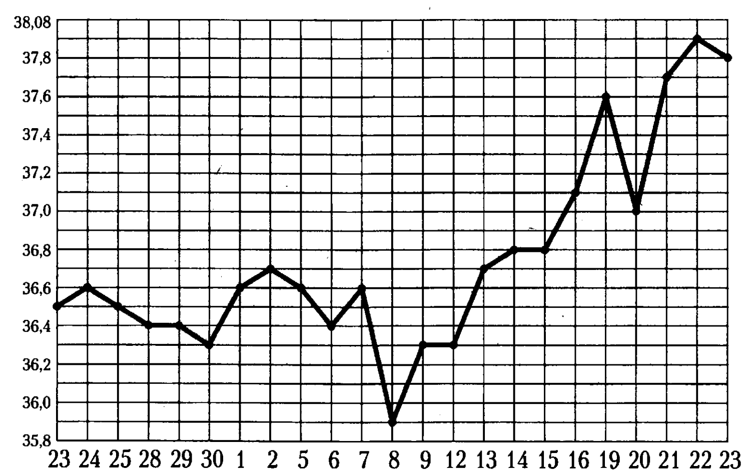
2.2.34. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА Новости в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали — количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, за какой час в данный день на сайте РИА Новости побывало максимальное количество посетителей.



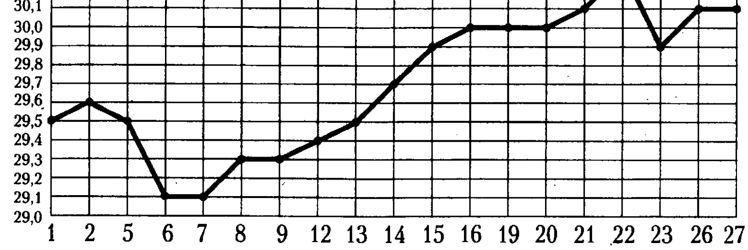
2.2.35. На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода цена серебра была меньше 9 рублей за грамм.



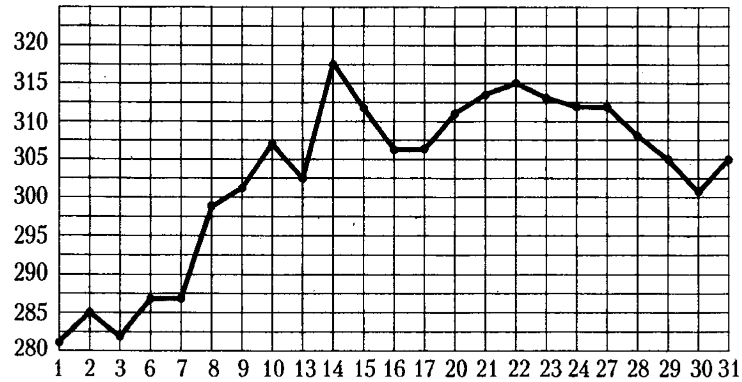
2.2.36. На рисунке жирными точками показан курс японской йены, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 23 сентября по 23 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена японской йены в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода курс японской йены был меньше 36,9 рубля.



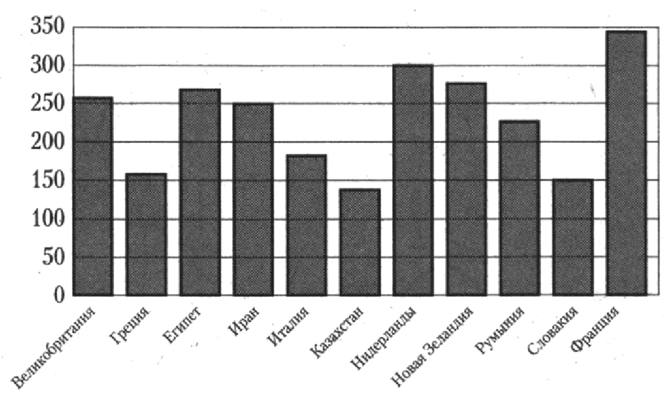
2.2.37. На рисунке жирными точками показан курс австралийского доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 1 по 27 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена доллара в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за указанный период курс доллара был ровно 29,5 рубля.



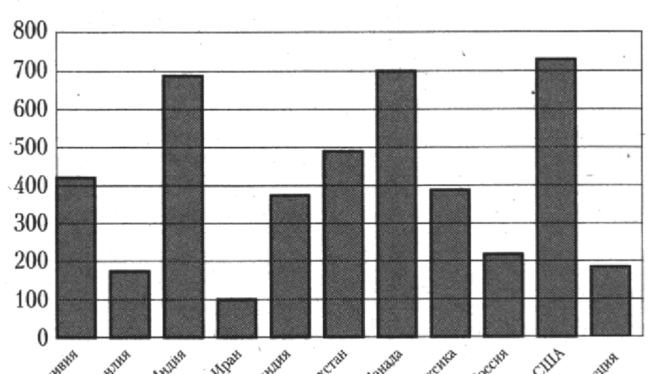
2.2.38. На рисунке жирными точками показана цена палладия, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней за указанный период цена палладия была ровно 305 рублей за грамм.



2.2.39. На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Франция, одиннадцатое место — Казахстан. Какое место занимала Словакия?



2.2.40. На диаграмме показано распределение выплавки цинка в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, одиннадцатое место — Иран. Какое место занимала Боливия?



2.3. Вероятность

2.3.1. В сборнике билетов по химии всего 50 билетов, в 20 из них встречается вопрос по углеводородам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по углеводородам.

2.3.2. В сборнике билетов по физике всего 25 билетов, в 13 из них встречается вопрос по оптике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по оптике.

2.3.3. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 20 спортсменов, среди них 5 прыгунов из Голландии и 7 прыгунов из Венесуэлы. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что седьмым будет выступать прыгун из Голландии.

2.3.4. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 50 спортсменов, среди них 7 прыгунов из Италии и 10 прыгунов из Канады. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать вторым будет выступать прыгун из Италии.

2.3.5. На семинар приехали 4 учёных из Норвегии, 2 из Испании и 6 из Италии. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что одиннадцатым окажется доклад учёного из Италии.

2.3.6. На соревнования по метанию ядра приехали 7 спортсменов из России, 7 из Швеции и 6 из Сербии. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что седьмым будет выступать спортсмен из Швеции?

2.3.7. В классе 6 учащихся, среди них два друга — Сергей и Олег. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Олег окажутся в одной группе.

2.3.8. В параллели 51 учащийся, среди них два друга — Сергей и Вадим. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Сергей и Вадим окажутся в одной группе.

2.3.9. В среднем из 150 карманных фонариков двадцать четыре неисправны. Найдите вероятность купить работающий фонарик.

2.3.10. В каждой партии из 500 лампочек в среднем 7 бракованных. Найдите вероятность того, что наугад взятая лампочка из партии будет исправной.

2.3.11. При производстве в среднем на каждые 992 исправных насоса приходится 8 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

2.3.12. При производстве в среднем на каждые 1393 исправных насоса приходится 7 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

2.3.13. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 80 докладов — первые два дня по 8 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

2.3.14. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 40 докладов — первые два дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

2.3.15. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 34 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

2.3.16. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 32 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

2.3.17. В чемпионате мира участвуют 16 команд, включая команду из Бразилии. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

$$1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.$$

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Бразилии окажется в третьей группе?

2.3.18. В чемпионате мира участвуют 15 команд, включая команду из России. С помощью жребия их нужно разделить на пять групп по три команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

$$1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5.$$

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется в третьей группе?

2.3.19. Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шахматистов, среди которых 11 участников из России, в том числе Петр Трофимов. Найдите вероятность того, что в первом туре Петр Трофимов будет играть с каким-либо шахматистом из России?

2.3.20. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 шашистов, среди которых 13 участников из России, в том числе Андрей Фомин. Найдите вероятность того, что в первом туре Андрей Фомин будет играть с каким-либо шашистом из России?

2.3.21. В группе туристов 10 человек. С помощью жребия они выбирают пятерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

2.3.22. В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

2.3.23. На борту самолёта 19 кресел расположены рядом с запасными выходами и 13 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир Л. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру Л. достанется удобное место, если всего в самолёте 400 мест.

2.3.24. На борту самолёта 22 кресла расположены рядом с запасными выходами и 11 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир А. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру А. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

2.3.25. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет оба раза.

2.3.26. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз.

2.3.27. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Витязь» по очереди играет с командами «Атлант» и «Титан». Найдите вероятность того, что команда «Витязь» не выиграет право первой владеть мячом ни в одном матче.

2.3.28. Перед началом волейбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Байкал» по очереди играет с командами «Амур», «Енисей», «Вилюй» и «Иртыш». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах право первой владеть мячом выиграет команда «Байкал».

2.3.29. Найдите вероятность того, что при броске игрального кубика выпадет нечётное число.

2.3.30. Найдите вероятность того, что при броске двух кубиков на обоих выпадет число не большее 3.

2.3.31. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков. Результат округлите до сотых.

2.3.32. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

2.3.33. Аня и Яна играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Ничья, если очков поровну. Аня выкинула 3 очка. Затем кубик бросает Яна. Найдите вероятность того, что Яна выиграет.

2.3.34. Лена и Саша играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Ничья, если очков поровну. Лена выкинула 4 очка. Затем кубик бросает Саша. Найдите вероятность того, что Саша проиграет.

2.3.35. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

2.3.36. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,56. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

2.3.37. Биатлонист попадает в мишень с вероятностью 0,9. Он стреляет пять раз. Найдите вероятность того, что он попадёт в мишень все пять раз.

2.3.38. Биатлонист попадает в мишень с вероятностью 0,7. Он стреляет пять раз. Найдите вероятность того, что он не попадёт в мишень ни одного раза.

2.3.39. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 35 до 46 делится на 5?

2.3.40. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 82 до 96 делится на 6?

2.3.41. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Тригонометрия», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос на тему «Внешние углы», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

2.3.42. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос на тему «Тригонометрия», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

2.3.43. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,83. Вероятность того, что окажется меньше 11 пассажиров, равна 0,64. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 11 до 17.

2.3.44. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 16 пассажиров, равна 0,89. Вероятность того, что окажется меньше 14 пассажиров, равна 0,46. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 14 до 15.

2.3.45. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся У. верно решит больше 9 задач, равна 0,61. Вероятность того, что У. верно решит больше 8 задач, равна 0,73. Найдите вероятность того, что У. верно решит ровно 9 задач.

2.3.46. Вероятность того, что на тесте по физике учащийся У. верно решит больше 11 задач, равна 0,66. Вероятность того, что У. верно решит больше 10 задач, равна 0,71. Найдите вероятность того, что У. верно решит ровно 11 задач.

2.3.47. Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 5% бракованных стекол, а вторая — 3%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

2.3.48. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 60% этих стёкол, вторая — 40%. Первая фабрика выпускает 2% бракованных стёкол, а вторая — 4%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

2.3.49. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,1. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

2.3.50. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,03 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

2.3.51. В аэропорте два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,35. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,16. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

2.3.52. В аэропорте два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

2.3.53. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

2.3.54. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

2.3.55. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,03. Известно, что 43% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

2.3.56. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называетсяположительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 65% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

2.3.57. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем — 0,4. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,9?

2.3.58. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем — 0,9. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,96?

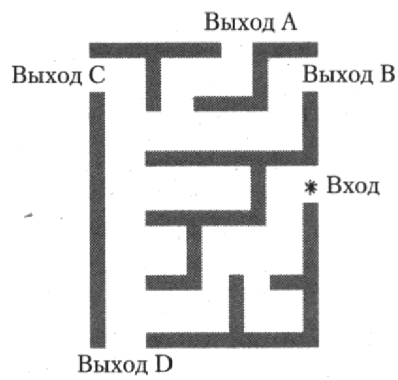
2.3.59. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 8 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 5 очков, в случае ничьей — 3 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

2.3.60. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 7 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 5 очков, в случае ничьей — 2 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

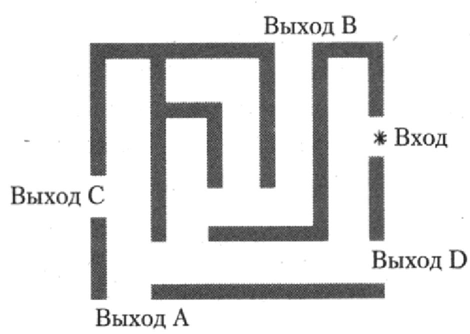
2.3.61. При изготовлении подшипников диаметром 69 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не более чем на 0,01 мм, равна 0,975. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 68,99 мм или больше чем 69,01 мм.

2.3.62. При изготовлении подшипников диаметром 76 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше чем на 0,01 мм, равна 0,983. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 75,99 мм или больше чем 76,01 мм.

2.3.63. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может. На каждом разветвлении паук выбирает путь, по которому ещё не полз. Считая выбор дальнейшего пути случайным, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D.



2.3.64. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может. На каждом разветвлении паук выбирает путь, по которому ещё не полз. Считая выбор дальнейшего пути случайным, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу A.



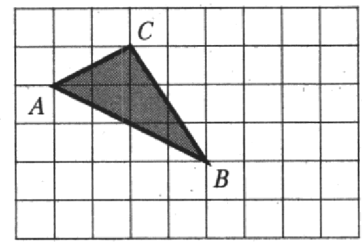
2.3.65. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 6, но не дойдя до отметки 9.

2.3.66. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 8, но не дойдя до отметки 2.

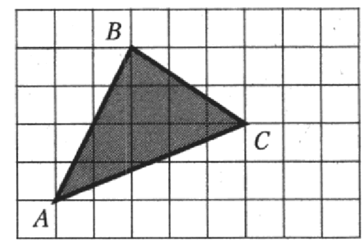
3. ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Длины

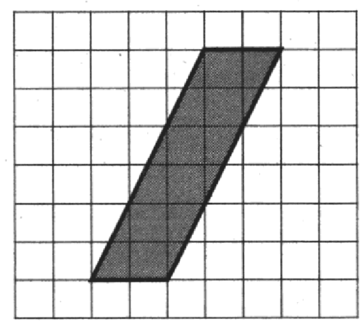
3.1.1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C.



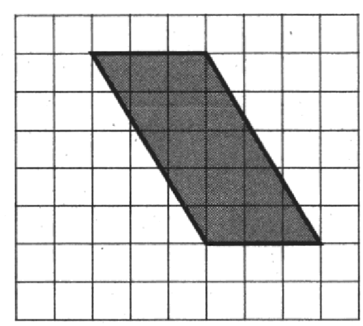
3.1.2. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C.



3.1.3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите длину его большей высоты.



3.1.4. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите длину его большей высоты.



3.1.5. Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 21. Найдите гипотенузу.

3.1.6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 15. Один из его катетов равен 9. Найдите другой катет.

3.1.7. Периметр параллелограмма равен 56. Одна сторона параллелограмма на 3 больше другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

3.1.8. Две стороны параллелограмма относятся как $3:4$, а периметр его равен 70. Найдите большую сторону параллелограмма.

3.1.9. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $1:3$, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 60.

3.1.10. Найдите диагональ прямоугольника, две стороны которого равны 5 и 12.

3.1.11. Найдите диагональ прямоугольника, две стороны которого равны 6 и 8.

3.1.12. Средняя линия трапеции равна 35, а меньшее основание равно 27. Найдите большее основание трапеции.

3.1.13. Средняя линия трапеции равна 29, а одно из её оснований больше другого на 14. Найдите большее основание трапеции.

3.1.14. Основания трапеции равны 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.

3.1.15. Основания трапеции равны 12 и 37. Найдите меньший из отрезков, на которые делит среднюю линию трапеции одна из её диагоналей.

3.1.16. Периметр трапеции равен 40, а сумма непараллельных сторон равна 20. Найдите среднюю линию трапеции.

3.1.17. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 10. Найдите её среднюю линию.

3.1.18. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 22 и 15. Найдите среднюю линию этой трапеции.

3.1.19. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 17 и 126. Найдите среднюю линию этой трапеции.

3.1.20. Основания трапеции равны 10 и 24. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

3.1.21. Основания трапеции равны 13 и 47. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

3.1.22. Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 8, отсекает треугольник, периметр которого равен 17. Найдите периметр трапеции.

3.1.23. Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 5, отсекает треугольник, периметр которого равен 24. Найдите периметр трапеции.

3.1.24. Диагонали четырёхугольника равны 7 и 25. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырёхугольника.

3.1.25. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 30. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

3.1.26. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 47. Найдите гипотенузу этого треугольника.

3.1.27. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AC = 8$, $BC = 15$. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

3.1.28. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC = 2\sqrt{15}$. Радиус описанной окружности этого треугольника равен 8. Найдите AC.

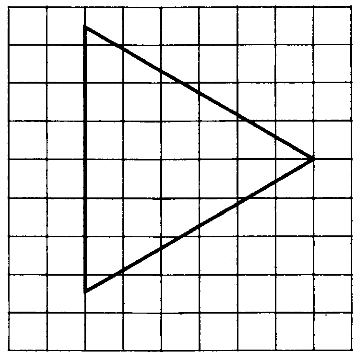
3.1.29. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 5$, $CD = 15$. Найдите периметр четырёхугольника.

3.1.30. Периметр четырёхугольника, описанного около окружности, равен 74, две его стороны равны 21 и 25. Найдите большую из оставшихся сторон.

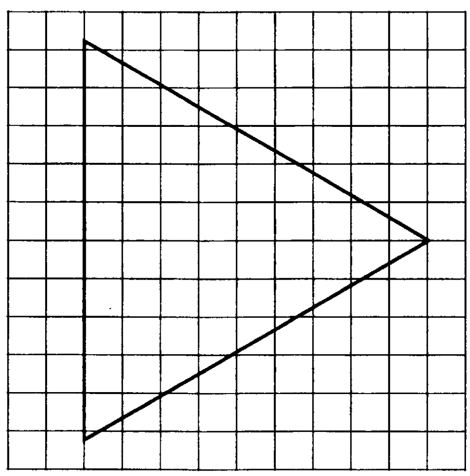
3.1.31. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $BC = 6$ и $CD = 16$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

3.1.32. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 23$, $BC = 27$, $CD = 15$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

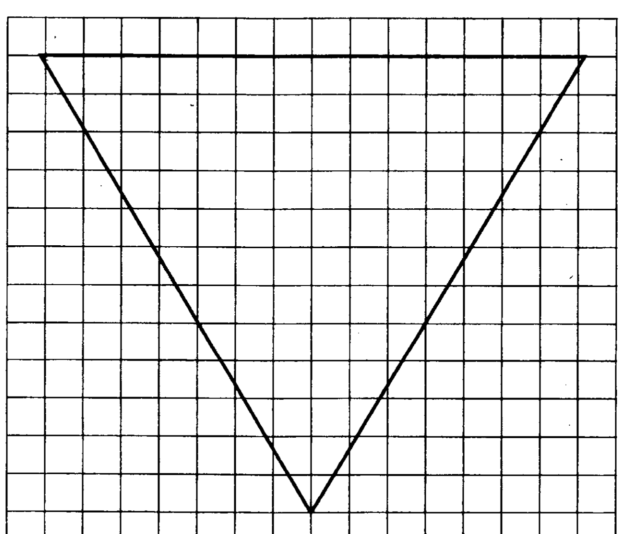
3.1.33. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



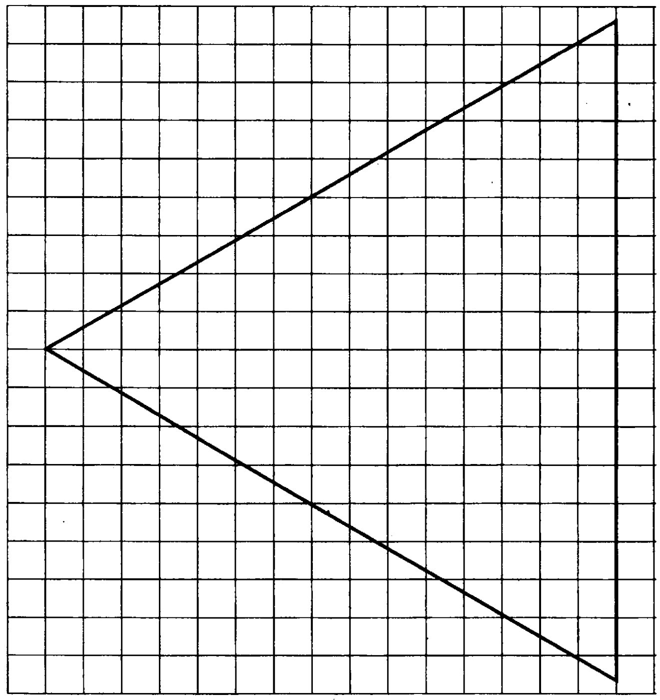
3.1.34. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



3.1.35. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус вписанной в него окружности.



3.1.36. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус вписанной в него окружности.



3.1.37. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 100, её большая боковая сторона равна 30. Найдите радиус окружности.

3.1.38. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 100, её большая боковая сторона равна 31. Найдите радиус окружности.

3.1.39. Основания равнобедренной трапеции равны 24 и 10. Радиус описанной окружности равен 13. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.

3.1.40. Основания равнобедренной трапеции равны 16 и 12. Радиус описанной окружности равен 10. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.

3.2. Углы

3.2.1. Один острый угол прямоугольного треугольника на 86° больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

3.2.2. Один острый угол прямоугольного треугольника на 56° больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

3.2.3. В треугольнике ABC угол A равен 77°, $AC = BC$. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

3.2.4. В треугольнике ABC угол C равен 66°, $AC = BC$. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.

3.2.5. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 74°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

3.2.6. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внешний угол при вершине B равен 128°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

3.2.7. Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 12°. Найдите этот третий угол. Ответ дайте в градусах.

3.2.8. Сумма двух углов треугольника и внешнего угла к третьему равна 250°. Найдите этот третий угол. Ответ дайте в градусах.

3.2.9. Один острый угол прямоугольного треугольника в 5 раз больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

3.2.10. Один острый угол прямоугольного треугольника в 4 раза больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

3.2.11. Один угол равнобедренного треугольника на 99° больше другого. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.

3.2.12. Один из внешних углов треугольника равен 49°. Углы, не смежные с данным внешним углом, относятся как $1:6$. Найдите наибольший из них. Ответ дайте в градусах.

3.2.13. В треугольнике ABC угол C равен 65°, AD — биссектриса, угол CAD равен 35°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

3.2.14. В треугольнике ABC угол C равен 63°, AD — биссектриса, угол CAD равен 31°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

3.2.15. В треугольнике ABC $AC = BC$, AD — высота, угол BAD равен 28°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

3.2.16. В треугольнике ABC $AB = BC$, AD — высота, угол BAD равен 29°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.

3.2.17. В треугольнике ABC CD — медиана, угол ACB равен 90°, угол B равен 22°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.

3.2.18. В треугольнике ABC CD — медиана, угол ACB равен 90°, угол B равен 54°. Найдите угол ACD. Ответ дайте в градусах.

3.2.19. Острые углы прямоугольного треугольника равны 58° и 32°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

3.2.20. Острые углы прямоугольного треугольника равны 86° и 4°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

3.2.21. Острые углы прямоугольного треугольника равны 46° и 44°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

3.2.22. Два угла треугольника равны 43° и 80°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.

3.2.23. В треугольнике ABC угол C равен 6°, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

3.2.24. Найдите тупой угол параллелограмма, если его острый угол равен 29°. Ответ дайте в градусах.

3.2.25. Сумма двух углов параллелограмма равна 10°. Найдите один из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

3.2.26. Сумма двух углов параллелограмма равна 126°. Найдите один из оставшихся углов. Ответ дайте в градумах.

3.2.27. Один угол параллелограмма больше другого на 28°. Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.

3.2.28. Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 68°. Ответ дайте в градусах.

3.2.29. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{4}$ окружности. Ответ дайте в градусах.

3.2.30. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{6}$ окружности. Ответ дайте в градусах.

3.2.31. Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет 125°. А дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет 79°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

3.2.32. Центральный угол на 48° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

3.2.33. Найдите центральный угол AOB, если он на 62° больше вписанного угла ACB, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.

3.2.34. AC и BD — диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 32°. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.

3.2.35. AC и BD — диаметры окружности с центром O. Центральный угол AOD равен 84°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

3.2.36. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 116°. Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

3.2.37. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 117° и 153°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

3.2.38. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 44°, угол CAD равен 36°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

3.2.39. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 28°, угол CAD равен 44°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.

3.2.40. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 92°, угол ABD равен 54°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.

3.2.41. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 52°, угол ABD равен 34°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.

3.2.42. Хорда AB стягивает дугу окружности в 120°. Найдите угол между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B. Ответ дайте в градусах.

3.2.43. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 87°. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB. Ответ дайте в градусах.

3.2.44. Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности в точке A, O — центр окружности, отрезок OC пересекает окружность в точке B, а меньшая дуга окружности AB, заключённая внутри этого угла, равна 58°. Ответ дайте в градусах.

3.2.45. Угол ACO равен 20°. Его сторона CA касается в точке A окружности с центром O. Прямая CO пересекает окружность в точках B и D, точка B лежит между C и O. Найдите градусную величину дуги AD окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.

3.2.46. Точки A и B лежат на окружности. Точка C лежит вне неё, причём отрезок AC пересекает окружность в точке D, а отрезок BC — в точке E. Найдите угол ACB, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118° и 38°. Ответ дайте в градусах.

3.2.47. Точки A и B лежат на окружности. Точка C лежит вне неё, причём отрезок AC пересекает окружность в точке D, а отрезок BC — в точке E. Угол ACB равен 48°. Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек D и E, равна 162°. Найдите угол DAE. Ответ дайте в градусах.

3.2.48. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен 28°. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

3.2.49. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен 53°. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

3.3. Тригонометрия

3.3.1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{3\sqrt{11}}{10}$. Найдите $\cos A$.

3.3.2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите $\cos A$.

3.3.3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

3.3.4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{12}{13}$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

3.3.5. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Найдите $\cos A$.

3.3.6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = 0{,}8$. Найдите $\sin B$.

3.3.7. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = 0{,}28$. Найдите $\sin B$.

3.3.8. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите $\cos B$.

3.3.9. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{5}{\sqrt{41}}$. Найдите $\operatorname{tg} B$.

3.3.10. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Найдите $\cos B$.

3.3.11. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 4$, $\sin A = 0{,}75$. Найдите BC.

3.3.12. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 9$, $\sin A = 0{,}3$. Найдите BC.

3.3.13. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $BC = 2$, $\operatorname{tg} A = 0{,}5$. Найдите AC.

3.3.14. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $BC = 8$, $\operatorname{tg} A = 1{,}6$. Найдите AC.

3.3.15. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 5$, $\cos B = \frac{3}{5}$. Найдите AC.

3.3.16. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 10$, $\cos B = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Найдите AC.

3.3.17. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = 0{,}6$, $AC = 12$. Найдите AB.

3.3.18. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 8$, $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите AB.

3.3.19. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 10$, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{21}}{2}$. Найдите AC.

3.3.20. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 20$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$. Найдите BC.

3.3.21. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 20$, $BC = 14$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

3.3.22. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = \sqrt{51}$, $BC = 7$. Найдите $\sin A$.

3.3.23. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\cos A = 0{,}4$. Найдите AB.

3.3.24. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 4$, $\cos A = 0{,}1$. Найдите AC.

3.3.25. В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 15$, $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите AC.

3.3.26. В треугольнике ABC $AC = BC = 10$, $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$. Найдите AB.

3.3.27. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота CH равна 3, $\operatorname{tg} A = 0{,}25$. Найдите AB.

3.3.28. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота CH равна 2, $\operatorname{tg} A = 0{,}25$. Найдите AB.

3.3.29. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота CH равна 1, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{20}}{5}$. Найдите AC.

3.3.30. В треугольнике ABC $AC = BC$, высота CH равна 9, $\operatorname{tg} A = \frac{15}{8}$. Найдите AC.

3.3.31. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = 0{,}7$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

3.3.32. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = 0{,}55$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

3.3.33. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = 0{,}4$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

3.3.34. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = 0{,}37$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

3.3.35. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = 3$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

3.3.36. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = 8$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

3.3.37. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = \frac{2}{5}$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине B.

3.3.38. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos B = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

3.3.39. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{4}{5}$. Найдите синус внешнего угла при вершине B.

3.3.40. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 4$, $BC = 2$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

3.3.41. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 120$, $BC = 35$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

3.3.42. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 12$, $\cos A = \frac{1}{2}$. Найдите AH.

3.3.43. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 25$, $\sin A = \frac{4}{5}$. Найдите AH.

3.3.44. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 26$, $\mathrm{tg} A = \frac{2}{3}$. Найдите AH.

3.3.45. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $BC = 14$, $\sin A = \frac{4}{7}$. Найдите AH.

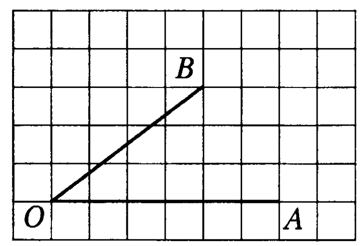
3.3.46. В параллелограмме $ABCD$ $\sin C = \frac{1}{3}$, $AD = 6$. Найдите высоту, опущенную на сторону AB.

3.3.47. В параллелограмме $ABCD$ высота, опущенная на сторону AB, равна 9, $\sin A = \frac{3}{4}$. Найдите AD.

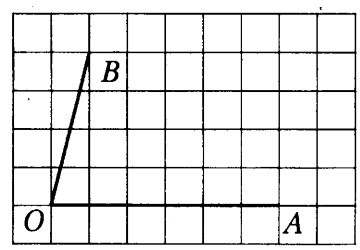
3.3.48. Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 52. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.

3.3.49. Основания равнобедренной трапеции равны 27 и 43. Косинус острого угла трапеции равен $\frac{8}{9}$. Найдите боковую сторону.

3.3.50. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



3.3.51. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



3.4. Площади

3.4.1. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны 14 и 8.

3.4.2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны 6 и 12.

3.4.3. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $30°$. Боковая сторона треугольника равна 22. Найдите площадь этого треугольника.

3.4.4. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $150°$. Боковая сторона треугольника равна 40. Найдите площадь этого треугольника.

3.4.5. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 12 и 4, а угол между ними равен $30°$.

3.4.6. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 15 и 8, а угол между ними равен $150°$.

3.4.7. Площадь треугольника ABC равна 100. DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.

3.4.8. Площадь треугольника ABC равна 256. DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.

3.4.9. Площадь треугольника ABC равна 35, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.

3.4.10. Площадь треугольника ABC равна 170, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.

3.4.11. Периметр треугольника равен 24, а радиус вписанной окружности равен 4. Найдите площадь этого треугольника.

3.4.12. Периметр треугольника равен 78, а радиус вписанной окружности равен 6. Найдите площадь этого треугольника.

3.4.13. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 24 и 25.

3.4.14. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 20, а основание равно 24. Найдите площадь этого треугольника.

3.4.15. В треугольнике со сторонами 3 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой их этих сторон, равна 2. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

3.4.16. В треугольнике со сторонами 8 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой их этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

3.4.17. Стороны параллелограмма равны 10 и 70. Высота, опущенная на первую из этих сторон, равна 42. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

3.4.18. Стороны параллелограмма равны 2 и 4. Высота, опущенная на первую из этих сторон, равна 3. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

3.4.19. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 12 и 6.

3.4.20. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 5 и 18.

3.4.21. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 32, а один из углов равен 150°.

3.4.22. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 23, а один из углов равен 30°.

3.4.23. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 18 и 11, а угол между ними равен 30°.

3.4.24. Найдите площадь параллелограмма, если две его стороны равны 7 и 17, а угол между ними равен 150°.

3.4.25. Основания трапеции равны 24 и 18, высота — 4. Найдите площадь трапеции.

3.4.26. Основания трапеции равны 5 и 22, высота — 2. Найдите площадь трапеции.

3.4.27. Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 5 и 2. Найдите площадь трапеции.

3.4.28. Средняя линия и высота трапеции равны соответственно 6 и 13. Найдите площадь трапеции.

3.4.29. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 242.

3.4.30. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 648.

3.4.31. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 18 и 32.

3.4.32. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 11 и 44.

3.4.33. Периметры двух подобных многоугольников относятся как $4:7$. Площадь меньшего многоугольника равна 16. Найдите площадь большего многоугольника.

3.4.34. Периметры двух подобных многоугольников относятся как $3:5$. Площадь меньшего многоугольника равна 18. Найдите площадь большего многоугольника.

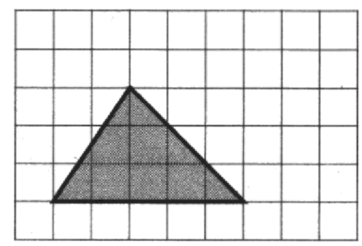
3.4.35. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 16, а отношение соседних сторон равно $1:4$.

3.4.36. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 8, а отношение соседних сторон равно $1:2$.

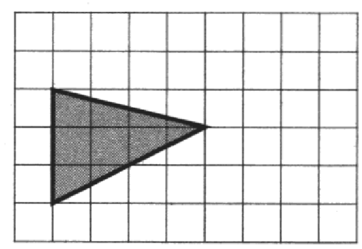
3.4.37. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна $\sqrt{\pi}$.

3.4.38. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна $50\sqrt{\pi}$.

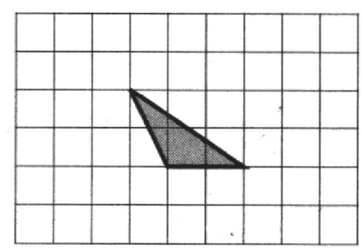
3.4.39. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).



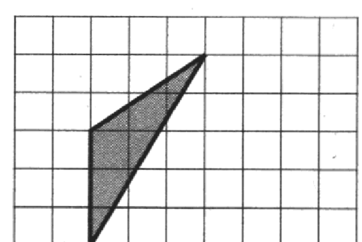
3.4.40. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).



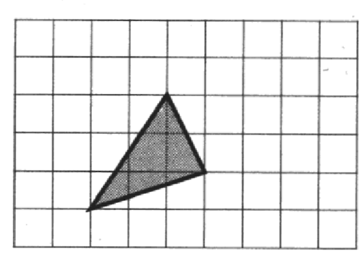
3.4.41. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).



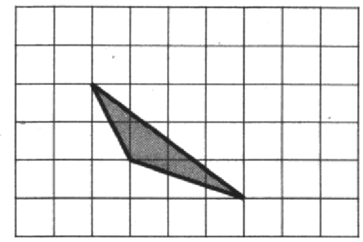
3.4.42. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).



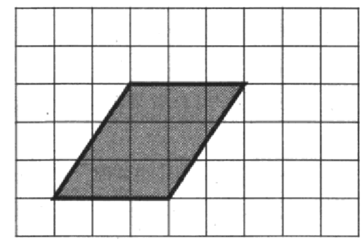
3.4.43. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).



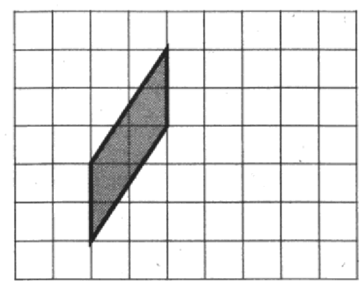
3.4.44. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).



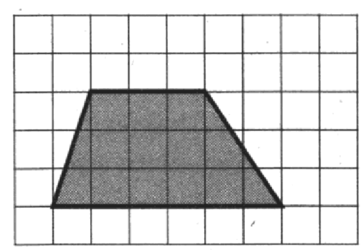
3.4.45. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).



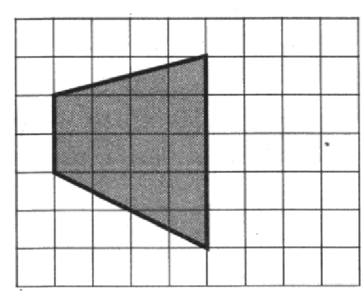
3.4.46. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).



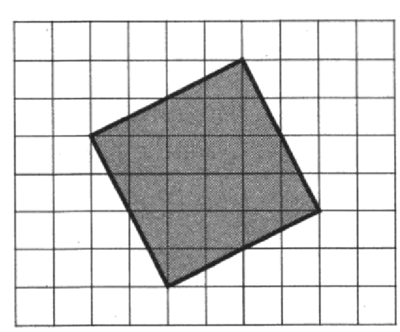
3.4.47. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



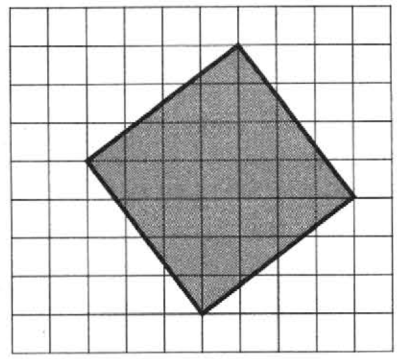
3.4.48. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).



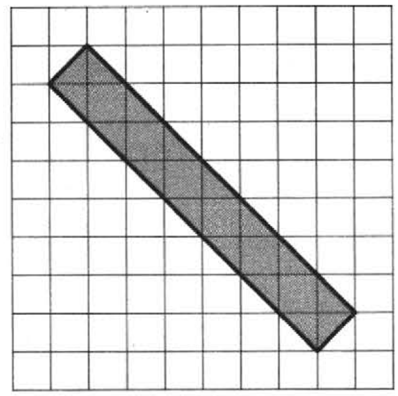
3.4.49. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите его площадь.



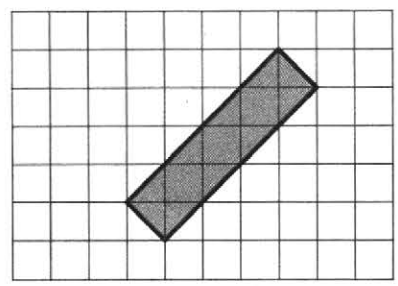
3.4.50. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите его площадь.



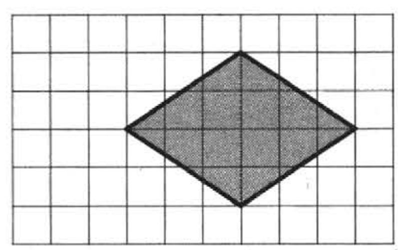
3.4.51. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольник. Найдите его площадь.



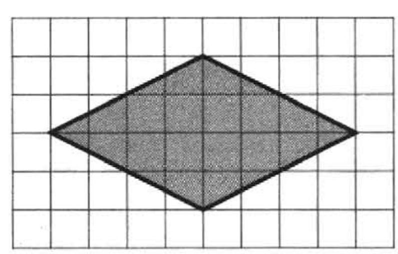
3.4.52. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён прямоугольник. Найдите его площадь.



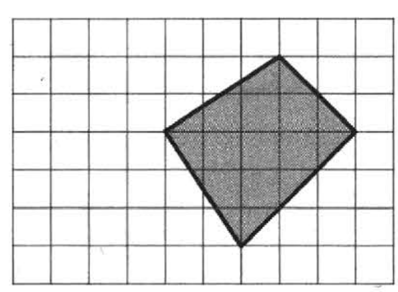
3.4.53. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



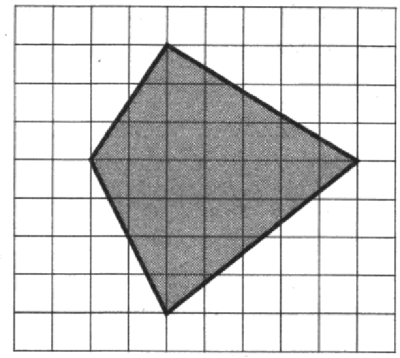
3.4.54. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



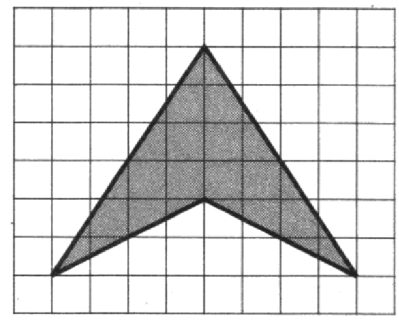
3.4.55. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



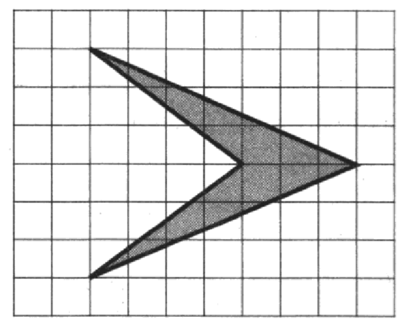
3.4.56. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



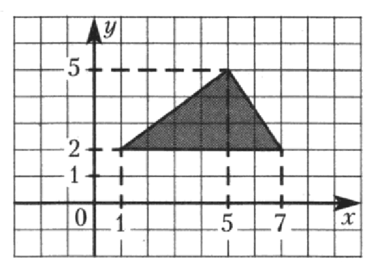
3.4.57. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



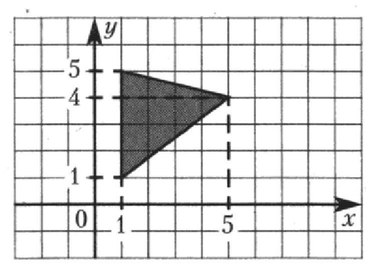
3.4.58. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь.



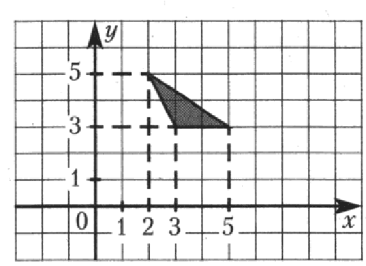
3.4.59. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 2), (7; 2), (5; 5).



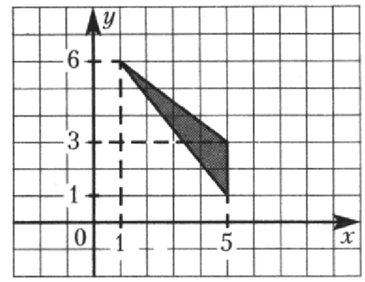
3.4.60. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 1), (5; 4), (1; 5).



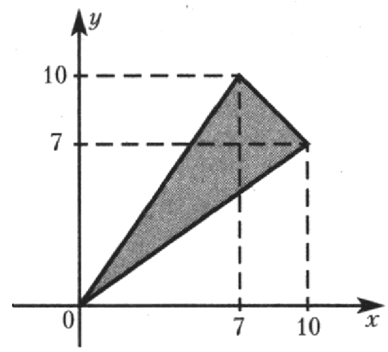
3.4.61. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (3; 3), (5; 3), (2; 5).



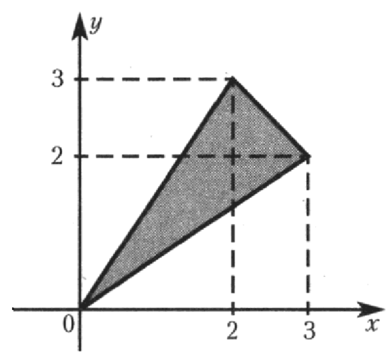
3.4.62. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (5; 1), (5; 3), (1; 6).



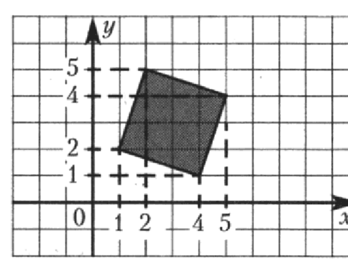
3.4.63. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (0; 0), (10; 7), (7; 10).



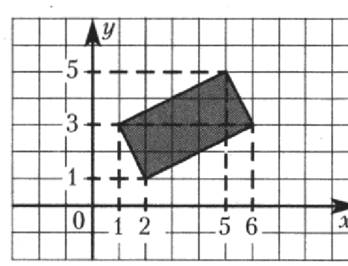
3.4.64. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (0; 0), (2; 3), (3; 2).



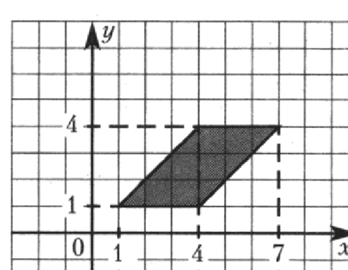
3.4.65. Найдите площадь квадрата, вершины которого имеют координаты (4; 1), (5; 4), (2; 5), (1; 2).



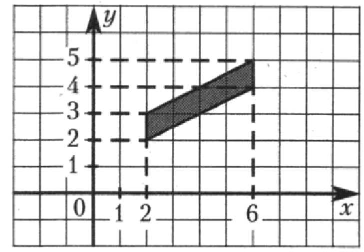
3.4.66. Найдите площадь прямоугольника, вершины которого имеют координаты (2; 1), (6; 3), (5; 5), (1; 3).



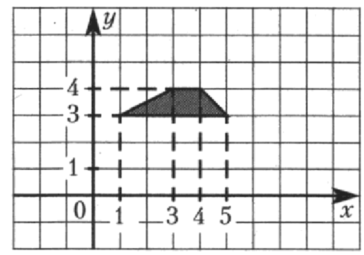
3.4.67. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (1; 1), (4; 1), (7; 4), (4; 4).



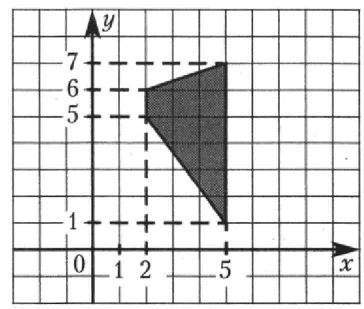
3.4.68. Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (6; 4), (6; 5), (2; 3), (2; 2).



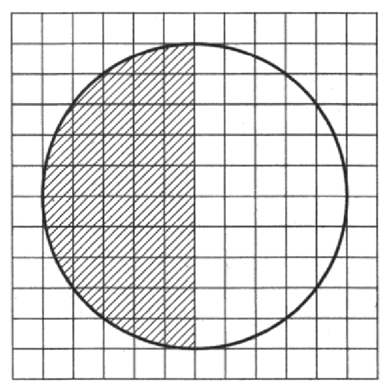
3.4.69. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 3), (5; 3), (4; 4), (3; 4).



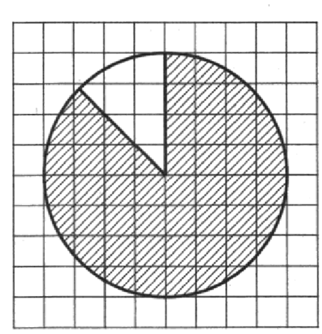
3.4.70. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (5; 1), (5; 7), (2; 6), (2; 5).



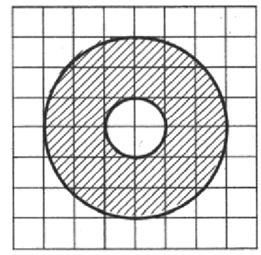
3.4.71. На клетчатой бумаге нарисован круг площадью 76. Найдите площадь заштрихованного сектора.



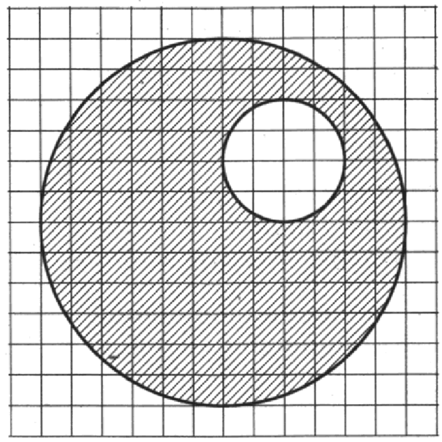
3.4.72. На клетчатой бумаге изображён круг. Какова площадь круга, если площадь заштрихованного сектора равна 14?



3.4.73. На клетчатой бумаге нарисованы два круга. Площадь внутреннего круга равна 33. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



3.4.74. На клетчатой бумаге нарисовано два круга. Площадь внутреннего круга равна 4. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



3.5. Стереометрия

3.5.1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми BC_1 и A_1C_1. Ответ дайте в градусах.

3.5.2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра AD, точка M — середина ребра AA_1. Найдите угол LMK. Ответ дайте в градусах.

3.5.3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 6, найдите угол между прямыми DE и F_1A_1. Ответ дайте в градусах.

3.5.4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AB = 6$, $AD = 18$, $AA_1 = 8$. Найдите синус угла между прямыми C_1D и AB.

3.5.5. Найдите расстояние между вершинами B и D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 7$.

3.5.6. Найдите расстояние между вершинами A и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которого $AB = 9$, $AD = 12$, $AA_1 = 5$.

3.5.7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $D_1C_1 = 1$, $BB_1 = 2$, $B_1C_1 = 2$. Найдите длину диагонали C_1A.

3.5.8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $CD = 4$, $B_1C_1 = 12$, $DD_1 = 3$. Найдите длину диагонали DB_1.

3.5.9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AC_1 = \sqrt{14}$, $BB_1 = 1$, $A_1D_1 = 3$. Найдите длину ребра DC.

3.5.10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BD_1 = 3\sqrt{2}$, $C_1D_1 = 4$, $BC = 1$. Найдите длину ребра DD_1.

3.5.11. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 7. Найдите расстояние между точками C и F.

3.5.12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 4. Найдите расстояние между точками E и A_1.

3.5.13. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SC = 25$, $BD = 14$. Найдите длину отрезка SO.

3.5.14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 30$, $SA = 34$. Найдите длину отрезка AC.

3.5.15. В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 10, а сторона основания равна $8\sqrt{2}$. Найдите высоту пирамиды.

3.5.16. В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 13, а сторона основания равна 5. Найдите высоту пирамиды.

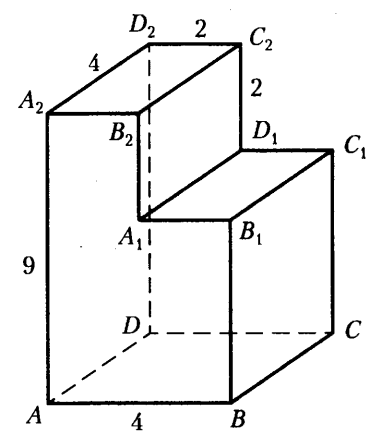
3.5.17. Высота конуса равна 5, а диаметр основания — 24. Найдите образующую конуса.

3.5.18. Высота конуса равна 16, а длина образующей — 34. Найдите диаметр основания конуса.

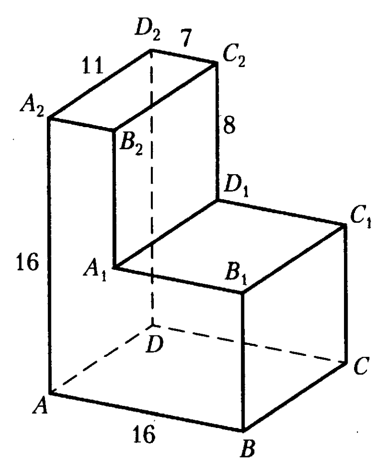
3.5.19. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Образующая конуса равна $78\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

3.5.20. Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $55\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

3.5.21. Найдите расстояние между вершинами D_2 и B_1 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



3.5.22. Найдите расстояние между вершинами D и B_1 многогранника, изображённого на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



3.5.23. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $CD = 2$, ребро $BC = \sqrt{5}$, ребро $CC_1 = 2$. Точка K — середина ребра DD_1. Найдите площадь сечения, проходящего через точки C_1, B_1 и K.

3.5.24. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 12$, $AD = 16$, $AA_1 = 13$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины D, D_1 и B.

3.5.25. Рёбра правильного тетраэдра равны 17. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер.

3.5.26. Рёбра правильного тетраэдра равны 24. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер.

3.5.27. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 25. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

3.5.28. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 32. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

3.5.29. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 8, боковые рёбра равны 20. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.

3.5.30. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 11, боковые рёбра равны 1. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.

3.5.31. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 17$, $AD = 15$, $AA_1 = 8$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.

3.5.32. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 20$, $AD = 16$, $AA_1 = 12$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.

3.5.33. Площадь основания конуса равна 81π, высота — 2. Найдите площадь осевого сечения конуса.

3.5.34. Площадь основания конуса равна 49π, высота — 5. Найдите площадь осевого сечения конуса.

3.5.35. Высота конуса равна 8, а длина образующей — 17. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

3.5.36. Диаметр основания конуса равен 8, а длина образующей — 5. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

3.5.37. Рёбра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2 и 6. Найдите площадь его поверхности.

3.5.38. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 10 и 5. Диагональ параллелепипеда равна 15. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

3.5.39. Площадь поверхности куба равна 200. Найдите его диагональ.

3.5.40. Площадь поверхности куба равна 72. Найдите его диагональ.

3.5.41. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 3, а высота — 6.

3.5.42. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 5.

3.5.43. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 6 и 8. Площадь поверхности параллелепипеда равна 768. Найдите его диагональ.

3.5.44. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 12 и 16. Площадь поверхности параллелепипеда равна 3072. Найдите его диагональ.

3.5.45. Если каждое ребро куба увеличить на 2, то его площадь поверхности увеличится на 192. Найдите ребро куба.

3.5.46. Если каждое ребро куба увеличить на 2, то его площадь поверхности увеличится на 144. Найдите ребро куба.

3.5.47. Найдите боковое ребро правильной четырёхугольной призмы, если сторона её основания равна 20, а площадь поверхности равна 1760.

3.5.48. Найдите боковое ребро правильной четырёхугольной призмы, если сторона её основания равна 30, а площадь поверхности равна 2760.

3.5.49. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4, высота призмы равна 6. Найдите площадь её поверхности.

3.5.50. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 9 и 12, и боковым ребром, равным 6.

3.5.51. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 12, боковые рёбра равны 10. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

3.5.52. Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 24, а высота равна 5.

3.5.53. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые рёбра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

3.5.54. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 16, боковые рёбра равны 17. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

3.5.55. Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 8. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3.5.56. Длина окружности основания цилиндра равна 9, высота равна 11. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3.5.57. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 6. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

3.5.58. Длина окружности основания конуса равна 7, образующая равна 26. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

3.5.59. Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 10. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

3.5.60. Правильная четырёхугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 12. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

3.5.61. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $19\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

3.5.62. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $41\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

3.5.63. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

3.5.64. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 57. Найдите площадь поверхности шара.

3.5.65. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 3 раза?

3.5.66. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 11 раз?

3.5.67. Радиусы двух шаров равны 24 и 32. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

3.5.68. Радиусы двух шаров равны 24 и 45. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

3.5.69. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 6 и 36. Найдите ребро равновеликого ему куба.

3.5.70. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4 и 64. Найдите ребро равновеликого ему куба.

3.5.71. Найдите объём правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 4, а боковые ребра равны $3\sqrt{3}$.

3.5.72. Найдите объём правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 6, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.

3.5.73. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 2 и 3, боковое ребро равно 6. Найдите объём призмы.

3.5.74. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12, боковое ребро равно 10. Найдите объём призмы.

3.5.75. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 7. Найдите её объём.

3.5.76. Найдите объём пирамиды, высота которой равна 1, а основание — прямоугольник со сторонами 2 и 3.

3.5.77. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объём пирамиды.

3.5.78. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 12, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объём пирамиды.

3.5.79. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 2 и 3, объём призмы равен 18. Найдите боковое ребро призмы.

3.5.80. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 6, объём призмы равен 48. Найдите боковое ребро призмы.

3.5.81. Найдите объём пирамиды, высота которой равна 6, а основание — прямоугольник со сторонами 7 и 16.

3.5.82. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 8, а высота равна $\sqrt{3}$.

3.5.83. Высота конуса равна 7, образующая равна 10. Найдите его объём, делённый на π.

3.5.84. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 21. Найдите объём треугольной пирамиды B_1ABC.

3.5.85. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 66. Найдите объём треугольной пирамиды $BA_1B_1C_1$.

3.5.86. Найдите объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если объём треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 21.

3.5.87. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 3. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.

3.5.88. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, C, D, C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 9$, $AD = 10$, $AA_1 = 3$.

3.5.89. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, C, D, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 9$, $AD = 12$, $AA_1 = 5$.

3.5.90. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, D, A_1, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $AD = 5$, $AA_1 = 4$.

3.5.91. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $AD = 9$, $AA_1 = 3$.

3.5.92. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 6.

3.5.93. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 15, а боковое ребро равно 7.

3.5.94. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 7, а боковое ребро равно 9.

3.5.95. От треугольной призмы, объём которой равен 9, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объём оставшейся части.

3.5.96. Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 196. Точка E — середина ребра SB. Найдите объём треугольной пирамиды $EABC$.

3.5.97. От треугольной пирамиды, объём которой равен 84, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.

3.5.98. Объём треугольной пирамиды равен 10. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении $2:3$, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

3.5.99. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 4,5. Найдите объём параллелепипеда.

3.5.100. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 3,5. Найдите его объём.

3.5.101. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 5. Найдите его объём.

3.5.102. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 5. Боковые рёбра равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

3.5.103. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 7 и 9. Боковые рёбра равны $\frac{10}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.

3.5.104. Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 84.

3.5.105. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объём конуса, если объём цилиндра равен 9.

3.5.106. Цилиндр описан около шара. Объём цилиндра равен 78. Найдите объём шара.

3.5.107. Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 66. Найдите объём цилиндра.

3.5.108. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 24. Найдите объём конуса.

3.5.109. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 60. Найдите объём шара.

3.5.110. В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

3.5.111. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1200 см^3 воды и полностью в неё погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 28 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.

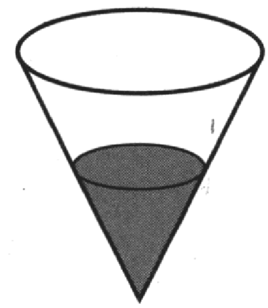
3.5.112. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 20 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

3.5.113. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 36 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.

3.5.114. Объём первого цилиндра равен 72 см^3. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания — в 4 раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

3.5.115. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.

3.5.116. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 45 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



3.5.117. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 10 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

3.5.118. Во сколько раз увеличится объём шара, если его радиус увеличить в четыре раза?

3.5.119. Во сколько раз увеличится объём шара, если его радиус увеличить в пять раза?

4. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4.1. Геометрический и физический смысл производной

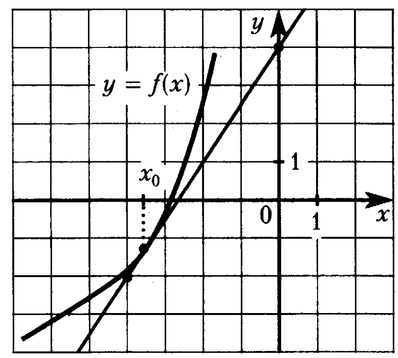
4.1.1. Прямая $y = 8x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

4.1.2. Прямая $y = 7x + 4$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 4x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

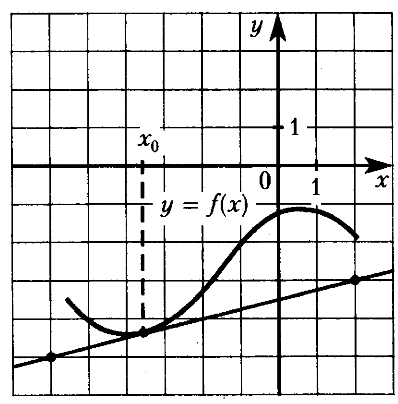
4.1.3. Прямая $y = 6x - 9$ является касательной к графику функции $y = x^3 - x^2 + 6x - 9$. Найдите абсциссу точки касания.

4.1.4. Прямая $y = 3x - 2$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 7$. Найдите абсциссу точки касания.

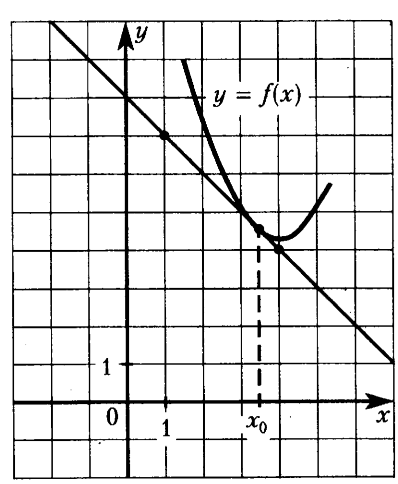
4.1.5. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



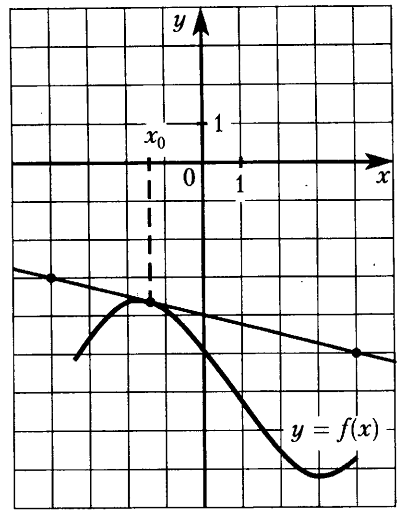
4.1.6. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



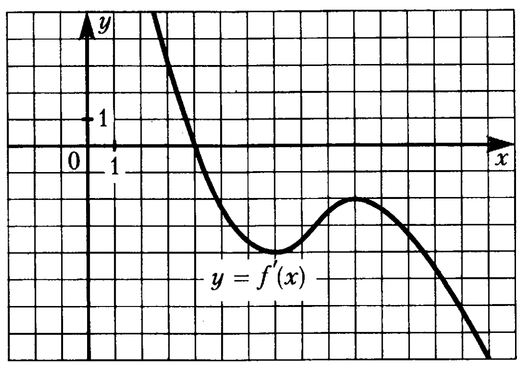
4.1.7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



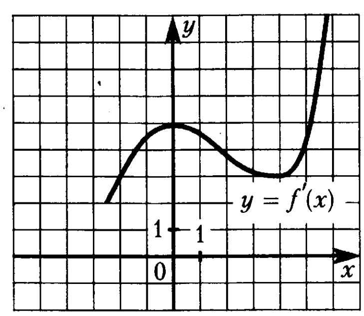
4.1.8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



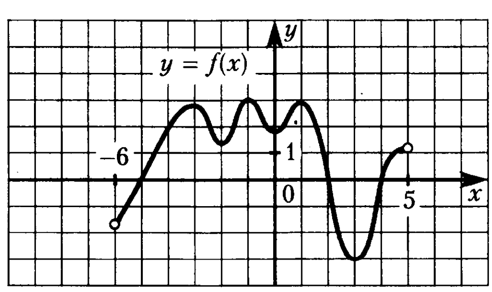
4.1.9. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



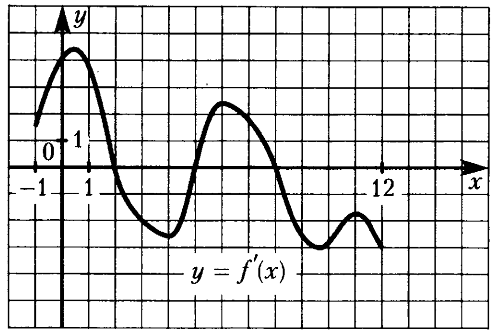
4.1.10. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.



4.1.11. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -8$.



4.1.12. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 15$ или совпадает с ней.



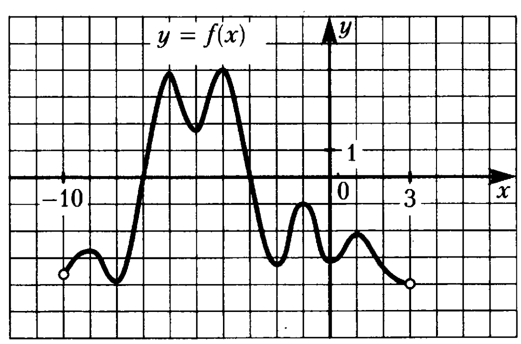
4.1.13. Прямая $y = -5x + 7$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 - 29x + 19$. Найдите a.

4.1.14. Прямая $y = -7x - 9$ является касательной к графику функции $f(x) = 4x^2 + bx$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

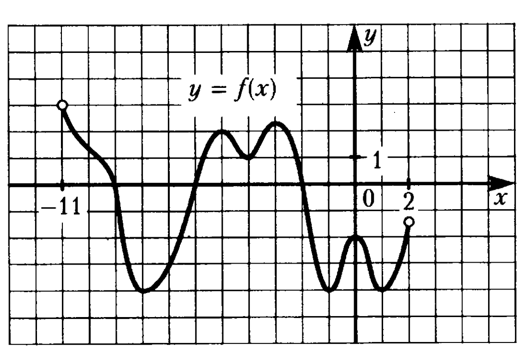
4.1.15. Прямая $y = -4x - 8$ является касательной к графику функции $f(x) = 9x^2 + bx + 1$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

4.1.16. Прямая $y = 3x - 8$ является касательной к графику функции $f(x) = 10x^2 + 23x + c$. Найдите c.

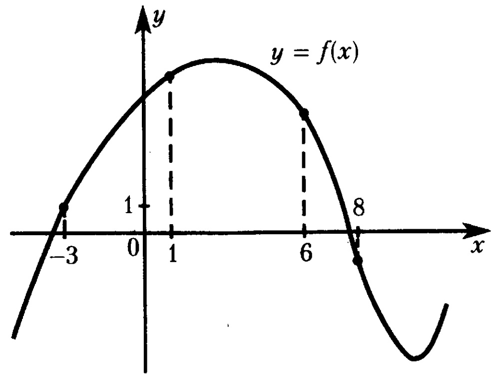
4.1.17. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 3)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -3$.



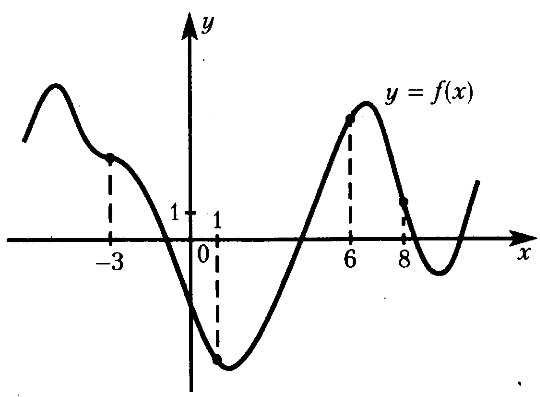
4.1.18. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -6$.



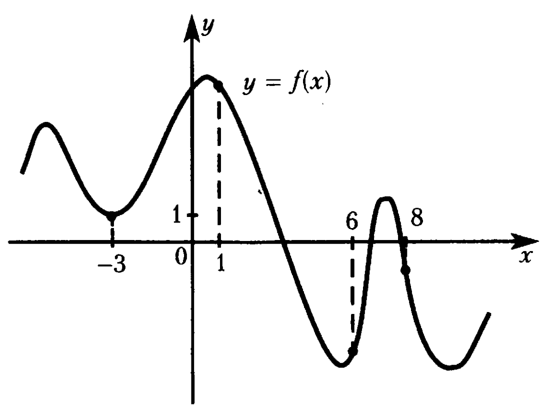
4.1.19. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, 1, 6, 8. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



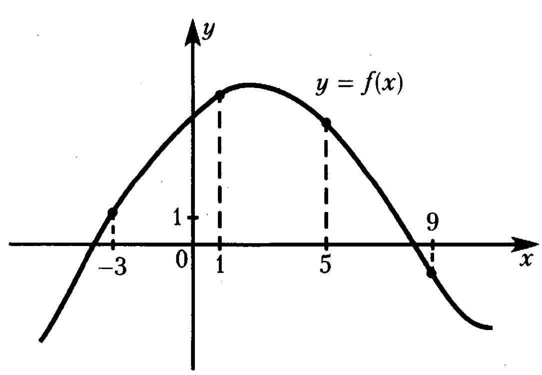
4.1.20. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, 1, 6, 8. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



4.1.21. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, 1, 6, 8. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



4.1.22. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3, 1, 5, 9. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



4.1.23. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^2 + 8t - 21$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.

4.1.24. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - t - 4$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 6 м/с?

4.1.25. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 + 2t^2 - 5t - 18$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.

4.1.26. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t - 8$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 15 м/с?

4.1.27. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^4 + 6t^3 - 4t^2 - 8t + 3$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 1$ с.

4.2. Техника дифференцирования

4.2.1. Найдите значение производной функции $f(x) = 3x - 1$ в точке $x_0 = -\sqrt{17}$.

4.2.2. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x}{4} + 8$ в точке $x_0 = 13$.

4.2.3. Найдите значение производной функции $f(x) = x^2 + 3$ в точке $x_0 = 4$.

4.2.4. Найдите значение производной функции $f(x) = 4x^2 - 5$ в точке $x_0 = 4$.

4.2.5. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^2}{4} - 5$ в точке $x_0 = -16$.

4.2.6. Найдите значение производной функции $f(x) = 3x^2 + 2x$ в точке $x_0 = -3$.

4.2.7. Найдите значение производной функции $f(x) = x^2 + x - 1$ в точке $x_0 = -2$.

4.2.8. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 17}{5}$ в точке $x_0 = 1$.

4.2.9. Найдите значение производной функции $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

4.2.10. Найдите значение производной функции $f(x) = 3x^3 + 18$ в точке $x_0 = \sqrt{5}$.

4.2.11. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^3}{5} + 5$ в точке $x_0 = 3$.

4.2.12. Найдите значение производной функции $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x - 14$ в точке $x_0 = 7$.

4.2.13. Найдите значение производной функции $f(x) = 4x^4 - 2x + 117$ в точке $x_0 = -2$.

4.2.14. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^4}{2} + 3x^3 + x + 11$ в точке $x_0 = -2$.

4.2.15. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^5}{3} + x^2 + \frac{x}{3} - 1{,}5$ в точке $x_0 = 2$.

4.2.16. Найдите значение производной функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$.

4.2.17. Найдите значение производной функции $f(x) = 6\sqrt{x} + 2x - 4$ в точке $x_0 = 9$.

4.2.18. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{6} - 5x^2 + \frac{x}{6} + 14$ в точке $x_0 = 1$.

4.2.19. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = -2$.

4.2.20. Найдите значение производной функции $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x}{8} + 1{,}4$ в точке $x_0 = -4$.

4.2.21. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{9}{2x} + 3x - \frac{3}{2}$ в точке $x_0 = 3$.

4.2.22. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{x} - 74{,}5$ в точке $x_0 = 2$.

4.2.23. Найдите значение производной функции $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{27}x^2 + 10{,}5x - 2$ в точке $x_0 = 2{,}25$.

4.2.24. Найдите значение производной функции $f(x) = (x-2)^2 + 2$ в точке $x_0 = 3{,}5$.

4.2.25. Найдите значение производной функции $f(x) = (3x+1)^2 - 3$ в точке $x_0 = \frac{2}{3}$.

4.2.26. Найдите значение производной функции $f(x) = (x-1)^3 + 5$ в точке $x_0 = -2$.

4.2.27. Найдите значение производной функции $f(x) = \left(\frac{1}{3}x + 2\right)^3 + 12x$ в точке $x_0 = -3$.

4.2.28. Найдите значение производной функции $f(x) = (2x+5)(-3x+1) + 4$ в точке $x_0 = 2$.

4.2.29. Найдите значение производной функции $f(x) = (x^2 - 3)(2x+1) - 144$ в точке $x_0 = -1$.

4.2.30. Найдите значение производной функции $f(x) = x\sqrt{x} + 4$ в точке $x_0 = 9$.

4.2.31. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{x}(x-3) - 14{,}5$ в точке $x_0 = 1$.

4.2.32. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{1}{x}(2x^2 + 4x - 1) + 2{,}55$ в точке $x_0 = 2$.

4.2.33. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ в точке $x_0 = -2{,}5$.

4.2.34. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x+2}$ в точке $x_0 = -1{,}5$.

4.2.35. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x - 1}$ в точке $x_0 = -2{,}5$.

4.2.36. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x+2}$ в точке $x_0 = -7$.

4.2.37. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x-3}$ в точке $x_0 = -13$.

4.2.38. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = 3$.

4.2.39. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 12x + 9}{x + 2}$ в точке $x_0 = -2{,}5$.

4.2.40. Найдите значение производной функции $f(x) = 9 \cdot \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = 0{,}25$.

4.2.41. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}$ в точке $x_0 = 0{,}25$.

4.2.42. Найдите значение производной функции $f(x) = \sin x + 1$ в точке $x_0 = 0$.

4.2.43. Найдите значение производной функции $f(x) = \cos x - 2x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

4.2.44. Найдите значение производной функции $f(x) = \operatorname{tg} x + \pi$ в точке $x_0 = \dfrac{3\pi}{4}$.

4.2.45. Найдите значение производной функции $f(x) = \operatorname{ctg} x + 3x + 8$ в точке $x_0 = -\dfrac{\pi}{6}$.

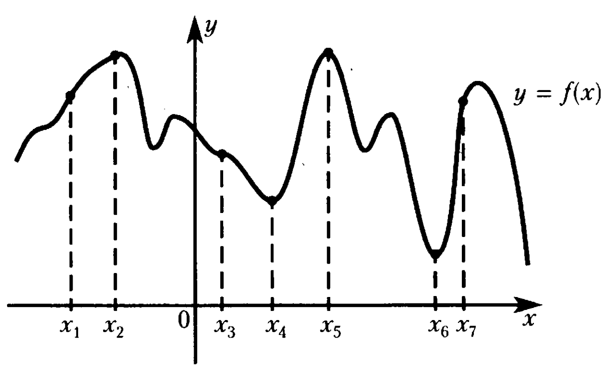
4.2.46. Найдите значение производной функции $f(x) = \sin 3x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

4.2.47. Найдите значение производной функции $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2} - 1$ в точке $x_0 = \pi$.

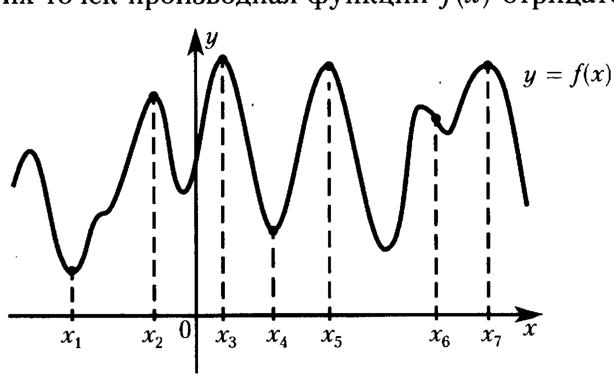
4.2.48. Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2} + 5$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

4.3. Исследование функций

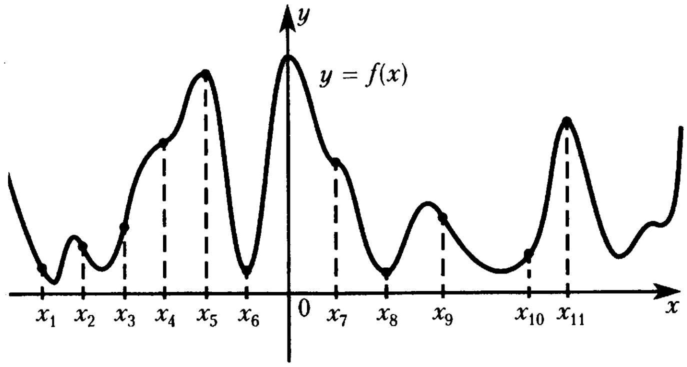
4.3.1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



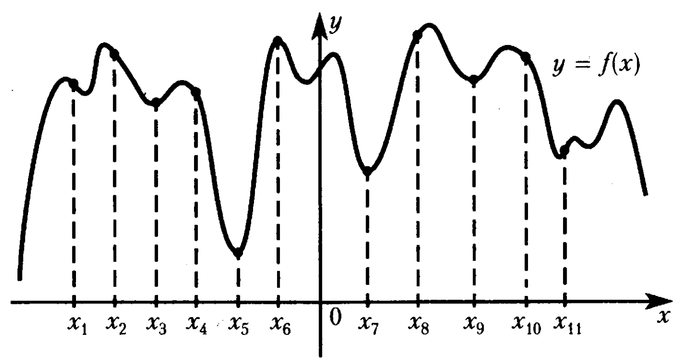
4.3.2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



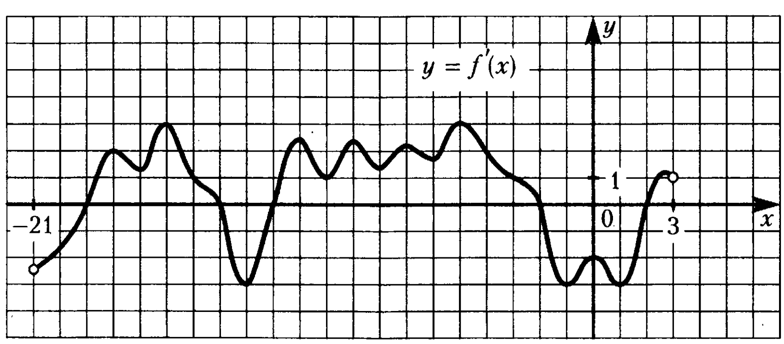
4.3.3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{11}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



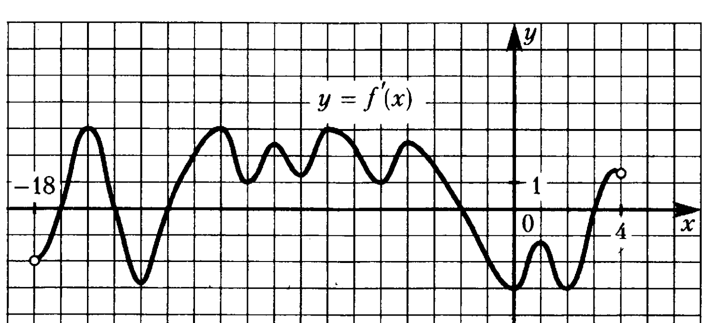
4.3.4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и одиннадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{11}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



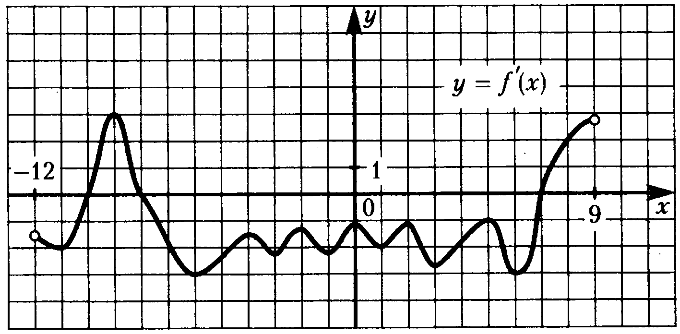
4.3.5. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-21; 3)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-20; -1]$.



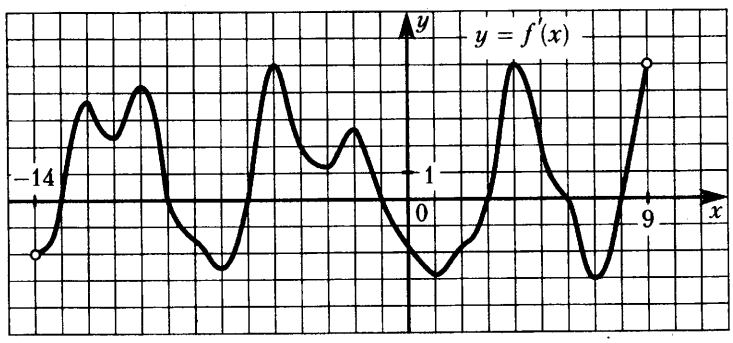
4.3.6. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-18; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-16; 2]$.



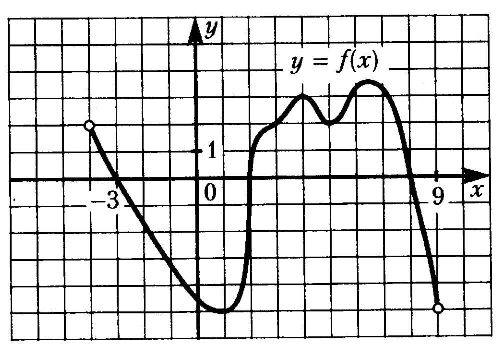
4.3.7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-9; 8]$.



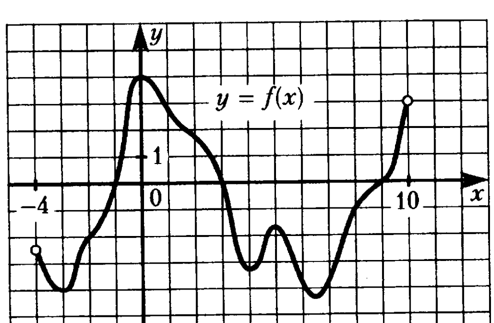
4.3.8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-14; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-12; 7]$.



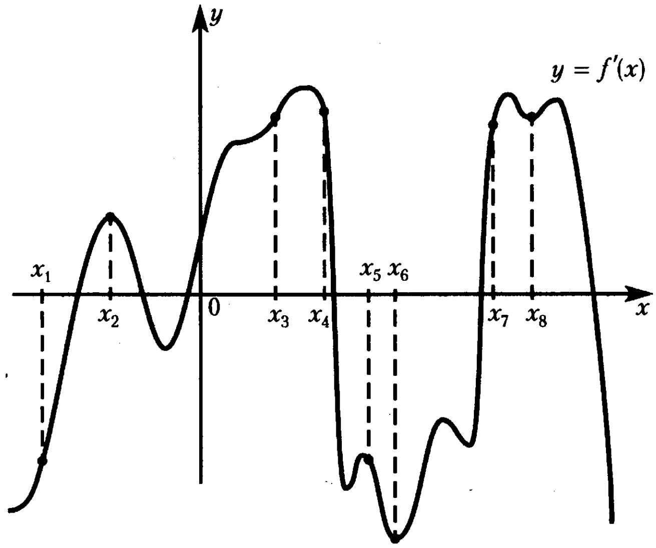
4.3.9. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 9)$. Определите количество целых точек (координата — целое число), в которых производная функции $f(x)$ положительна.



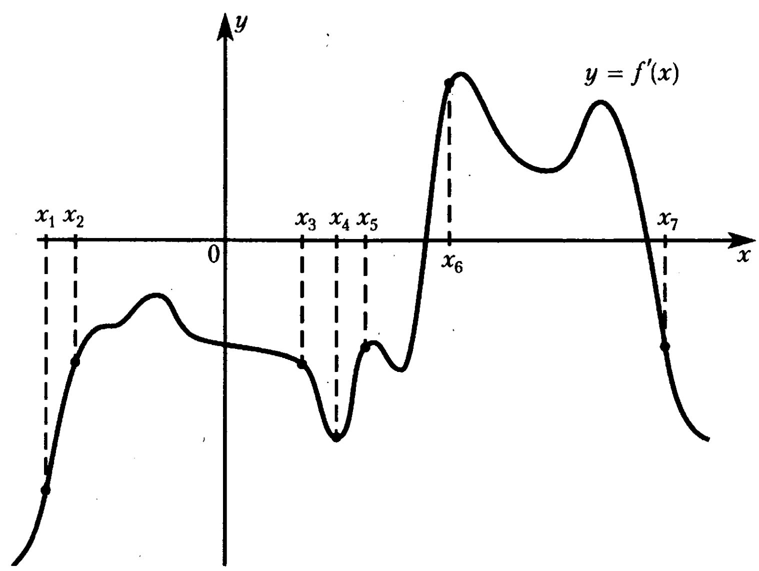
4.3.10. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 10)$. Определите количество целых точек (координата — целое число), в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



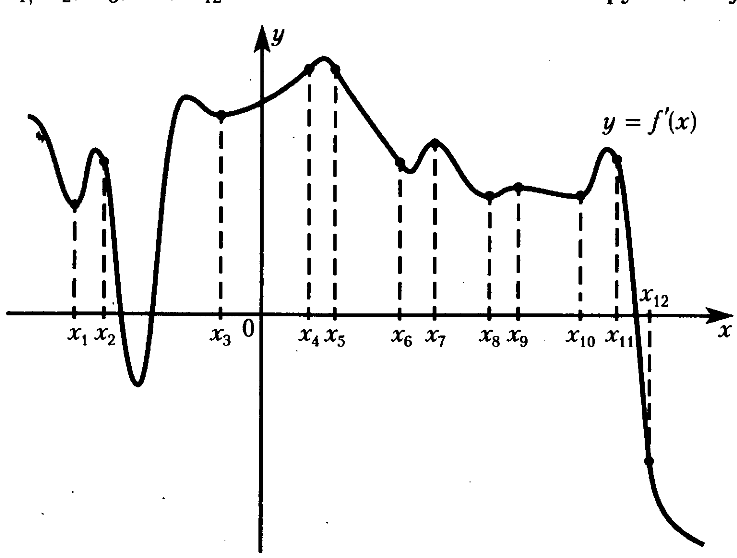
4.3.11. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



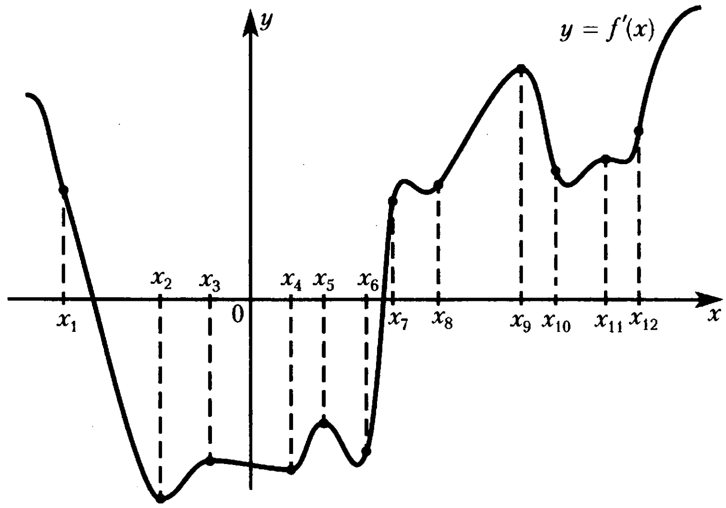
4.3.12. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



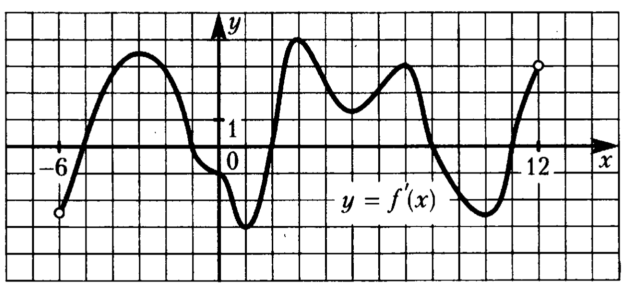
4.3.13. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



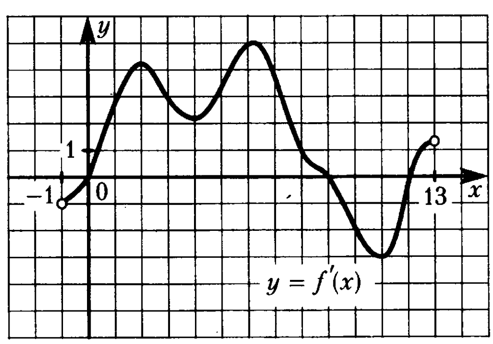
4.3.14. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{12}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



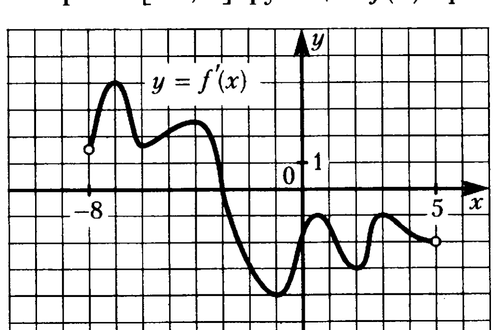
4.3.15. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 12)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



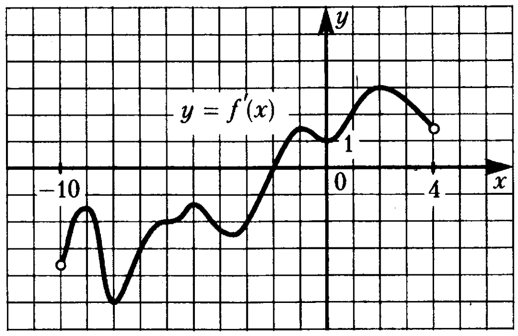
4.3.16. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 13)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



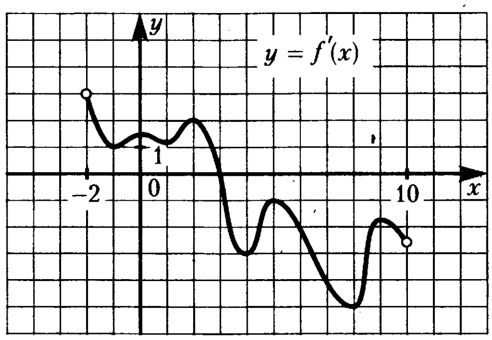
4.3.17. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 5)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



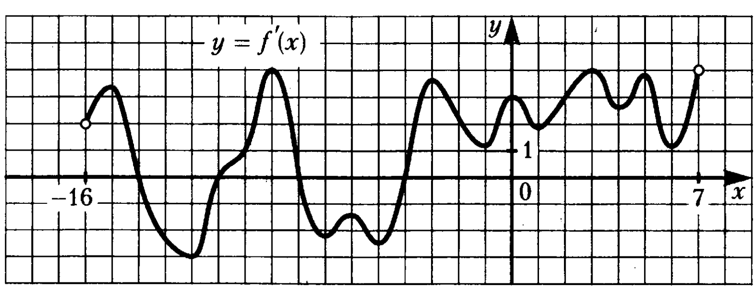
4.3.18. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 4)$. В какой точке отрезка $[-8; -3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



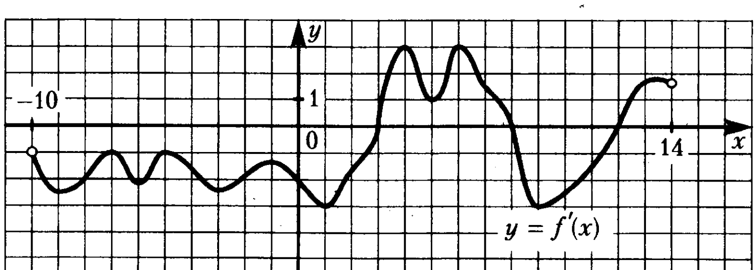
4.3.19. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-1; 9)$.



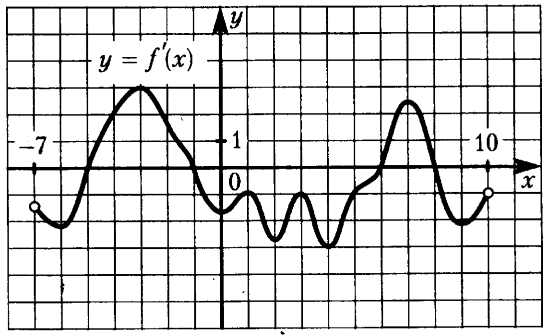
4.3.20. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-16; 7)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-15; 6]$.



4.3.21. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8; 11]$.



4.3.22. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 10)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 5]$.



4.3.23. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 75x + 23$.

4.3.24. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 192x + 14$.

4.3.25. Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 - 5x^3 - 20x$ на отрезке $[-7; -1]$.

4.3.26. Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^5 - 20x^3 - 13$ на отрезке $[-6; 1]$.

4.3.27. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x^2 + 36}{x}$.

4.3.28. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x^2 + 484}{x}$.

4.3.29. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 900}$.

4.3.30. Найдите точку минимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 225}$.

4.3.31. Найдите точку максимума функции $y = 6 + 15x - 4x\sqrt{x}$.

4.3.32. Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 24x + 14$.

4.3.33. Найдите наибольшее значение функции $y = 18x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[7; 10]$.

4.3.34. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 12x + 3$ на отрезке $[0; 100]$.

4.3.35. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$.

4.3.36. Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 22x + 122}$.

4.3.37. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x + 19$.

4.3.38. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x + 15$.

4.3.39. Найдите точку минимума функции $y = 6^{x^2 - 8x + 28}$.

4.3.40. Найдите точку минимума функции $y = 7^{x^2 - 30x + 235}$.

4.3.41. Найдите точку максимума функции $y = (24 - x)e^{x + 24}$.

4.3.42. Найдите точку максимума функции $y = (15 - x)e^{x + 15}$.

4.3.43. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 + 20x - 20)e^{2-x}$ на отрезке $[-2; 3]$.

4.3.44. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 + 21x - 21)e^{2-x}$ на отрезке $[-1; 4]$.

4.3.45. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 19x + 19)\,e^{x+20}$.

4.3.46. Найдите точку минимума функции $y = (2x^2 - 26x + 26)\,e^{x-17}$.

4.3.47. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 4e^x + 4$ на отрезке $[-1; 2]$.

4.3.48. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 9e^x - 2$ на отрезке $[1; 3]$.

4.3.49. Найдите наибольшее значение функции $y = 28\sqrt{2}\sin x - 28x + 7\pi + 15$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4.3.50. Найдите наименьшее значение функции $y = -28 - 3{,}5\pi + 14x - 14\sqrt{2}\sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4.3.51. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\sqrt{2}\cos x + 6x - \frac{3\pi}{2} + 15$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4.3.52. Найдите наименьшее значение функции $y = -22 + \frac{9\sqrt{3}\pi}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{2}x - 27\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4.3.53. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 11) - 5x + 2$.

4.3.54. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x - 10) - 5x + 7$.

4.3.55. Найдите точку минимума функции $y = \log_2(x^2 - 14x + 72) - 8$.

4.3.56. Найдите точку минимума функции $y = \log_3(x^2 - 24x + 148) + 1$.

4.3.57. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - 5\ln(x + 3) + 4$ на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

4.3.58. Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - 6\ln(x + 3) + 4$ на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

4.3.59. Найдите точку максимума функции $y = 1{,}5x^2 - 39x + 108\ln x - 8$.

4.3.60. Найдите точку минимума функции $y = 0{,}5x^2 - 11x + 30\ln x + 8$.

4.3.61. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 13x + 11\ln x + 12$ на отрезке $\left[\frac{13}{14}; \frac{15}{14}\right]$.

4.3.62. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 7$ на отрезке $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$.

4.4. Первообразная

4.4.1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=11x+5$ в точке 0 равно 6. Найдите $F(-3)$.

4.4.2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=-5x+8$ в точке 0 равно 3. Найдите $F(4)$.

4.4.3. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=3x^2-7x+1$ в точке 0 равно 4. Найдите $F(4)$.

4.4.4. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=2x^2+9x-4$ в точке 0 равно 7. Найдите $F(-3)$.

4.4.5. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=-6x^2-2x+5$ в точке 0 равно 9. Найдите $F(5)$.

4.4.6. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=5x^3-3x^2+7x-2$ в точке 0 равно -5. Найдите $F(2)$.

4.4.7. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=-x^3+10x-7$ в точке 0 равно 12. Найдите $F(-2)$.

4.4.8. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=\frac{x^3}{5}-3x^2+7x-8$ в точке 0 равно -21. Найдите $F(5)$.

4.4.9. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=9x^8$ в точке 0 равно -13. Найдите $F(-1)$.

4.4.10. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=-18x^4$ в точке 0 равно 17. Найдите $F(2)$.

4.4.11. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=-5\sin x$ в точке 0 равно 17. Найдите $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

4.4.12. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=11\sin x$ в точке равно -9. Найдите $F\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

4.4.13. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=21\sin x$ в точке равно 6. Найдите $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

4.4.14. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=8\cos x$ в точке $-\pi$ равно 13. Найдите $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

4.4.15. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=10\cos x$ в точке $\frac{\pi}{2}$ равно -4. Найдите $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

4.4.16. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=6e^x$ в точке 0 равно -18. Найдите $F(\ln 3)$.

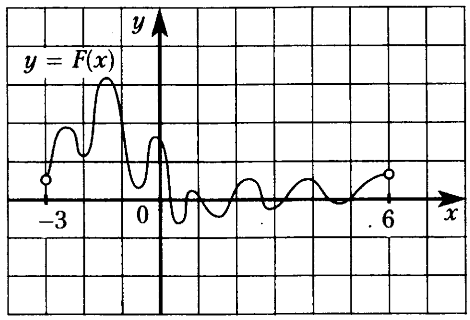
4.4.17. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=-8e^x$ в точке 0 равно 3. Найдите $F(\ln 7)$.

4.4.18. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x)=12e^x$ в точке 0 равно 7. Найдите $F(-\ln 5)$.

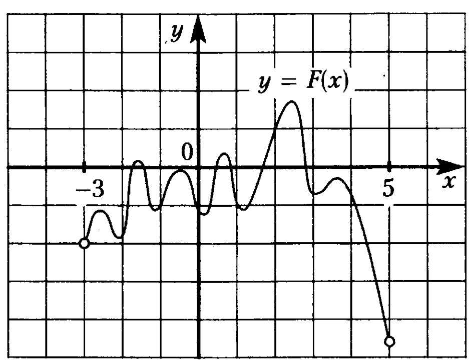
4.4.19. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = \frac{7}{x}$ в точке 1 равно -11. Найдите $F(e^2)$.

4.4.20. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = -\frac{10}{x}$ в точке равно 8. Найдите $F(e^4)$.

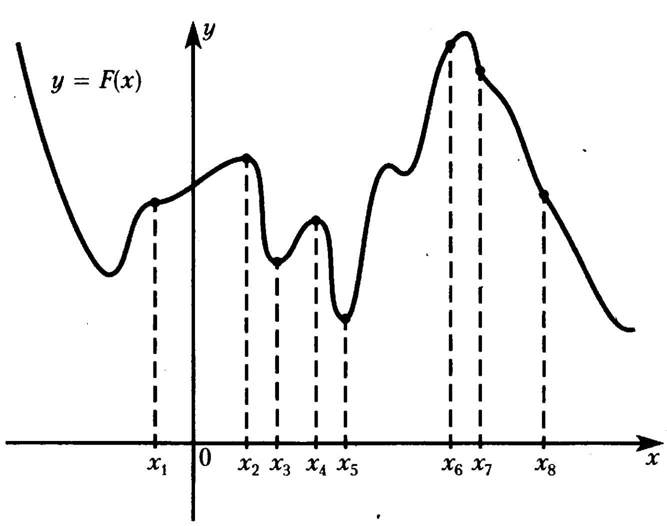
4.4.21. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 6)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 5]$.



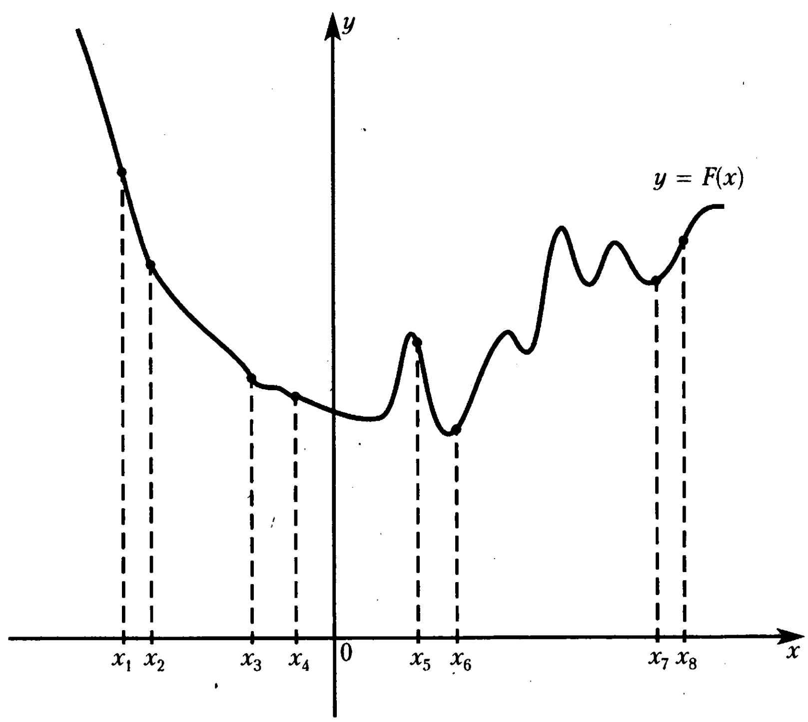
4.4.22. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



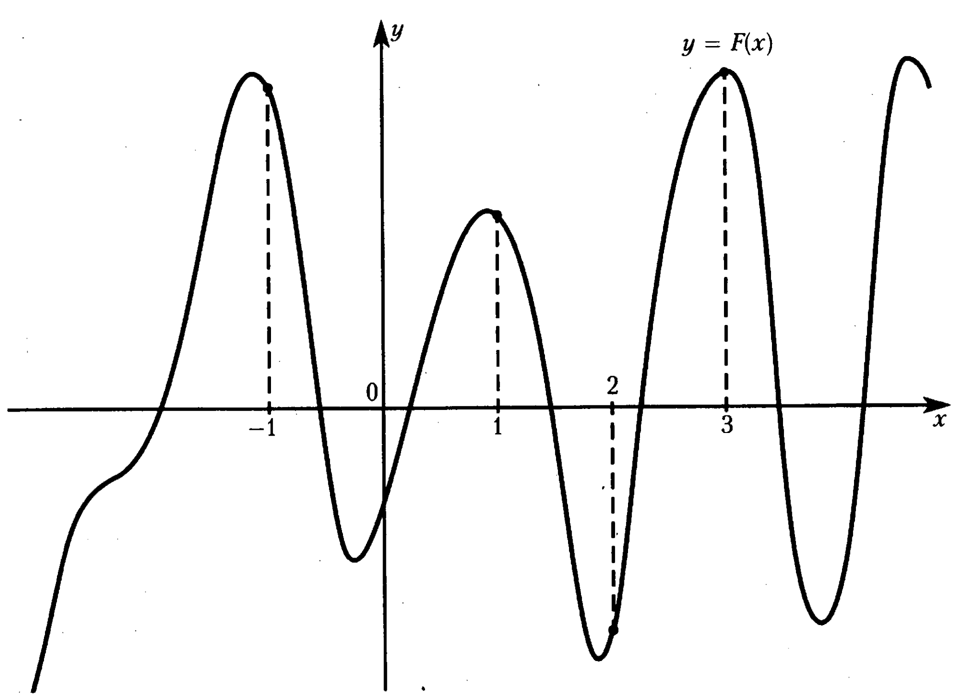
4.4.23. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_8. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



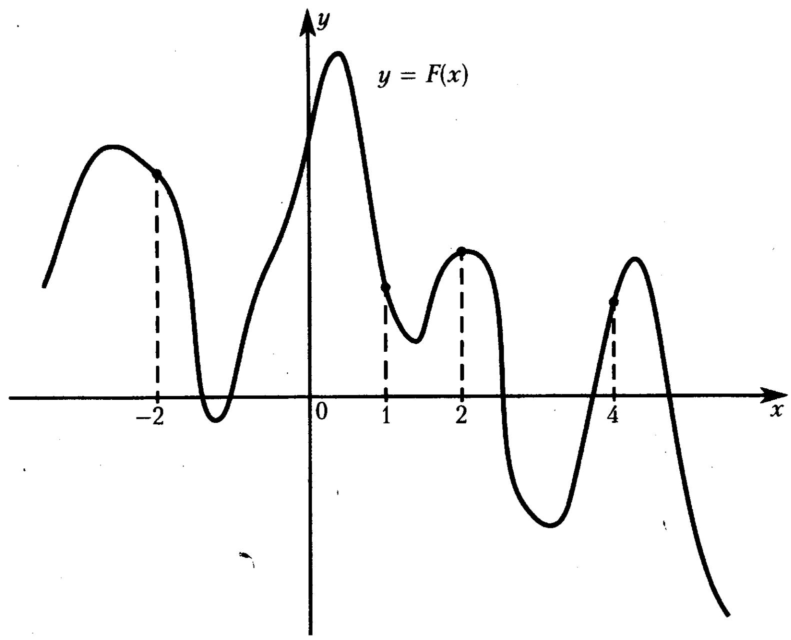
4.4.24. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, ..., x_8. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



4.4.25. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки -1, 1, 2, 3. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наименьшее? В ответе укажите эту точку.



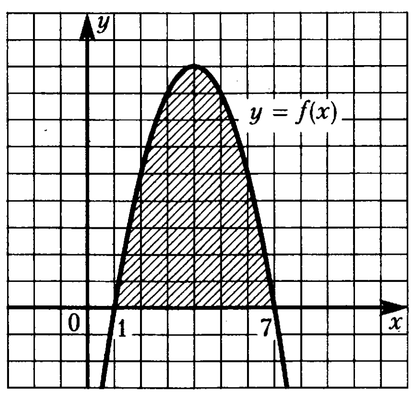
4.4.26. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ функции $f(x)$ и отмечены точки -2, 1, 2, 4. В какой из этих точек значение функции $f(x)$ наибольшее? В ответе укажите эту точку.



4.4.27. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 7x + 11.$$

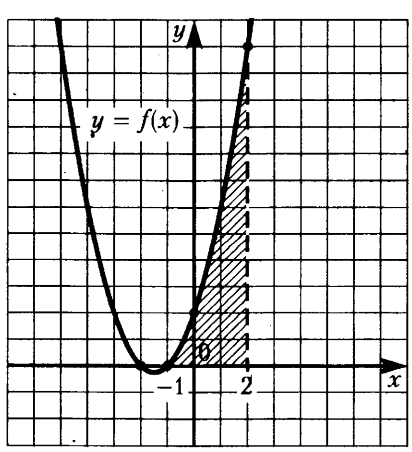
Найдите площадь заштрихованной фигуры.



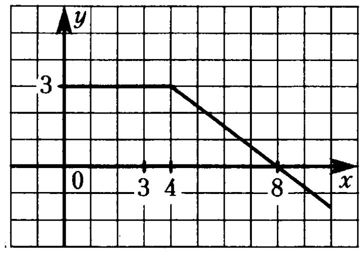
4.4.28. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой имеет вид

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x - 14.$$

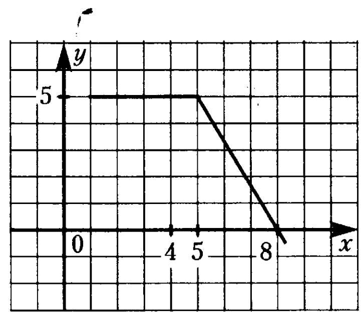
Найдите площадь заштрихованной фигуры.



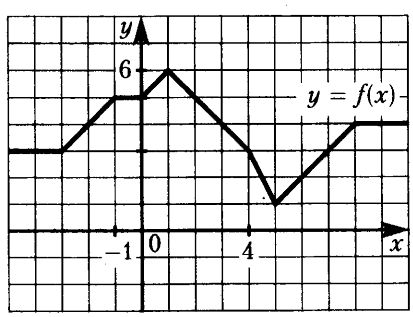
4.4.29. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



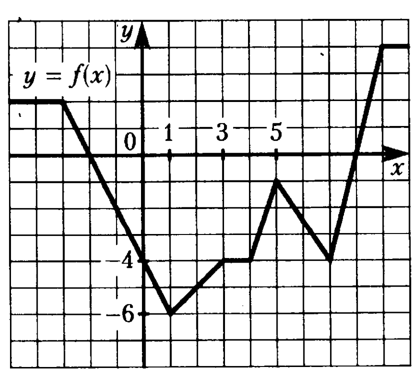
4.4.30. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



4.4.31. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой $F(x)$. Найдите разность $F(4) - F(-1)$.



4.4.32. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, одна из первообразных которой $F(x)$. Найдите разность $F(5) - F(1)$.



5. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

5.1. Тригонометрические уравнения

5.1.1. а) Решите уравнение $4\cos^2 x + 12\cos x + 5 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $\sin x \geqslant 0$.

5.1.2. а) Решите уравнение $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $\cos x \leqslant 0$.

5.1.3. а) Решите уравнение $\sin 4x - \sin x = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

5.1.4. а) Решите уравнение $\cos 4x - \cos x = 0$.
б) Найдите количество корней этого уравнения, принадлежащих отрезку $\left[3\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

5.1.5. а) Решите уравнение $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $\sin x < 0$.

5.1.6. а) Решите уравнение $15\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие условию $\cos x < 0$.

5.1.7. а) Решите уравнение $9^{\sin x} = 3$.
б) Найдите наибольший отрицательный корень этого уравнения.

5.1.8. а) Решите уравнение $2 \cdot 16^{\cos x} + 4^{\cos x} - 1 = 0$.
б) Найдите наименьший положительный корень этого уравнения.

5.1.9. а) Решите уравнение $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.
б) Найдите наибольший отрицательный корень этого уравнения.

5.1.10. а) Решите уравнение $\sqrt{\cos 2x - \sin 5x} = -2\cos x$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 4\pi]$.

5.1.11. а) Решите уравнение $4\sin^3 x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

5.1.12. а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}75$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

5.1.13. а) Решите уравнение $\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

5.1.14. а) Решите уравнение $\log_7(2\cos^2 x + 3\cos x - 1) = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

5.1.15. а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}$.
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

5.1.16. а) Решите уравнение $4\cos^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 5 = 0$.
б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

5.1.17. а) Решите уравнение $3\cos 2x - 5\sin x + 1 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

5.1.18. а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

5.1.19. а) Решите уравнение $\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{21\pi}{2}; -\frac{19\pi}{2}\right]$.

5.1.20. а) Решите уравнение $\cos^3 x + 3\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{19\pi}{2}; -\frac{17\pi}{2}\right]$.

5.1.21. а) Решите уравнение $2\cos^2(\pi - x) - \sin(\pi + 2x) = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{13\pi}{2}; 8\pi\right]$.

5.1.22. а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\pi - 2x\right) = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[7\pi; \frac{17\pi}{2}\right]$.

5.2. Неравенства и системы неравенств

5.2.1. Решите неравенство $\log_5^2(25 - x^2) - 3\log_5(25 - x^2) + 2 \geqslant 0$.

5.2.2. Решите неравенство $\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \leqslant 1 + \frac{1}{3^x - 2}$.

5.2.3. Решите неравенство $\frac{2}{7^x - 7} \geqslant \frac{5}{7^x - 4}$.

5.2.4. Решите неравенство $\frac{1}{5^x + 31} \leqslant \frac{4}{5^{x+1} - 1}$.

5.2.5. Решите неравенство $\frac{13 - 5\cdot 3^x}{9^x - 12\cdot 3^x + 27} \geqslant 0{,}5$.

5.2.6. Решите неравенство $\frac{2^x}{2^x - 3} + \frac{2^x + 1}{2^x - 2} + \frac{5}{4^x - 5\cdot 2^x + 6} \leqslant 0$.

5.2.7. Решите неравенство $\frac{3}{\left(2^{2-x^2} - 1\right)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2} - 1} + 1 \geqslant 0$.

5.2.8. Решите неравенство $\left(\log_2^2 x - 2\log_2 x\right)^2 + 36\log_2 x + 45 < 18\log_2^2 x$.

5.2.9. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \log_5(x+3) \geqslant 0, \\ 9^{x+1} - 28\cdot 3^x + 3 \geqslant 0. \end{cases}$$

5.2.10. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3\cdot 64^x + 2^x - 70}{64^x - 2} \geqslant 3, \\ \log_3^2(x+3) - 3\log_3(x+3) + 2 \leqslant 0. \end{cases}$$

5.2.11. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 30\cdot 5^x + 125 \geqslant 0, \\ \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1) \leqslant 0. \end{cases}$$

5.2.12. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2^x + 36 \leqslant 78\cdot\log_3(x+3), \\ 12x + 2^x \geqslant 78\cdot\log_3(x+3). \end{cases}$$

5.2.13. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 8\cdot 4^x - 65\cdot 2^x + 8 \leqslant 0, \\ \log^2_{|x|}(x^4) + \log_3(x^2) \leqslant 16. \end{cases}$$

5.2.14. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{320 - 4^{-x}}{64 - 2^{-x}} \geqslant 5, \\ \log_{0{,}25x^2}\left(\dfrac{x+6}{4}\right) \leqslant 1. \end{cases}$$

5.2.15. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5^{x+2} + 2\cdot 5^{-x} \leqslant 51, \\ \log_{2x} 0{,}25 \geqslant \log_2 32x - 1. \end{cases}$$

5.2.16. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3\cdot 9^{-x} - 28\cdot 3^{-x} + 9 \leqslant 0, \\ \log_{x^2}(x+1)^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

5.2.17. Решите неравенство $x\log_{625}(x+2) \geqslant \log_5(x^2+4x+4)$.

5.2.18. Решите неравенство $x\log_{216}(x+3) \geqslant \log_6(x^2+6x+9)$.

5.2.19. Решите неравенство $x^2\log_{125}(-x-2) \geqslant \log_5(x^2+4x+4)$.

5.2.20. Решите неравенство $x^2\log_{64}(-x-3) \geqslant \log_2(x^2+6x+9)$.

5.3. Уравнения и неравенства с параметром

5.3.1. Найдите все значениях a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 15x - 14 + a^2 - 10a = 0$ принимает наибольшее значение.

5.3.2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x-a} = x - 3a$ имеет корни, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений a.

5.3.3. Найдите все значения a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-3a-4)^2 + (y-a+2)^2 = 1, \\ (x-4a-3)^2 + (y+3)^2 = 9. \end{cases}$$

5.3.4. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2 - a^2(a+1)x + a^5 < 0$ имеет решения и множество решений неравенства содержится в интервале $(-9; 4)$.

5.3.5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $9^x - 2(a-3)\cdot 3^x + a^2 - 8a + 7 = 0$ имеет единственный корень.

5.3.6. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

5.3.7. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 6x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

5.3.8. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$ имеет более двух точек экстремума.

5.3.9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a|x-3| = \frac{5}{x+2}$ на промежутке $[0; +\infty)$ имеет ровно два корня.

5.3.10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

5.3.11. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

5.3.12. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy - 7y + 4x + 12)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5.3.13. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ y = a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

5.3.14. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

5.3.15. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 4|2x - y - 10|, \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

5.3.16. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x-5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

5.3.17. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

5.3.18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2-1|+2x-x^2=|y^2-1|+2y-y^2, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

5.3.19. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+|x^2-2x|=y^2+|y^2-2y|, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

5.3.20. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2-2x|-x^2=|y^2-2y|-y^2, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

5.3.21. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a+y^2}=\sqrt{a+x^2}, \\ x^2+y^2=6x-8y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

5.3.22. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a-y^2}=\sqrt{a-x^2}, \\ x^2+y^2=-6x-8y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

5.4. Планиметрия

5.4.1. а) Докажите, что в параллелограмме биссектрисы углов при одной стороне перпендикулярны.

б) В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM:MN=3:7$. Найдите BC, если $AB=10$.

5.4.2. В треугольнике ABC $AB=12$, $BC=5$, $CA=10$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC=4:9$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

5.4.3. Окружности S_1 и S_2 радиусов 4 и 2 соответственно касаются в точке A. Через точку B, лежащую на окружности S_1, проведена прямая, касающаяся окружности S_2 в точке M. Найдите BM, если известно, что $AB=2$.

5.4.4. Точка O — центра окружности радиуса 3. На продолжении радиуса OM взята точка A. Через точку A проведена прямая, касающаяся окружности в точке K. Известно, что $\angle OAK=60°$.

а) Докажите, что $AK=\sqrt{3}$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.

5.4.5. Дана окружность радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O. Хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём $\angle CDA=120°$. Известно, что $OD=3$.

а) Докажите, что расстояние от O до хорды AB равно $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC.

5.4.6. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB=2$, $BC=3$, $\angle A=60°$. На сторонах AB и BC как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами $120°$ при вершинах.

а) Докажите, что прямая, соединяющая вершины этих треугольников, проходит через точку B.
б) Найдите расстояние между этими вершинами.

5.4.7. Точка B — середина отрезка AC, причём $AC = 10$. Проведены три окружности радиуса 6 с центрами A, B и C.
а) Докажите, что существует ровно шесть окружностей, касающихся всех трёх данных.
б) Найдите радиусы всех таких окружностей.

5.4.8. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 7$, $BC = 9$, $AC = 10$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершни треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC.
а) Докажите, что треугольники BKL и ABC подобны.
б) Найдите длину отрезка KL.

5.4.9. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника.
а) Докажите, что линия, соединяющая центры окружностей, параллельна одной из стороны треугольника.
б) Найдите радиусы окружностей.

5.4.10. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия равна 17,5. Прямые KL и MN пересекаются в точке A.
а) Докажите, что треугольники ALM и AKN подобны.
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

5.4.11. На прямой, содержащей биссектрису AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удалённая от вершины A на расстояние, равное $\sqrt{26}$. Известно, что $BC = 5$, $AC = 12$.
а) Докажите, что $AD = \frac{12\sqrt{26}}{5}$.
б) Найдите площадь треугольника BCE.

5.4.12. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника, как на диаметре, построена окружность. Окружность пересекает основание AC в точке M и боковую сторону CB в точке N.
а) Докажите, что $MN = \frac{1}{2}AC$. б) Найдите периметр треугольника MNC, если $AB = 8$, $AB = 10$.

5.4.13. Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.
а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.
б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM:MC = 1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

5.4.14. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H, точка Q — середина CD.
а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ — параллелограмм.
б) Найдите AD, если $\angle BAD = 75^\circ$ и $BC = 1$.

5.4.15. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.
а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $\frac{AP}{PD} = \sin D$.
б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны $\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

5.4.16. Две окружности касаются внутренним образом в точке K, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C. Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $CN:CM = LB:LA$.

б) Найдите MN, если $LB:LA = 2:3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

5.4.17. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

5.4.18. Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

5.5. Стереометрия

5.5.1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 5$, $AD = 12$, $CC_1 = 7$. Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

5.5.2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 15$, $AD = 8$, $CC_1 = 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

5.5.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 10$, а боковое ребро $AA_1 = \sqrt{69}$. Найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.

5.5.4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 3\sqrt{2}$, а боковое ребро $SA = 5$. Найдите расстояние от точки A до прямой SC.

5.5.5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания $AB = \sqrt{6}$, а боковое ребро $AA_1 = 3\sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки C до плоскости EFB_1.

5.5.6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $SA = \sqrt{73}$. Найдите расстояние от точки B до плоскости SAC.

5.5.7. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 11$. Найдите расстояние между прямыми AB_1 до прямой CD_1.

5.5.8. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания $AB = \sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 11$. Найдите угол между прямыми SA и BC.

5.5.9. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 3$. Найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

5.5.10. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 4\sqrt{3}$, а боковое ребро $SA = 5$. Найдите угол между прямой SC и плоскостью SAB.

5.5.11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 2\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 4$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCA_1.

5.5.12. В правильной треугольной $SABC$ пирамиде с основанием ABC известны рёбра: $AB = 5\sqrt{3}$, $SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер AS и BC.

5.5.13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 8\sqrt{3}$, $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM, где M — точка пересечения медиан грани SBC.

5.5.14. В правильной треугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 2$, а боковое ребро $SA = \sqrt{3}$. Найдите угол между плоскостями SBC и SAD.

5.5.15. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые рёбра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

5.5.16. Прямоугольник со сторонами, равными 3 и 4, перегнули по диагонали, причём полуплоскости полученных прямоугольных треугольников образовали двугранный угол, равный 60°. Найдите расстояние между вершинами прямоугольника, не лежащими на диагонали сгиба.

5.5.17. В основании прямой призмы лежит трапеция, острые углы которой равны 60°. Боковая сторона и меньшее основание трапеции равны соответственно 8 и 6. Через боковую сторону трапеции нижнего основания и вершину большего основания трапеции верхнего основания проведено сечение плоскостью, образующего с плоскостью нижнего основания угол в 30°. Найдите площадь сечения.

5.5.18. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P = PB_1 = 2:1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

5.5.19. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

5.5.20. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану основания CE в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

5.5.21. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

5.5.22. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

5.5.23. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

5.5.24. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

5.6. Арифметика и алгебра

5.6.1. Число умножили на сумму его цифр и получили 10530. Найдите это число.

5.6.2. Произведение числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 5848. Найдите эти числа.

5.6.3. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

5.6.4. Решите уравнение в натуральных числах:

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

5.6.5. Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

5.6.6. Каждое из чисел 2, 3, ... , 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ... , 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

5.6.7. Перед каждым из чисел 14, 15, ... , 20 и 6, 7, ... , 10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

5.6.8. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

5.6.9. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

5.6.10. Моток верёвки режут без остатка на куски длиной не меньше 115 см, но не больше 120 см (назовем такие куски стандартными).

а) Некоторый моток верёвки разрезали на 23 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток верёвки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

5.6.11. В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

5.6.12. На доске написали несколько необязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

5.6.13. На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

5.6.14. На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

5.6.15. Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших тест — 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

5.6.16. а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

5.6.17. Три числа назовём *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовём *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной хорошей тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

5.6.18. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

5.7. Экономические задачи

5.7.1. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5000000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

5.7.2. Зависимость объёма Q (в шт) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 1500 - P,\ 1000 \leqslant P \leqslant 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

5.7.3. Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

5.7.4. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

5.7.5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

5.7.6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

5.7.7. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1 300 000 рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На какое минимально количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 350 000 рублей?

5.7.8. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

5.7.9. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

5.7.10. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн рублей.

5.7.11. 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

5.7.12. 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн рублей?

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА
Профильный уровень

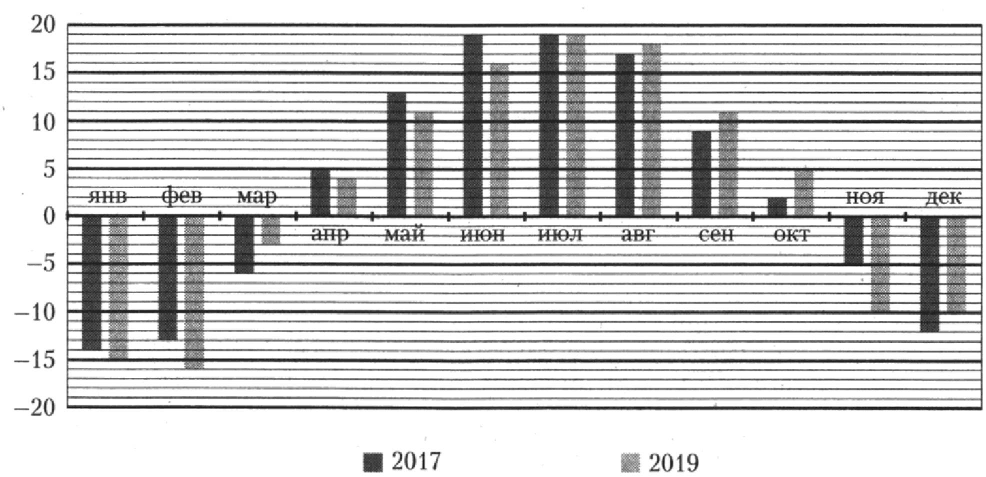
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 1
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 90 рублей за штуку и продаёт с наценкой 20%. Какое наибольшее количество таких горшков можно купить в этом магазине на 1100 рублей?

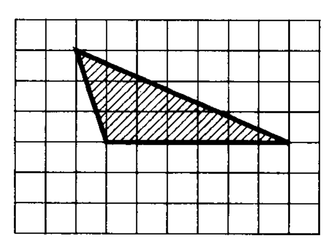
Ответ: ____________________

2 На диаграмме показана средняя температура в Новосибирске за каждый месяц 2017 и 2019 годов. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите количество месяцев, в которых средняя температура в 2017 году была не ниже средней температуры в 2019 году.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ____________________

4 Сергей отправляет СМС другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,6. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена с третьей попытки.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-2x} = 27$.

Ответ: ____________________

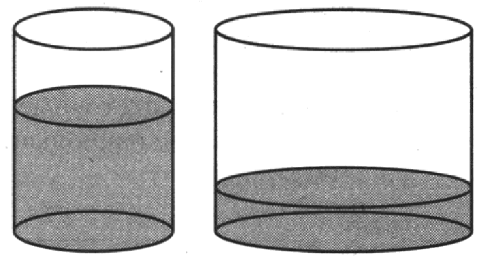
6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 153. Найдите площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = 2x + 37$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________

8 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 25 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 5 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}} - \sqrt{1\frac{5}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{28}}$.

Ответ: ____________________

10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Ответ: ____________________

11 Лодка в 8:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 20:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ: ____________________

12 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1; 2]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(x^2+2x-2)\left(\log_3(x^2-5)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{5}-x\right)\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3{,}5;\ -2{,}8]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCDA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCDA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды ABA_1C_1 равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью ABC_1, если $AB=8$ и $AA_1=6$.

15 Решите неравенство $3^{\lg x}+6\frac{2}{3}\cdot 3^{0{,}5\lg x}\cdot 2^{0{,}5(\lg x-6)}\leqslant 2^{\lg x}$.

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\frac{AC\cdot AB}{AC+BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 8 и 18 соответственно.

17 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 60% (до $t_1=1{,}6t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $12\,000-2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

18 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $[-1;\ 1]$ будет являться решением неравенства $3a^{2x}-16^x+2\cdot(4a)^x\geqslant 0$.

19 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=693$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 2

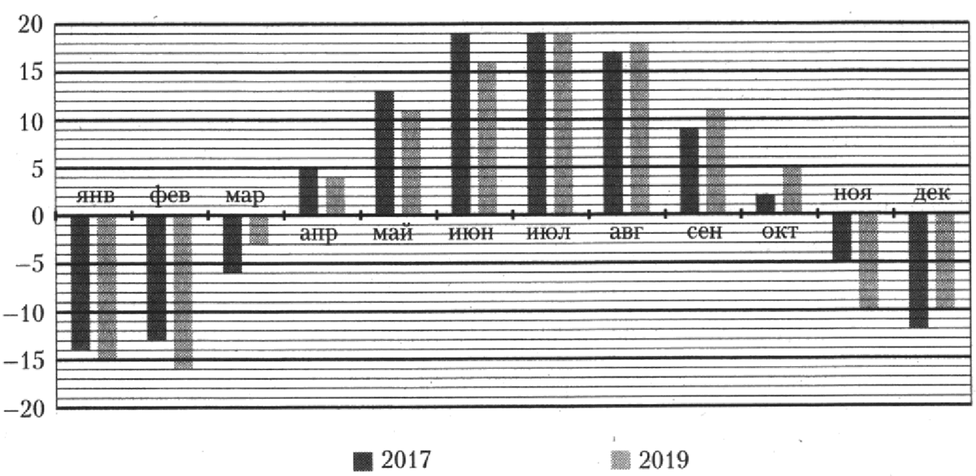
Профильный уровень

> **Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.**

1 Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 130 рублей за штуку и продает с наценкой 30%. Какое наибольшее количество таких горшков можно купить в этом магазине на 1500 рублей?

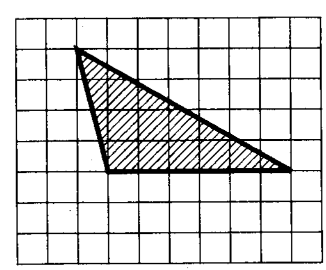
Ответ: ____________________

2 На диаграмме показана средняя температура в Новосибирске за каждый месяц 2017 и 2019 годов. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите количество месяцев, в которых средняя температура в 2017 году была не выше средней температуры в 2019 году.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ____________________

4 Андрей отправляет СМС другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,8. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена с третьей попытки.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$.

Ответ: ____________________

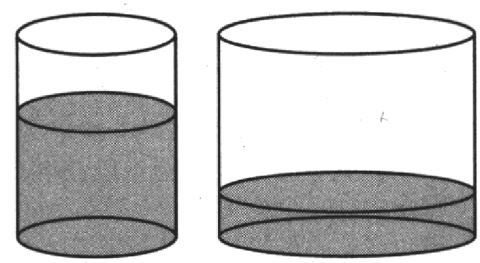
6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 14. Найдите площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ: ____________________

7 Прямая $y = -2x - 12$ является касательной к графику функции. $y = x^3 - 2x^2 - 6x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________

8 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 8 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{5}} - \sqrt{5\frac{2}{5}}\right) : \sqrt{\frac{3}{20}}$.

Ответ: ____________________

10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 5$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{200}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с).Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Ответ: ____________________

11 Байдарка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ: ____________________

12 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 2e^x + 6$ на отрезке $[-2; 1]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(x^2+4x+1)\left(\log_{0,2}(x^2-7)+\log_5\left(\sqrt{7}-x\right)\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3{,}7; -2{,}7]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды AB_1C_1C равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью AB_1C, если $AB=5$ и $AA_1=12$.

15 Решите неравенство $5^{\lg x}-3^{\lg x}<5\frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}\lg x}\cdot 3^{\frac{1}{2}(\lg x-2)}$.

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\frac{AC\cdot BC}{AC+BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 6 и 24 соответственно.

17 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог до $t_1=\frac{10t_0}{7}$, сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $18\,000-2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

18 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$ будет являться решением неравенства $2a^{2x}-3\cdot 9^x+5\cdot(3a)^x\geqslant 0$.

19 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=198$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=495$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 6?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 3

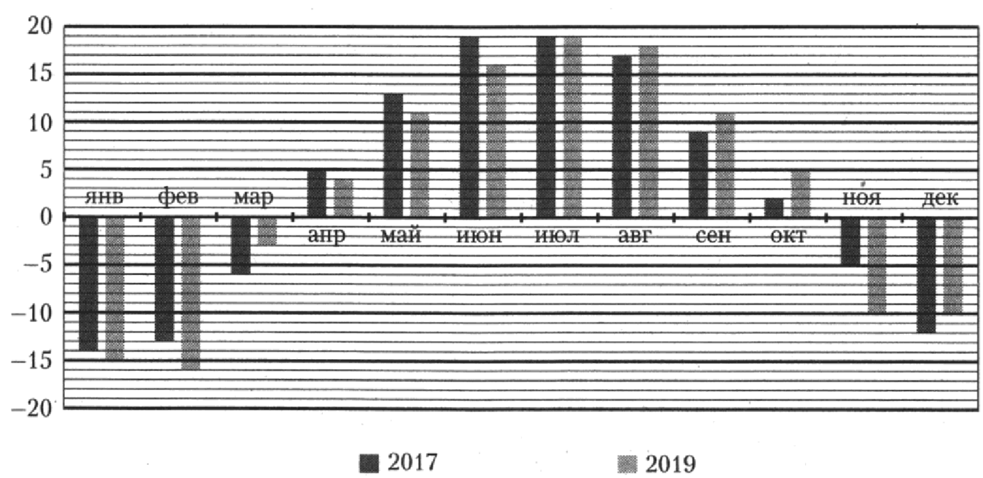
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 90 рублей за штуку и продает с наценкой 15%. Какое наибольшее количество таких горшков можно купить в этом магазине на 700 рублей?

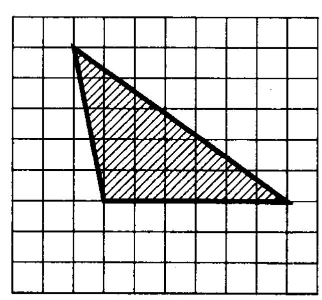
Ответ: ___________________

2 На диаграмме показана средняя температура в Новосибирске за каждый месяц 2017 и 2019 годов. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наименьшую среднюю температуру в период с января по июнь 2019 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________

4 Пантелей отправляет СМС другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,7. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена с четвёртой попытки.

Ответ: ___________________

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{5-2x} = 125$.

Ответ: ___________________

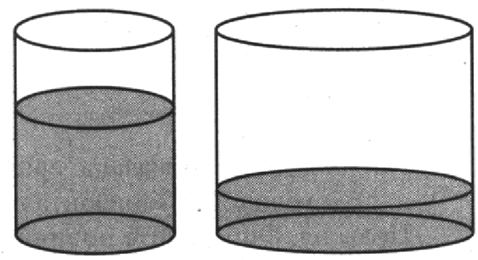
6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 118. Найдите площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ: ___________________

7 Прямая $y = 8x - 9$ является касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 + 8x - 9$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ___________________

8 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 125 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 5 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: ___________________

> Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{6\frac{3}{7}} - \sqrt{2\frac{6}{7}}\right) : \sqrt{\frac{5}{28}}$.

Ответ: ___________________

10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 5$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{400}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Ответ: ___________________

11 Катер в 10:00 вышел из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 4 часа, катер отправился назад и вернулся в пункт А в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость катера, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ: ___________________

12 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 4e^x + 6$ на отрезке $[0; 3]$.

Ответ: ___________________

> Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $x^2+4x-1)\left(\log_{0,25}\left(\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)\right)+\log_4\left(\sqrt{3}-x\right)\right)=0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4{,}5;\ -3{,}5]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды A_1B_1BC равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой CB_1 и плоскостью A_1BC, если $AB=24$ и $AA_1=7$.

15 Решите неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{4}}(3x+1)}{\log_{\frac{1}{4}}(6x-1)}<2$.

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\dfrac{AC\cdot BC}{AC+BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 20 и 5 соответственно.

17 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог до $t_1=4t_0$, сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $16\,000-2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

18 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $\left[-\frac{1}{2};\ 1\right]$ будет являться решением неравенства $4a^{2x}-3\cdot 25^x+11\cdot(5a)^x\geqslant 0$.

19 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=297$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=1386$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 4 и 7?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 4

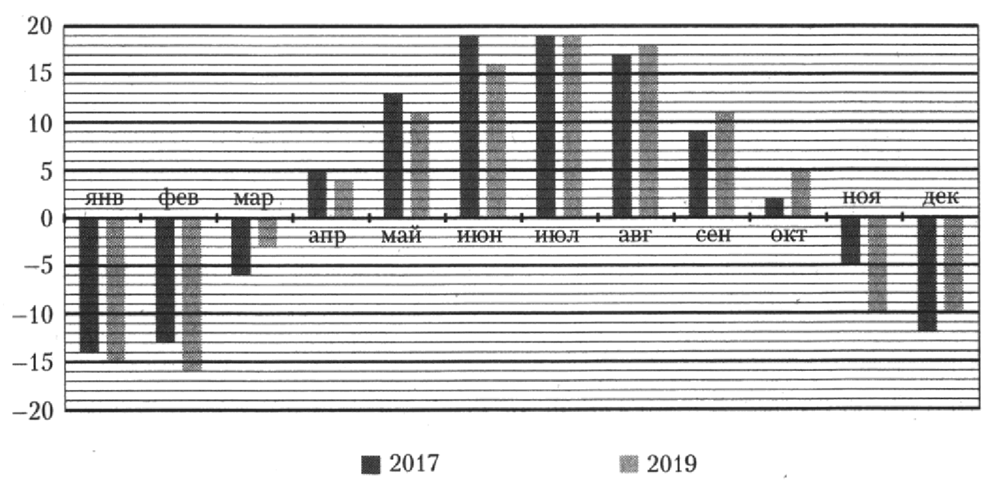
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 140 рублей за штуку и продает с наценкой 25%. Какое наибольшее количество таких горшков можно купить в этом магазине на 1100 рублей?

Ответ: ____________________

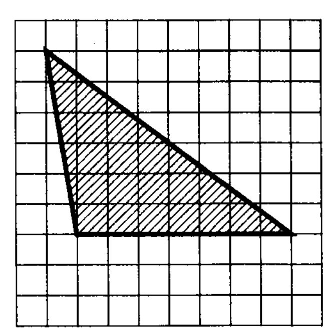
2 На диаграмме показана средняя температура в Новосибирске за каждый месяц 2017 и 2019 годов. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наименьшую среднюю температуру в период с июля по декабрь 2019 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

Ответ: ____________________



4 Алексей отправляет СМС другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,6. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена со второй попытки.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{14-4x} = 4$.

Ответ: ____________________

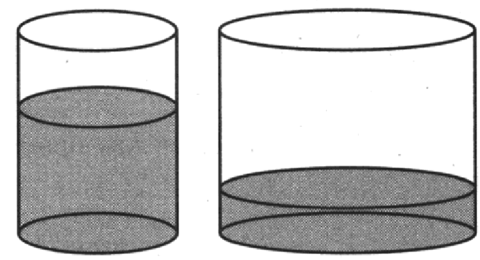
6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 116. Найдите площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ: ___________________

7 Прямая $y = -x + 4$ является касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 - x + 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ___________________

8 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 27 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: ___________________

> Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{16\frac{2}{3}}\right) : \sqrt{\frac{2}{27}}$.

Ответ: ___________________

10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{400}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Ответ: ___________________

11 Лодкав 9:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 2 часа, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 19:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

Ответ: ___________________

12 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 11e^x + 1$ на отрезке $[1; 2]$.

Ответ: ___________________

> Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(x^2+2x-5)\left(\log_4(x^2-7)-\log_2\sqrt{\sqrt{7}-x}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3{,}5; -2{,}5]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды A_1ABC_1 равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью A_1BC, если $AB = 24$ и $AA_1 = 7$.

15 Решите неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)}{\log_{\frac{1}{3}}(4x-1)} < 2$.

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\dfrac{AC\cdot BC}{AC+BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 20 и 45 соответственно.

17 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог до $t_1 = 2{,}5t_0$, сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $17\,000 - 2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

18 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ будет являться решением неравенства $3a^{2x} - 5\cdot 16^x + 14\cdot(4a)^x \geqslant 0$.

19 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — десятичные цифры, $a \neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc} = 396$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc} = 990$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 4 и 6?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 5

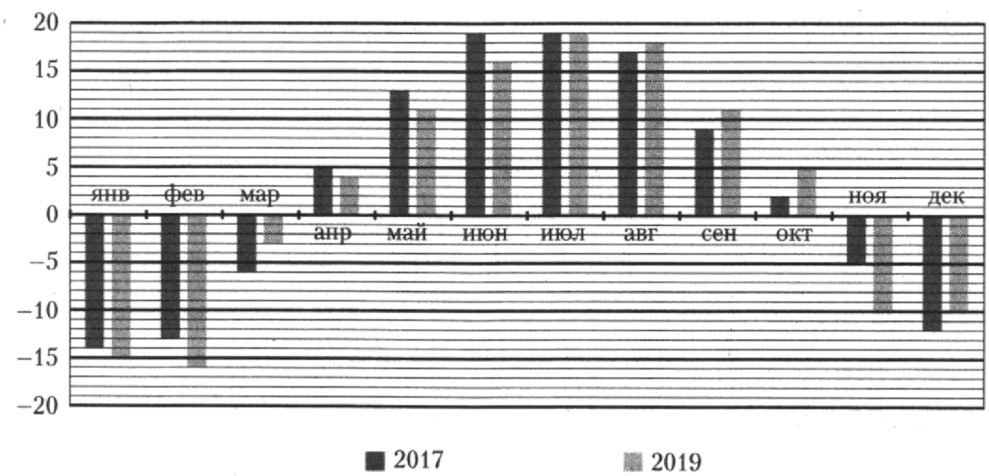
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 100 рублей за штуку и продает с наценкой 15%. Какое наибольшее количество таких горшков можно купить в этом магазине на 1300 рублей?

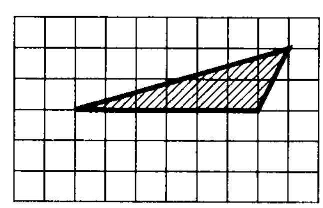
Ответ: ___________________

2 На диаграмме показана средняя температура в Новосибирске за каждый месяц 2017 и 2019 годов. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наибольшую среднюю температуру в период с сентября по декабрь 2017 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________

4 Матвей отправляет СМС другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,8. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена с четвёртой попытки.

Ответ: ___________________

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{18-5x} = 36$.

Ответ: ___________________

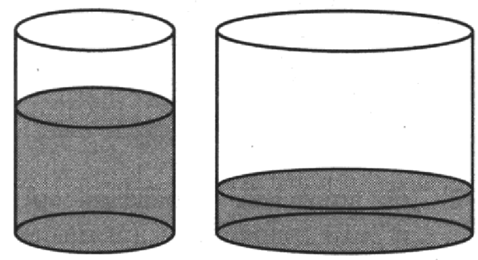
6 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 103. Найдите площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ: ___________________

7 Прямая $y = -2x + 6$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ___________________

8 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 12 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: ___________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\sqrt{13\frac{1}{2}} - \sqrt{37\frac{1}{2}}\right) : \sqrt{\frac{3}{50}}$.

Ответ: ___________________

10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{300}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Ответ: ___________________

11 Байдарка в 9:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 45 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

Ответ: ___________________

12 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 11e^x - 6$ на отрезке $[-1; 2]$.

Ответ: ___________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(x^2-2x-19)\left(\log_{25}(x^2-8)^2-\log_5\left(-2\sqrt{2}-x\right)\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3{,}5;\ 1{,}5]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды AA_1B_1C равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью A_1B_1C, если $AB=40$ и $AA_1=9$.

15 Решите неравенство $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{6-5x}{x}} \leqslant \left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}$.

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\frac{AC\cdot BC}{AC+BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 12 и 48 соответственно.

17 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 25% (до $t_1=1{,}25t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $15\,000-2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

18 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $\left[-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right]$ будет являться решением неравенства $3a^{2x}-6\cdot 4^x+17\cdot(2a)^x \geqslant 0$.

19 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a+b$, где a и b — десятичные цифры, $a\neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=495$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=1485$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 3 и 7?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 6

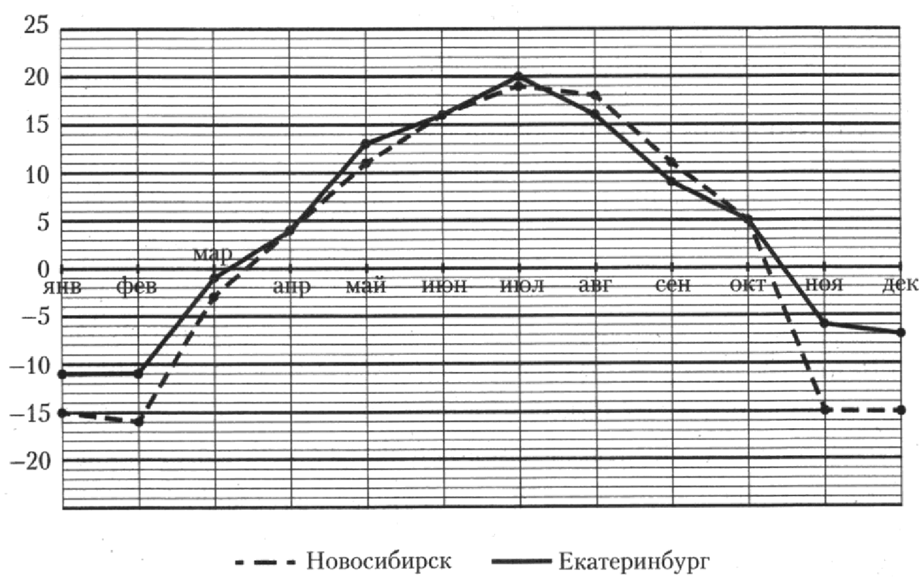
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Стоимость проездного билета на месяц составляет 800 рублей, а стоимость билета на одну поездку— 22 рубля. Аня купила проездной и сделала за месяц 45 поездок. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

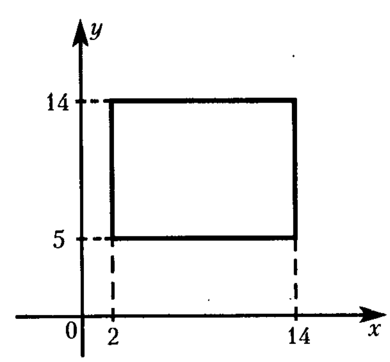
Ответ: ____________________

2 На диаграмме показана средняя температура в Новосибирске и Екатеринбурге за каждый месяц 2019 года. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наибольшую среднюю температуру в Новосибирске в период с июля по декабрь 2019 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ____________________

3 Найдите длину диагонали прямоугольника, изображённого на рисунке.



Ответ: ____________________

4 Вероятность того, что новый планшет выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,2. Если планшет проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в планшете нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый планшет прослужит больше года, но не больше трёх лет.

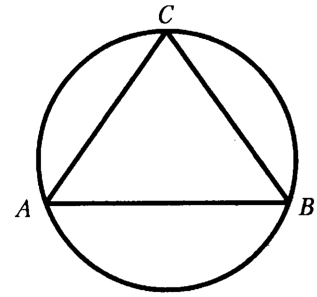
Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

Ответ: ____________________

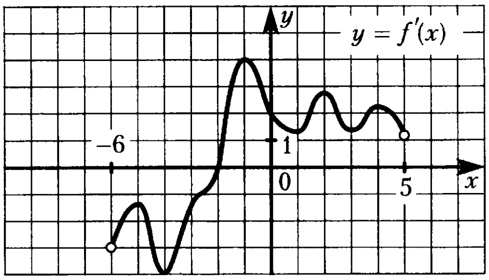
6 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Ответ: ____________________



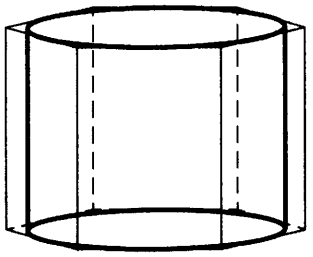
7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-2; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

Ответ: ____________________



8 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.

Ответ: ____________________



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{7}$.

Ответ: ____________________

10 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 40°$/мин — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4°$/мин^2 — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет $3000°$. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ____________________

11 Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ___________________

12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 289}$.

Ответ: ___________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $4 \cdot 256^{\sin x} - 65 \cdot 16^{\sin x} + 16 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $2AH^2 = AC^2 + AD^2 - AB^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = 4$ и $AC = AD = 3$.

15 Решите неравенство $\left(\sqrt{2} + 1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leqslant \left(\sqrt{2} - 1\right)^{-x}$.

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN:BC = 1:2$, а $BN = 12$.

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 150 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 100 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 6000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 5000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 25)\sqrt{4x + 3k} \leqslant 0$ имеет не более двух решений.

19 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии a_1, a_2, ... a_n, ..., состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 1980$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 350$ и $S_{n+2} = 625$?

в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 625$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 7

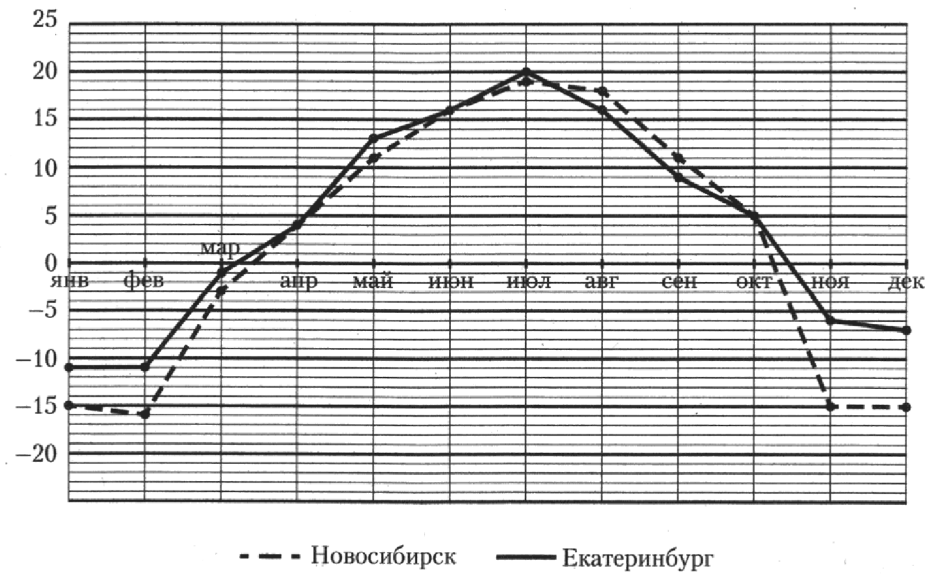
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Стоимость проездного билета на месяц составляет 760 рублей, а стоимость билета на одну поездку— 22 рубля. Аня купила проездной и сделала за месяц 45 поездок. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

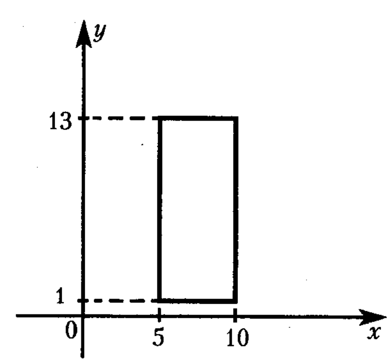
Ответ: ____________________

2 На диаграмме показана средняя температура в Новосибирске и Екатеринбурге за каждый месяц 2019 года. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наименьшую среднюю температуру в Екатеринбурге в период с января по июнь 2019 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ____________________

3 Найдите длину диагонали прямоугольника, изображённого на рисунке.



Ответ: ____________________

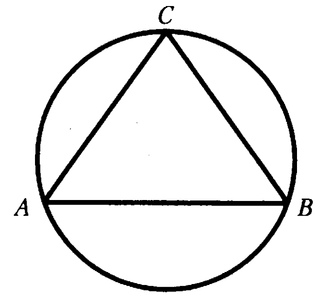
4 Вероятность того, что новый мобильный телефон выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,3. Если телефон проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в телефоне нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый телефон прослужит больше года, но не больше трёх лет.

Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

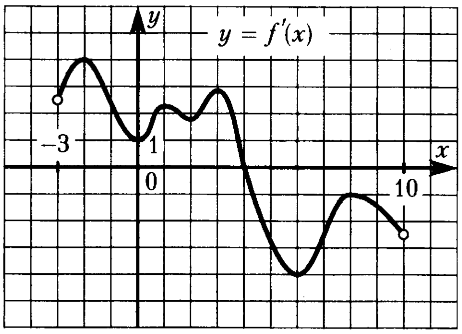
Ответ: ____________________

6 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 104, основание равно 192. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



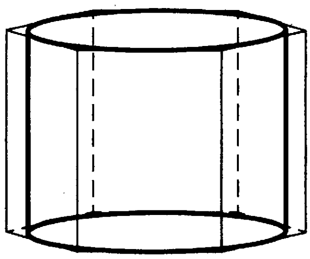
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3; 10)$. В какой точке отрезка $[0; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ____________________

8 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{27}$, а высота равна 1.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_a(ab^2)$, если $\log_b a = \frac{2}{11}$.

Ответ: ____________________

10 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 30°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 3°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ____________________

11 Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вчетверо, общий доход семьи вырос бы на 186%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 576}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $15^{1+2\cos x} - 16 \cdot 15^{\cos x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $2AH^2 + AB^2 = AC^2 + AD^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = \sqrt{10}$ и $AC = AD = 3$.

15 Решите неравенство $\log_{2x+1}(5 + 8x - 4x^2) + \log_{5-2x}(1 + 4x + 4x^2) \leqslant 4$.

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN:BC = 3:4$, а $BN = 42$.

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 150 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 4000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 25)\sqrt{3x - 4k} \leqslant 0$ имеет бесконечно много решений.

19 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 2016$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 123$ и $S_{n+2} = 343$?

в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 343$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 8

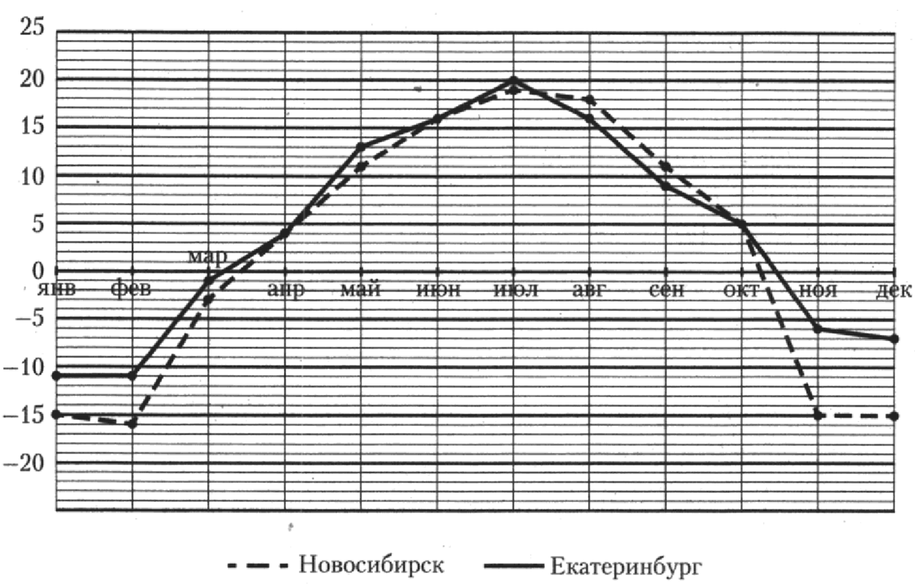
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Стоимость проездного билета на месяц составляет 750 рублей, а стоимость билета на одну поездку— 19 рублей. Аня купила проездной и сделала за месяц 45 поездок. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

Ответ: ____________________

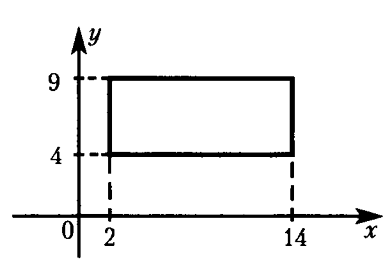
2 На диаграмме показана средняя температура в Новосибирске и Екатеринбурге за каждый месяц 2019 года. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме количество месяцев, в которых средняя температура в Новосибирске и в Екатеринбурге была одинакова.



Ответ: ____________________

3 Найдите длину диагонали прямоугольника, изображённого на рисунке.

Ответ: ____________________



4 Вероятность того, что новый навигатор выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,4. Если навигатор проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в навигаторе нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый навигатор прослужит больше года, но не больше трёх лет.

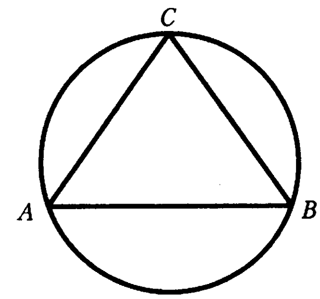
Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x-1)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

Ответ: ____________________

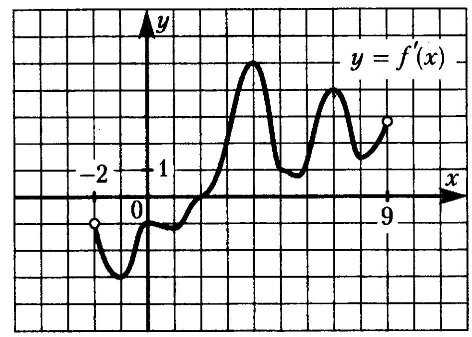
6 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 15, основание равно 18. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Ответ: ____________________



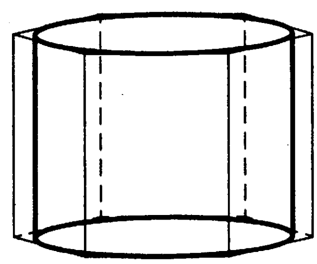
7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 6]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

Ответ: ____________________



8 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{27}$, а высота равна 4.

Ответ: ____________________



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения, $\log_a(ab^6)$, если $\log_b a=\frac{3}{20}$.

Ответ: ____________________

10 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi=\omega t+\frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega=75°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta=10°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 2250°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ____________________

11 Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 112%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 3%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 144}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2 \cdot 4^{2\cos x} - 9 \cdot 4^{\cos x} + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $(2\pi; 4\pi]$.

14 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $2AB^2 = AC^2 + AD^2 - AH^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = 4\sqrt{2}$ и $AC = AD = 5$.

15 Решите неравенство $\frac{1}{2}\log_{x+4}(x^2 + 2x + 1) + \log_{-x-1}(-x^2 - 5x - 4) \leqslant 3$.

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN : BC = 2 : 3$, а $BN = 20$.

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 150 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 6000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 8000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 2)\sqrt{-x-k} \leqslant 0$ имеет конечное число решений.

19 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии a_1, a_2, ... a_n, ..., состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 2019$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 310$ и $S_{n+2} = 625$?

в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 729$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 9

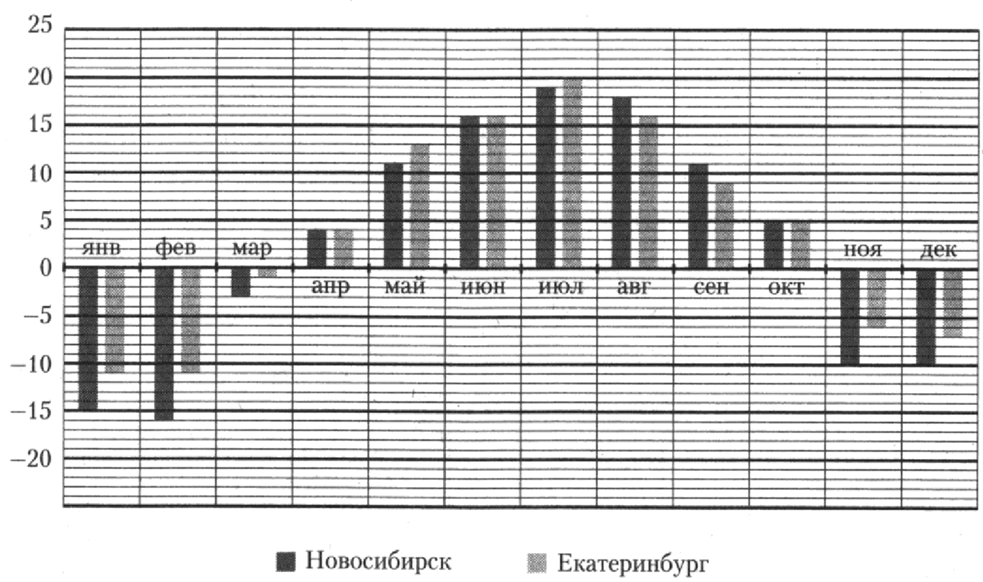
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Стоимость проездного билета на месяц составляет 710 рублей, а стоимость билета на одну поездку— 21 рубль. Аня купила проездной и сделала за месяц 40 поездок. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

Ответ: ____________________

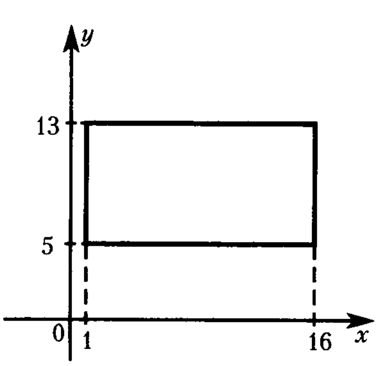
2 На диаграмме показана средняя температура в Новосибирске и Екатеринбурге за каждый месяц 2019 года. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме количество месяцев, в которых средняя температура в Новосибирске была не выше средней температуры в Екатеринбурге.



Ответ: ____________________

3 Найдите длину диагонали прямоугольника, изображённого на рисунке.

Ответ: ____________________



4 Вероятность того, что новый смартфон выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,1. Если смартфон проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в смартфоне нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый смартфон прослужит больше двух лет, но не больше четырёх.

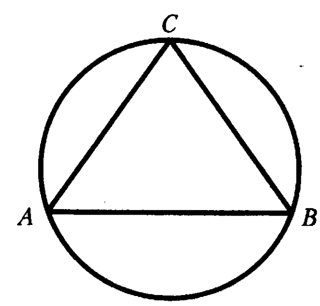
Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x-1)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

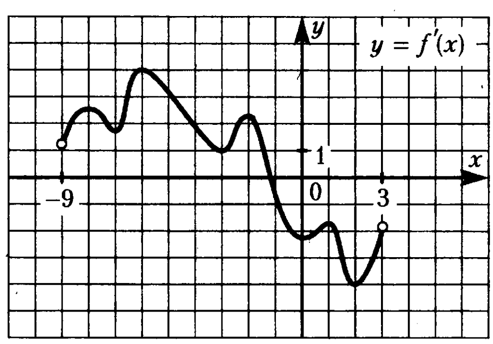
Ответ: ____________________

6 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 50, основание равно 60. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Ответ: ____________________



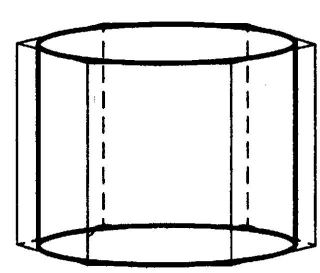
7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9; 3)$. В какой точке отрезка $[-7; -1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ____________________

8 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 3.

Ответ: ____________________



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_a(a^3b^8)$, если $\log_b a = \frac{1}{3}$.

Ответ: ___________________

10 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 15°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 6°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 2250°. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ___________________

11 Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вчетверо, общий доход семьи вырос бы на 183%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 1%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ___________________

12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 196}$.

Ответ: ___________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $3 \cdot 81^{\sin x} - 4 \cdot 9^{\sin x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$.

14 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $AB^2 - AC^2 = AD^2 - 2AH^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = 6$ и $AC = AD = 4\sqrt{5}$.

15 Решите неравенство $\log_5^2(2x+3) + 2\log_5^2 x \leqslant 3\log_5(2x+3) \cdot \log_5 x$.

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN : BC = 3 : 5$, а $BN = 24$.

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 150 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 6000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 4000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 5)\sqrt{2k - x} \leqslant 0$ имеет единственное решение.

19 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии a_1, a_2, ... a_n, ..., состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 2022$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 128$ и $S_{n+2} = 343$?

в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 243$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 10

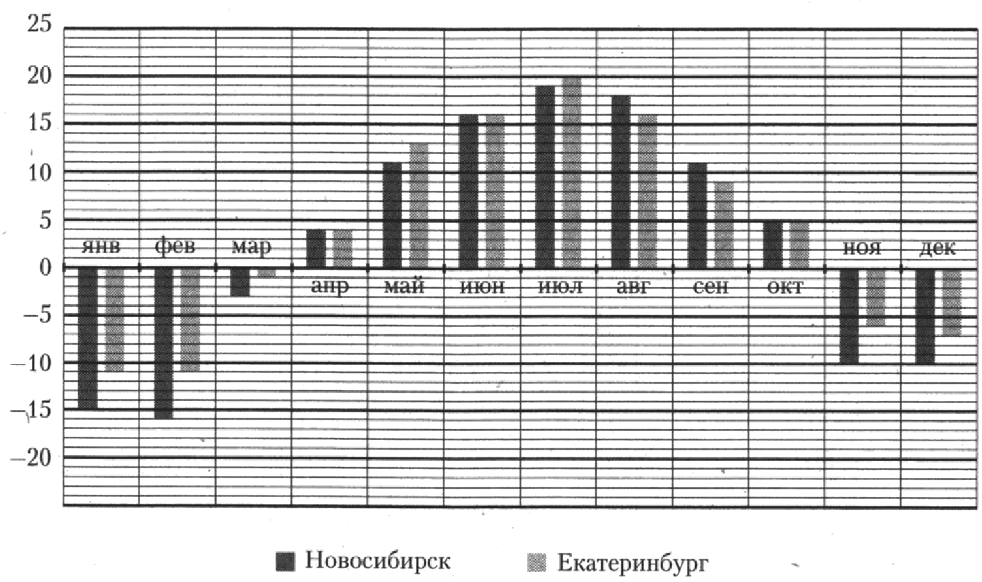
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Стоимость проездного билета на месяц составляет 660 рублей, а стоимость билета на одну поездку — 20 рублей. Аня купила проездной и сделала за месяц 44 поездки. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

Ответ: ____________________

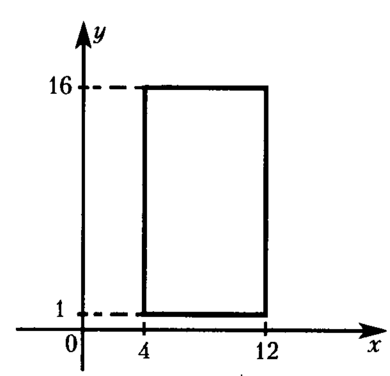
2 На диаграмме показана средняя температура в Новосибирске и Екатеринбурге за каждый месяц 2019 года. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме количество месяцев, в которых средняя температура в Новосибирске была не ниже средней температуры в Екатеринбурге.



Ответ: ____________________

3 Найдите длину диагонали прямоугольника, изображённого на рисунке.

Ответ: ____________________



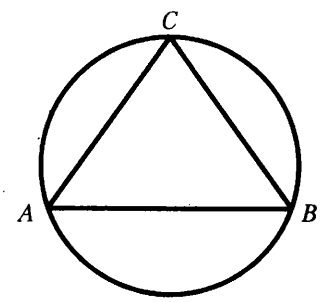
4 Вероятность того, что новый ноутбук выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,2. Если ноутбук проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в ноутбуке нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность, что такой новый ноутбук прослужит больше двух, но не больше четырёх лет.

Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x+5)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

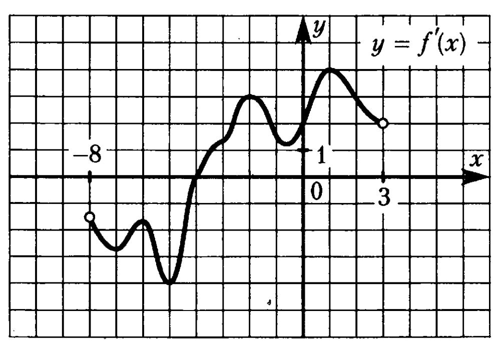
Ответ: ____________________

6 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 6,5, основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



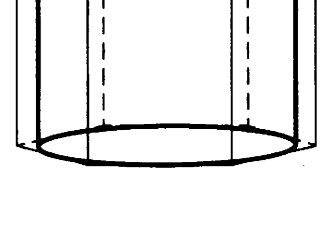
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. В какой точке отрезка $[-3;1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ____________________

8 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{0,12}$, а высота равна 3.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_a(a^2b)$, если $\log_b a = \frac{1}{3}$.

Ответ: ____________________

10 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 20°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет $1200°$. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

Ответ: ____________________

11 Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 65%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 2%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 729}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $5^{1+2\operatorname{tg}x} - 6\cdot 5^{\operatorname{tg}x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $AH^2 = AC^2 + AD^2 - AB^2 - AH^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB = 8$ и $AC = AD = 6$.

15 Решите неравенство $\log_3^2 x + 2\log_3^2(5x-6) \leqslant 3\log_3(5x-6)\cdot\log_3 x$.

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN:BC = 2:5$, а $BN = 60$.

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 350 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 6000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 13)\sqrt{3x + 2k} \leqslant 0$ имеет не более двух решений.

19 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии a_1, a_2, ... a_n, ..., состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 2025$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 1024$ и $S_{n+2} = 1331$?

в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 1331$?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 11

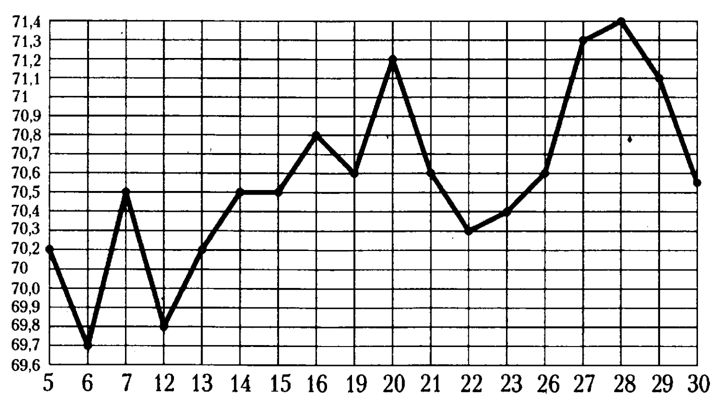
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 10 человек следует взять $\frac{1}{10}$ фунта чернослива. Сколько граммов чернослива нужно взять, чтобы испечь пирог на 3 человека? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

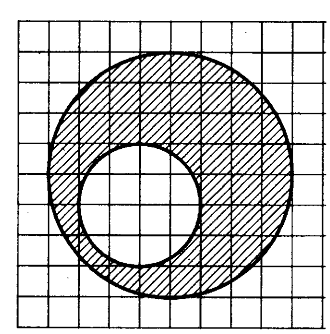
Ответ: ____________________

2 На графике жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ на все рабочие дни с 5 по 30 марта 2018 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности точки соединены линиями. Определите, какого числа курс евро за указанный период был наименьшим.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге изображена фигура, ограниченная двумя окружностями. Площадь круга, ограниченного внутренней окружностью, равна 2. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: ____________________

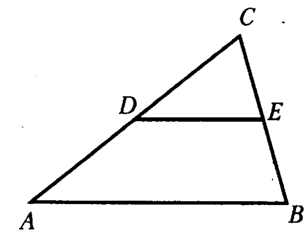
4 Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков больше 8, но меньше 12.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\log_5(5-x) = 2\log_5 3$.

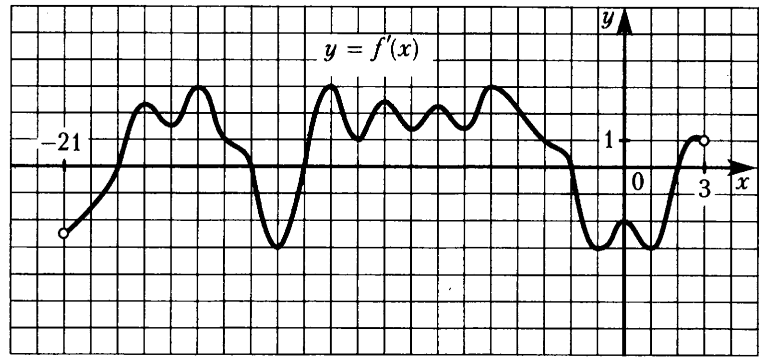
Ответ: ____________________

6 Площадь треугольника ABC равна 192, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



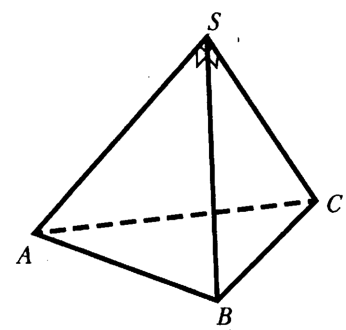
Ответ: ____________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-21; 3)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-20; -1]$.



Ответ: ____________

8 Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, каждое из них равно 36. Найдите объём пирамиды.



Ответ: ____________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите $50\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}1$.

Ответ: ____________

10 Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не выльется. При вращении ведёрка давление воды на дно не остаётся постоянным: оно максимально в нижней точке и минимально в верхней. Вода не будет выливаться, если давление на дно будет неотрицательным, а это происходит тогда, когда в верхней точке траектории центростремительное ускорение не меньше ускорения свободного падения, то есть вода не выльется, если $\frac{v^2}{L} \geqslant g$, где v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью должно двигаться ведёрко в верхней точке траектории, чтобы вода из него не вылилась, если длина верёвки равна 67,6 см? Ответ дайте в м/с.

Ответ: ____________

11 Два человека одновременно отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 1,1 км от места отправления. Один идёт со скоростью 2,5 км/ч, а другой — со скоростью 3 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от места отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

Ответ: ____________

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 2^{-4-6x-x^2}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(-2\cos^2 x + \sin x + 1)\cdot\log_{0,5}(-0{,}8\cos x) = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-6\pi; -4\pi]$.

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B, A_1 и D_1.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости сечения.

15 Решите неравенство $\dfrac{3^x+7}{3^x-7} + \dfrac{3^x-7}{3^x+7} \leqslant \dfrac{4\cdot 3^{x+2}-64}{9^x-49}$.

16 В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AD параллельна стороне BC. Диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Сумма тупых углов равна 270°. Известно, что $AD = 4BC$.

а) Докажите, что $AB = 2CD$.

б) Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах параллельных сторон и диагоналей исходного четырёхугольника $ABCD$, если $BD = 10$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в пятилетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 10% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 30 млн рублей в первый и второй годы, а также по 20 млн в третий, четвёртый и пятый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 180 млн, а к концу проекта — больше 320 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} a + 3x \leqslant 12, \\ a + 4x \geqslant x^2, \\ a \leqslant x \end{cases}$$

является отрезок, длина которого равна 2.

19 Все ученики класса дополнительно занимаются либо в спортивной секции, либо в кружке по любимому предмету, либо одновременно и в секции, и в кружке. Известно, что девочки, занимающиеся в спортивной секции, составляют не более $\frac{3}{13}$ от общего числа учащихся, занимающихся в спортивной секции, а на кружки девочек ходит не более $\frac{2}{7}$ от общего числа учащихся, занимающихся в кружках.

а) Может ли в классе быть всего 7 девочек и 11 мальчиков?

б) Может ли в классе быть всего 9 девочек и 9 мальчиков?

в) Какую наименьшую долю могут составлять мальчики от общего числа учеников, если неизвестно, сколько всего учеников в классе?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 12

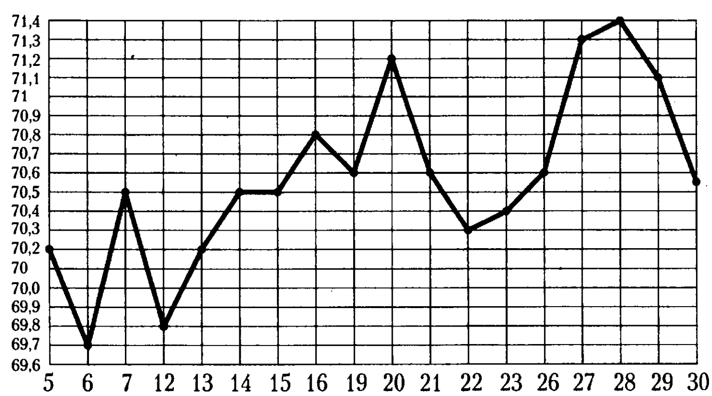
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 10 человек следует взять $\frac{7}{15}$ фунта чернослива. Сколько граммов чернослива нужно взять, чтобы испечь пирог на 3 человека? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

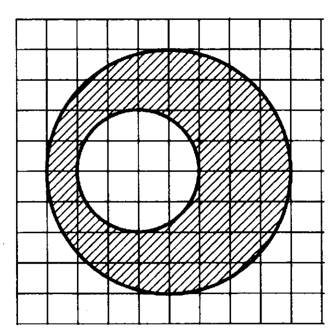
Ответ: ____________________

2 На графике жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ на все рабочие дни с 5 по 30 марта 2018 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности точки соединены линиями. Определите, какого числа курс евро за указанный период был наибольшим.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге изображена фигура, ограниченная двумя окружностями. Площадь круга, ограниченного внутренней окружностью, равна 5. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: ____________________

4 Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков больше 4, но меньше 7.

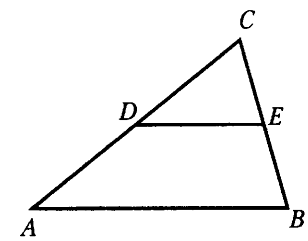
Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\log_7(4-x) = 2\log_7 4$.

Ответ: ____________________

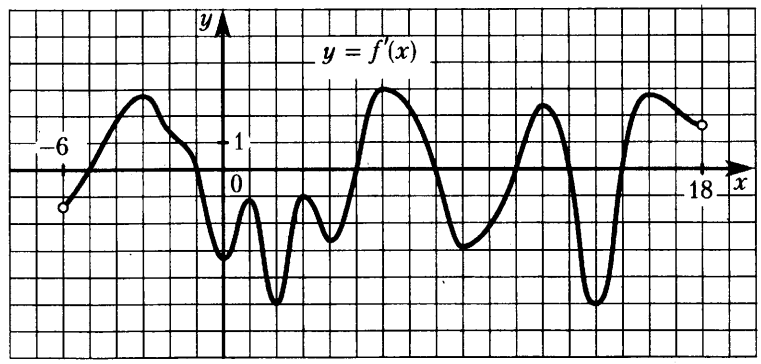
6 Площадь треугольника ABC равна 41, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.

Ответ: ____________________



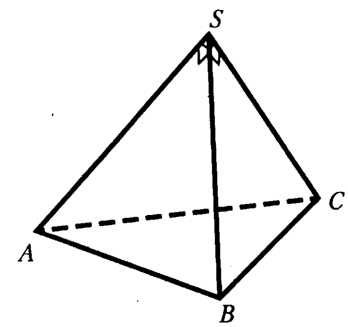
7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 18)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 17]$.

Ответ: ____________________



8 Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, каждое из них равно 27. Найдите объём пирамиды.

Ответ: ____________________



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите $25\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}8$.

Ответ: ____________________

10 Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не выльется. При вращении ведёрка давление воды на дно не остаётся постоянным: оно максимально в нижней точке и минимально в верхней. Вода не будет выливаться, если давление на дно будет неотрицательным, а это происходит тогда, когда в верхней точке траектории центростремительное ускорение не меньше ускорения свободного падения, то есть вода не выльется, если $\frac{v^2}{L} \geqslant g$, где v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью должно двигаться ведёрко в верхней точке траектории, чтобы вода из него не вылилась, если длина верёвки равна 62,5 см? Ответ дайте в м/с.

Ответ: ____________________

11 Два человека одновременно отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 3,5 км от места отправления. Один идёт со скоростью 2,7 км/ч, а другой — со скоростью 3,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от места отправления произойдёт их встреча. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ____________________

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 9^{-34-12x-x^2}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(-6\sin^2 x - 11\cos x + 10)\log_7(0{,}3\sin x) = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B, A_1 и D_1.

б) Найдите расстояние от центра грани $ABCD$ до плоскости сечения.

15 Решите неравенство $\frac{2^x+8}{2^x-8} + \frac{2^x-8}{2^x+8} \leqslant \frac{5\cdot 2^{x+3}-72}{4^x-64}$.

16 В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AD параллельна стороне BC. Диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Сумма тупых углов равна 270°. Известно, что $AD = 4BC$.

а) Докажите, что $CD = \frac{1}{2}AB$.

б) Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах параллельных сторон и диагоналей исходного четырёхугольника $ABCD$, если $BD = 16$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в пятилетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 10% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн в третий, четвёртый и пятый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 130 млн, а к концу проекта — больше 200 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} a + x \leqslant 8, \\ a + 4x + 4 \geqslant x^2, \\ a \leqslant 3x + 6 \end{cases}$$

является отрезок, длина которого равна 6.

19 Все ученики класса дополнительно занимаются либо в спортивной секции, либо в кружке по любимому предмету, либо одновременно и в секции, и в кружке. Известно, что девочки, занимающиеся в спортивной секции, составляют не более $\frac{2}{9}$ от общего числа учащихся, занимающихся в спортивной секции, а на кружки девочек ходит не более $\frac{5}{16}$ от общего числа учащихся, занимающихся в кружках.

а) Может ли в классе быть всего 8 девочек и 12 мальчиков?

б) Может ли в классе быть всего 10 девочек и 10 мальчиков?

в) Какую наименьшую долю могут составлять мальчики от общего числа учеников, если неизвестно, сколько всего учеников в параллели (параллель состоит из нескольких классов)?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 13

Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 8 человек следует взять $\frac{1}{10}$ фунта чернослива. Сколько граммов чернослива нужно взять, чтобы испечь пирог на 3 человека? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

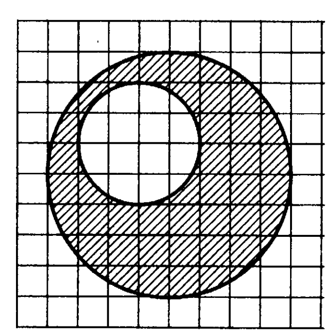
Ответ: ____________________

2 На графике жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ на все рабочие дни с 5 по 30 марта 2018 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности точки соединены линиями. Определите наименьший курс евро в рублях в период с 14 по 23 марта.

Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге изображена фигура, ограниченная двумя кругами. Площадь круга, ограниченного внутренней окружностью, равна 4. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

Ответ: ____________________



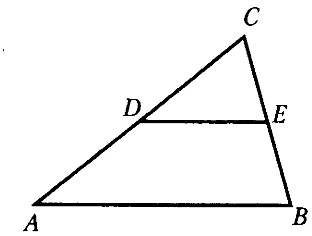
4 Монетку бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет более одного раза.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\log_4(8-5x) = 2\log_4 3$.

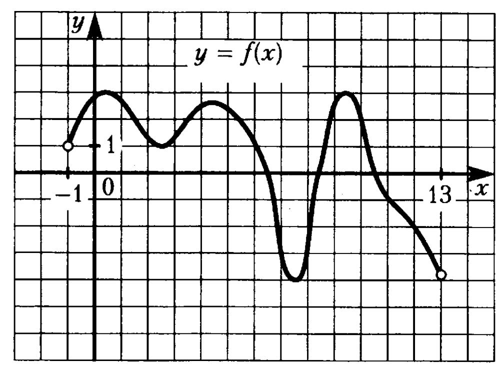
Ответ: ____________________

6 Площадь треугольника ABC равна 52, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



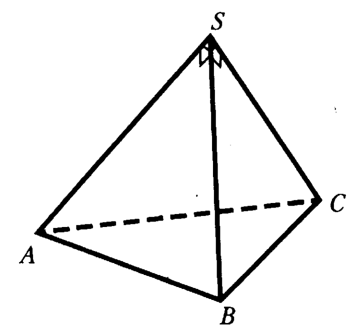
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1;\ 13)$. Найдите количество целых решений неравенства $f'(x) > 0$.



Ответ: ____________________

8 Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, каждое из них равно 30. Найдите объём пирамиды.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите $-25\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}2$.

Ответ: ____________________

10 Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не выльется. При вращении ведёрка давление воды на дно не остаётся постоянным: оно максимально в нижней точке и минимально в верхней. Вода не будет выливаться, если давление на дно будет неотрицательным, а это происходит тогда, когда в верхней точке траектории центростремительное ускорение не меньше ускорения свободного падения, то есть вода не выльется, если $\frac{v^2}{L} \geqslant g$, где v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью должно двигаться ведёрко в верхней точке траектории, чтобы вода из него не вылилась, если длина верёвки равна 90 см? Ответ дайте в м/с.

Ответ: ____________________

11 Два человека одновременно отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 1,5 км от места отправления. Один идёт со скоростью 2,2 км/ч, а другой — со скоростью 4,4 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от места отправления произойдёт их встреча. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ____________________

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 7^{-13+8x-x^2}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(-2\cos^2 x - 3\sin x + 3)\log_{\frac{1}{3}}(0{,}6\cos x) = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-5\pi; -3\pi]$.

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью, проходящей через середины его рёбер AB, B_1C_1, AD, является правильным многоугольником.

б) Найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости сечения.

15 Решите неравенство $\dfrac{5^x+5}{5^x-5} + \dfrac{5^x-5}{5^x+5} \leqslant \dfrac{20\cdot 5^{x-1}+48}{5^{2x}-25}$.

16 В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AD параллельна стороне BC. Диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Сумма тупых углов равна 270°. Известно, что $AD = 4BC$.

а) Докажите, что $BD = \sqrt{BC\cdot AD}$.

б) Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах параллельных сторон и диагоналей исходного четырёхугольника $ABCD$, если $BD = 12$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в пятилетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн в третий, четвёртый и пятый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 150 млн, а к концу проекта — больше 300 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} a+3 \geqslant 2x, \\ a+x^2+2x \leqslant 5, \\ a+x \geqslant -4, \end{cases}$$

является отрезок, длина которого равна 4.

19 Все ученики класса дополнительно занимаются либо в спортивной секции, либо в кружке по любимому предмету, либо одновременно и секции, и кружке. Известно, что девочки, занимающиеся в спортивной секции, составляют не более $\frac{3}{11}$ от общего числа учащихся, занимающихся в спортивной секции, а на кружки девочек ходит не более $\frac{8}{19}$ от общего числа учащихся, занимающихся в кружках.

а) Может ли в классе быть всего 10 девочек и 12 мальчиков?

б) Может ли в классе быть всего 11 девочек и 11 мальчиков?

в) Какую наименьшую долю могут составлять мальчики от общего числа учеников, если неизвестно, сколько всего учеников в параллели (параллель состоит из нескольких классов)?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 14

Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

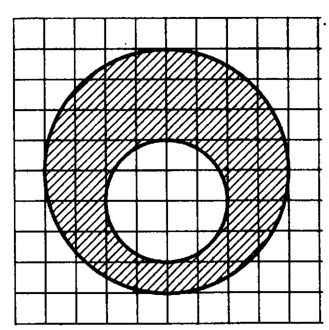
1 В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 10 человек следует взять $\frac{3}{10}$ фунта чернослива. Сколько граммов чернослива нужно взять, чтобы испечь пирог на 6 человек? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

Ответ: ___________________

2 На графике жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ на все рабочие дни с 5 по 30 марта 2018 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности точки соединены линиями. Определите наибольший курс евро в рублях в период с 14 по 23 марта.

Ответ: ___________________

3 На клетчатой бумаге изображена фигура, ограниченная двумя окружностями. Площадь круга, ограниченного внутренней окружностью, равна 4. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: ___________________

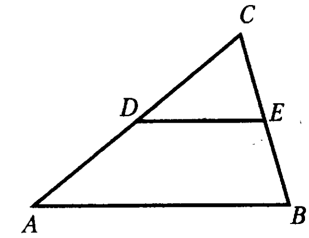
4 Монетку бросают трижды. Найдите вероятность того, что количество выпавших орлов не меньше 1 и не больше 2.

Ответ: ___________________

5 Найдите корень уравнения $\log_4(6-x) = 3\log_4 3$.

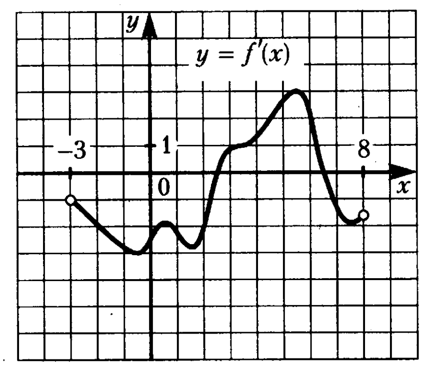
Ответ: ___________________

6 Площадь треугольника ABC равна 40, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



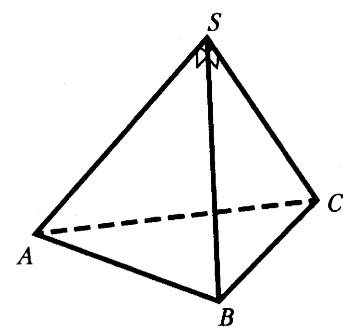
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество целых точек, расположенных в промежутках убывания функции $f(x)$.



Ответ: ____________________

8 Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, каждое из них равно 12. Найдите объём пирамиды.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите $-25\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$.

Ответ: ____________________

10 Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не выльется. При вращении ведёрка давление воды на дно не остаётся постоянным: оно максимально в нижней точке и минимально в верхней. Вода не будет выливаться, если давление на дно будет неотрицательным, а это происходит тогда, когда в верхней точке траектории центростремительное ускорение не меньше ускорения свободного падения, то есть вода не выльется, если $\frac{v^2}{L} \geqslant g$, где v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью должно двигаться ведёрко в верхней точке траектории, чтобы вода из него не вылилась, если длина верёвки равна 57,6 см? Ответ дайте в м/с.

Ответ: ____________________

11 Два человека одновременно отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 2,4 км от места отправления. Один идёт со скоростью 3,5 км/ч, а другой — со скоростью 4,9 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от места отправления произойдёт их встреча. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ____________________

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 5^{-79 + 18x - x^2}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $6\log^2_{27} x + 5\log_{27} x + 1 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(0{,}31; +\infty)$.

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью, проходящей через середины его рёбер AB, B_1C_1, AD, является правильным многоугольником.

б) Найдите расстояние от центра грани $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости сечения.

15 Решите неравенство $\dfrac{4^x + 2}{4^x - 2} + \dfrac{4^x - 2}{4^x + 2} \leqslant \dfrac{16 \cdot 4^{x-1} + 6}{16^x - 4}$.

16 В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AD параллельна стороне BC. Диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Сумма тупых углов равна 270°. Известно, что $AD = 4BC$.

а) Докажите, что $CD = \dfrac{1}{2}AB$.

б) Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах сторон исходного четырёхугольника $ABCD$, если $BD = 20$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в пятилетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 30% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн в третий, четвёртый и пятый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 250 млн, а к концу проекта — больше 700 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} a \geqslant x - 10, \\ a + x^2 + 1 \leqslant 4x, \\ a + 2x \geqslant -5 \end{cases}$$

является отрезок, длина которого равна 2.

19 Все ученики класса дополнительно занимаются либо в спортивной секции, либо в кружке по любимому предмету, либо одновременно и секции, и кружке. Известно, что девочки, занимающиеся в спортивной секции, составляют не более $\dfrac{3}{14}$ от общего числа учащихся, занимающихся в спортивной секции, а на кружки девочек ходит не более $\dfrac{6}{19}$ от общего числа учащихся, занимающихся в кружках.

а) Может ли в классе быть всего 10 девочек и 14 мальчиков?

б) Могло ли в классе быть всего 12 девочек и 12 мальчиков?

в) Какую наименьшую долю могут составлять мальчики от общего числа учеников, если неизвестно, сколько всего учеников в параллели (параллель состоит из нескольких классов)?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 15

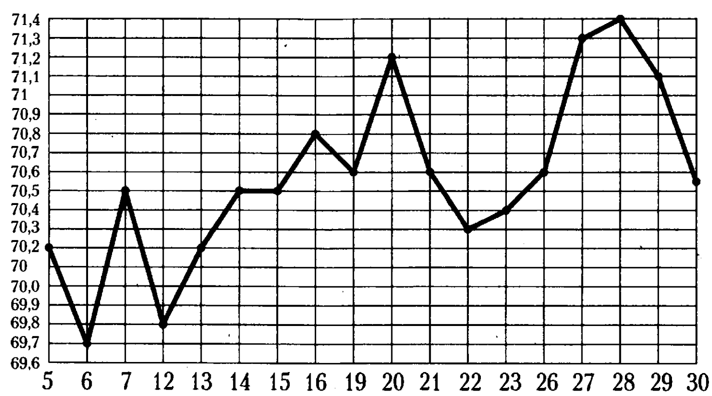
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В книге Елены Молоховец «Подарок молодым хозяйкам» имеется рецепт пирога с черносливом. Для пирога на 8 человек следует взять $\frac{3}{4}$ фунта чернослива. Сколько граммов чернослива нужно взять, чтобы испечь пирог на 4 человека? Считайте, что 1 фунт равен 0,4 кг.

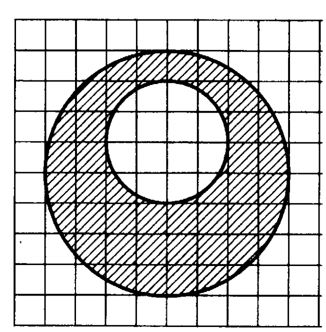
Ответ: ____________________

2 На графике жирными точками показан курс евро, установленный Центробанком РФ на все рабочие дни с 5 по 30 марта 2018 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Для наглядности точки соединены линиями. За указанный период в течение двух рабочих дней курс евро оставался неизменным. Определите, какая цена евро была установлена в эти дни.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге изображена фигура, ограниченная двумя окружностями. Площадь круга, ограниченного внутренней окружностью, равна 2. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



Ответ: ____________________

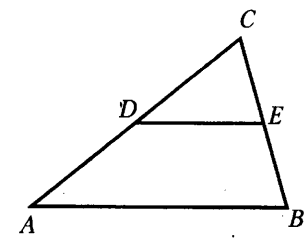
4 Монетку бросают три раза. Найдите вероятность того, что при втором и третьем бросках выпадет одна и та же сторона монеты.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\log_2(4-x) = 2\log_2 5$.

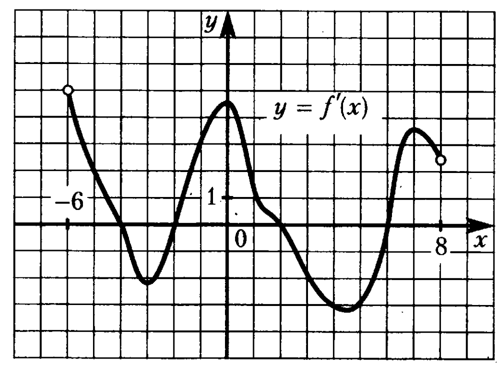
Ответ: ____________________

6 Площадь треугольника ABC равна 72, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



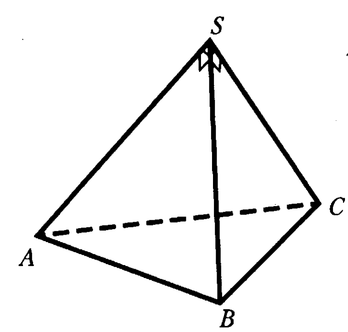
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$. Сколько можно провести касательных к графику функции $f(x)$, которые образуют угол $45°$ с прямой $x = 0$?



Ответ: ____________________

8 Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, каждое из них равно 9. Найдите объём пирамиды.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите $-25\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}7$.

Ответ: ____________________

10 Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не выльется. При вращении ведёрка давление воды на дно не остаётся постоянным: оно максимально в нижней точке и минимально в верхней. Вода не будет выливаться, если давление на дно будет неотрицательным, а это происходит тогда, когда в верхней точке траектории центростремительное ускорение не меньше ускорения свободного падения, то есть вода не выльется, если $\frac{v^2}{L} \geqslant g$, где v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью должно двигаться ведёрко в верхней точке траектории, чтобы вода из него не вылилась, если длина верёвки равна 40 см? Ответ дайте в м/с.

Ответ: ____________________

11 Два человека одновременно отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 6,3 км от места отправления. Один идёт со скоростью 2,5 км/ч, а другой — со скоростью 3,8 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от места отправления произойдет их встреча. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ____________________

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 2^{-217+30x-x^2}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $12\log_{81}^2 x - 7\log_{81} x + 1 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(4; +\infty)$.

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью, проходящей через середины его рёбер AB, B_1C_1, AD, является правильным многоугольником.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости сечения.

15 Решите неравенство $\dfrac{6^x+6}{6^x-6} + \dfrac{6^x-6}{6^x+6} \leqslant \dfrac{6^{x+2}+162}{3\cdot 6^{2x}-108}$.

16 В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AD параллельна стороне BC. Диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Сумма тупых углов равна 270°. Известно, что $AD = 4BC$.

а) Докажите, что $AB = 2CD$.

б) Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах сторон исходного четырёхугольника $ABCD$, если $BD = 8$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в пятилетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 10 млн рублей в первый и второй годы, а также по 5 млн в третий, четвёртый и пятый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 100 млн, а к концу проекта — больше 190 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant 3x + 20, \\ a - 10 \geqslant x^2 + 8x, \\ a \leqslant x \end{cases}$$

является отрезок, длина которого равна 4.

19 Все ученики класса дополнительно занимаются либо в спортивной секции, либо в кружке по любимому предмету, либо одновременно и секции, и кружке. Известно, что девочки, занимающиеся в спортивной секции, составляют не более $\dfrac{2}{9}$ от общего числа учащихся, занимающихся в спортивной секции, а на кружки девочек ходит не более $\dfrac{1}{3}$ от общего числа учащихся, занимающихся в кружках.

а) Может ли в классе быть всего 11 девочек и 15 мальчиков?

б) Может ли в классе быть всего 13 девочек и 13 мальчиков?

в) Какую наименьшую долю могут составлять мальчики от общего числа учеников, если неизвестно, сколько всего учеников в классе?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 16

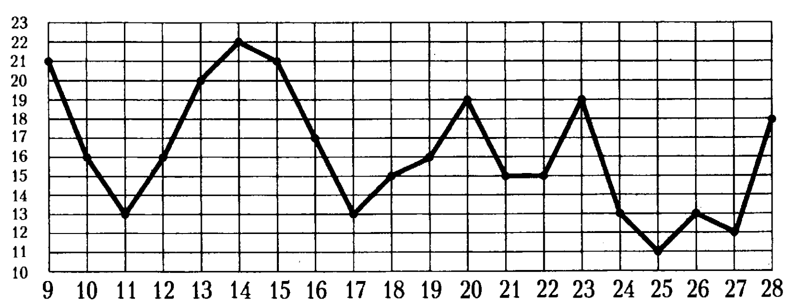
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Тетрадь стоит 11 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 80 тетрадей, если при покупке больше 50 тетрадей магазин делает скидку 20% от стоимости всей покупки?

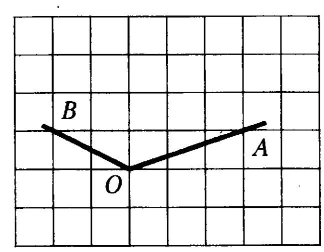
Ответ: ____________________

2 На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Калининграде во все дни с 9 по 28 апреля 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Найдите, какого числа средняя температура в Калининграде была наибольшей за данный период. В ответ запишите среднюю температуру в этот день в градусах Цельсия.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Ответ: ____________________

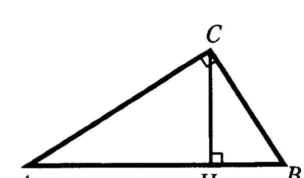
4 Клиент получает в банке кредитную карту. Четыре последних цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние четыре цифры идут подряд в порядке возрастания, например, 0123 или 4567?

Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\sqrt{6+5x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

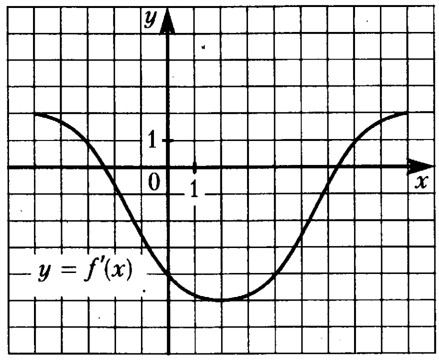
Ответ: ____________________

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 27$, $\cos A = \frac{2}{3}$. Найдите AH.



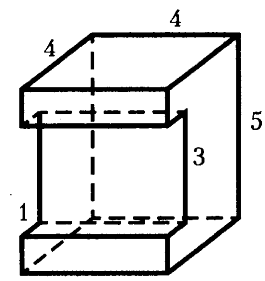
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику параллельна прямой $y = 8 - 5x$ или совпадает с ней.



Ответ: ____________________

8 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2$.

Ответ: ____________________

10 Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: ____________________

11 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку минимума функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $27^x - 6 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 54 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 5; \log_3 8\right]$.

14 Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$.

а) Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми BD_1 и AC, если $AB = 4$, $AA_1 = 8$.

15 Решите неравенство $\sqrt{1 - \log_2 x} \cdot \dfrac{(x-3)(x+5)}{x+1} \geqslant 0$.

16 Первая окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Вторая окружность проходит через точки D и E и пересекает продолжения сторон BC и AC за вершину C в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB.

б) Прямые MD и NE вторично пересекают первую окружность в точках X и Y соответственно. Найдите её радиус, если $AX = XY = 2$, а $AB = 4$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

18 Найдите все значения $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 a + \cos^8 \frac{a}{2} + 5^{x^4} = \cos^2 \frac{\pi x}{2}$$

имеет единственное решение.

19 а) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 14 раз больше суммы цифр этого числа?

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 210 раз больше сумм цифр этого числа?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 70 раз больше суммы цифр этого числа.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 17

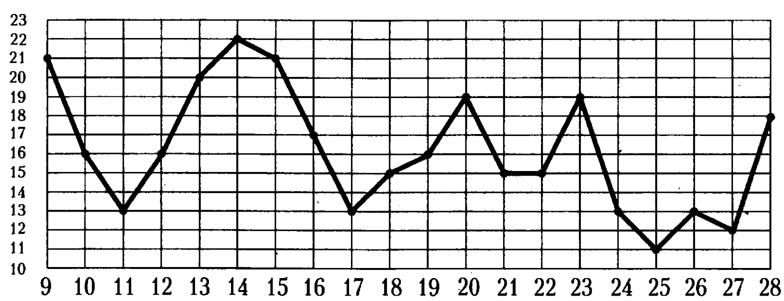
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Тетрадь стоит 26 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 80 тетрадей, если при покупке больше 50 тетрадей магазин делает скидку 20% от стоимости всей покупки?

Ответ: ___________________

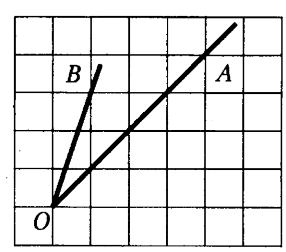
2 На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Калининграде во все дни с 9 по 28 апреля 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Найдите, какого числа средняя температура в Калининграде была наименьшей за данный период. В ответ запишите среднюю температуру в этот день в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.

Ответ: ___________________



4 Клиент получает в банке кредитную карту. Четыре последних цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние четыре цифры идут подряд в порядке убывания, например, 3210 или 6543?

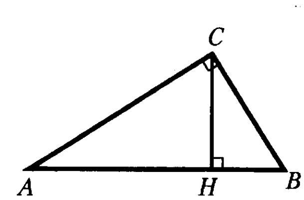
Ответ: ___________________

5 Решите уравнение $\sqrt{24+5x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

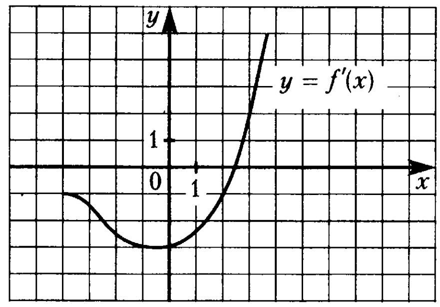
Ответ: ___________________

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 15$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Найдите AH.

Ответ: ___________________

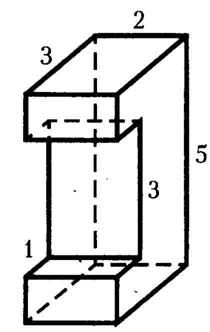


7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней.



Ответ: ____________________

8 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^8$.

Ответ: ____________________

10 Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 2 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: ____________________

11 В среду акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в четверг подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 25% дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку максимума функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x+36}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $16^x - 7\cdot 8^x - 2^{x+3} + 56 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; \log_2 10]$.

14 Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$.

а) Докажите, что прямые B_1D и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми B_1D и AC, если $AB = 6$, $AA_1 = 12$.

15 Решите неравенство $\sqrt{2 - \log_{\frac{1}{2}} x}\cdot\frac{(x-1)(x+7)}{x+2} \geqslant 0$.

16 Первая окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Вторая окружность проходит через точки D и E и пересекает продолжения сторон BC и AC за вершину C в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB.

б) Прямые MD и NE вторично пересекают первую окружность в точках X и Y соответственно. Найдите её радиус, если $AX = XY = 4$, а $AB = 6$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

18 Найдите все значения $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, при каждом из которых уравнение

$$\sin^4 a + \cos^4 \frac{a}{2} + 4^{x^2} = \cos^2 \pi x$$

имеет единственное решение.

19 а) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 20 раз больше суммы цифр этого числа?

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 294 раза больше сумм цифр этого числа?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 84 раза больше суммы цифр этого числа.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 18

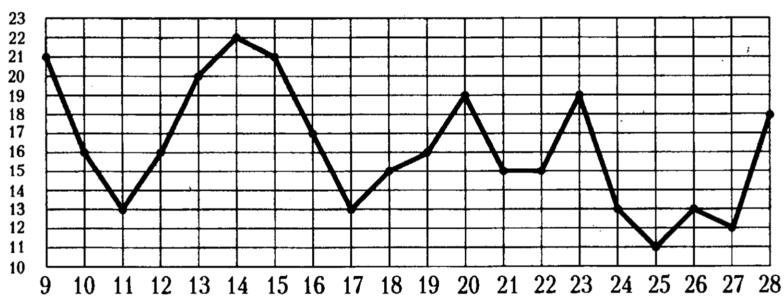
Профильный уровень

> Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Тетрадь стоит 22 рубля. Сколько рублей заплатит покупатель за 70 тетрадей, если при покупке больше 50 тетрадей магазин делает скидку 5% от стоимости всей покупки?

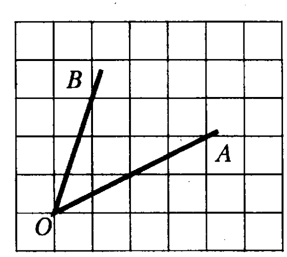
Ответ: ____________________

2 На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Калининграде во все дни с 9 по 28 апреля 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите, какого числа средняя температура в Калининграде была наименьшей за данный период.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Ответ: ____________________

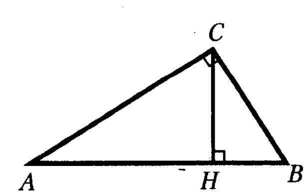
4 Клиент получает в банке кредитную карту. Три последних цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние три цифры идут подряд в порядке возрастания, например, 012 или 345?

Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\sqrt{36+5x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

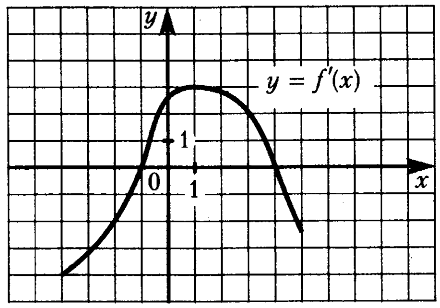
Ответ: ____________________

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AB = 49$, $\cos A = \dfrac{6}{7}$. Найдите AH.



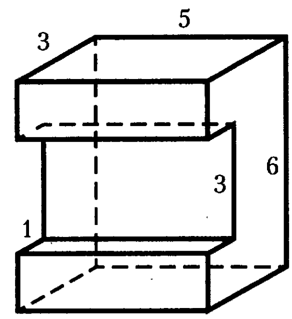
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 6$ или совпадает с ней.



Ответ: ____________________

8 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\dfrac{5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{5}}\right)^3$.

Ответ: ____________________

10 Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 1,9 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 19$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: ____________________

11 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 1% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 10x + 10)e^{5-x}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $343^x - 2\cdot 49^x - 7^{x-2} + \frac{2}{49} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_7 \frac{1}{7}; \log_7 3\right]$.

14 Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми A_1C и BD, если $AB = 6$, $AA_1 = 16$.

15 Решите неравенство $\sqrt{1+\log_{\frac{1}{3}} x}\cdot\frac{(x-1)(x-10)}{x+6} \geqslant 0$.

16 Первая окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Вторая окружность проходит через точки D и E и пересекает продолжения сторон BC и AC за вершину C в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB.

б) Прямые MD и NE вторично пересекают первую окружность в точках X и Y соответственно. Найдите её радиус, если $AX = XY = 4$, а $AB = 10$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,2 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

18 Найдите все значения $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, при каждом из которых уравнение

$$\sin^4 2a + \cos^4 a + 3^{x^6} = \cos^2 \pi x$$

имеет единственное решение.

19 а) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 30 раз больше суммы цифр этого числа?

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 200 раз больше сумм цифр этого числа?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 64 раза больше суммы цифр этого числа.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 19

Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

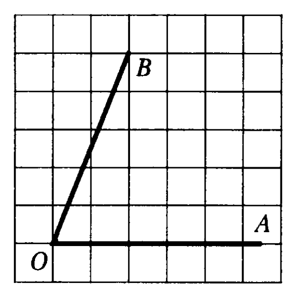
1 Тетрадь стоит 26 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 60 тетрадей, если при покупке больше 50 тетрадей магазин делает скидку 15% от стоимости всей покупки?

Ответ: ____________________

2 На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Калининграде во все дни с 9 по 28 апреля 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите, какого числа средняя температура в Калининграде была наибольшей за данный период.

Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Ответ: ____________________

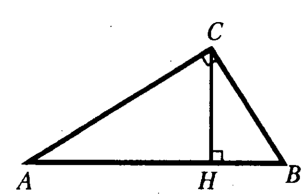
4 Клиент получает в банке кредитную карту. Три последних цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние три цифры идут подряд в порядке убывания, например, 876 или 432?

Ответ: ____________________

5 Решите уравнение $\sqrt{7+6x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

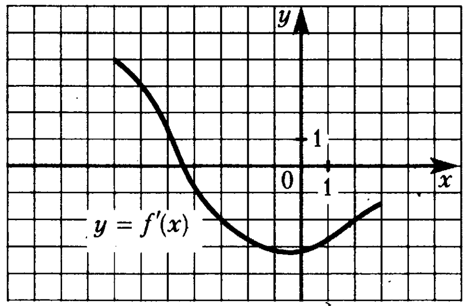
Ответ: ____________________

6 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 49$, $\cos A = \frac{5}{7}$. Найдите AH.



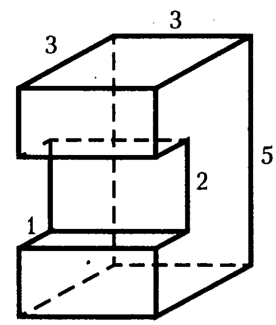
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 1$ или совпадает с ней.



Ответ: ___________________

8 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\dfrac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{3}}\right)^2$.

Ответ: ___________________

10 Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 1,8 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 18$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: ___________________

11 В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

Ответ: ___________________

12 Найдите точку максимума функции $y = (x-2)^2 e^{x-6}$.

Ответ: ___________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $625^x - 3 \cdot 125^x - 5^{x-1} + \frac{3}{5} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; 1]$.

14 Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$.

а) Докажите, что прямые AC_1 и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AC_1 и BD, если $AB = 4$, $AA_1 = 10$.

15 Решите неравенство $\sqrt{2 + \log_{\frac{1}{5}} x} \cdot \frac{(x-15)(x-27)}{x-30} \leqslant 0$.

16 Первая окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Вторая окружность проходит через точки D и E и пересекает продолжения сторон BC и AC за вершину C в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB.

б) Прямые MD и NE вторично пересекают первую окружность в точках X и Y соответственно. Найдите её радиус, если $AX = XY = 4$, а $AB = 8$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,8 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

18 Найдите все значения $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, при каждом из которых уравнение

$$\sin^6 2a + \cos^2 a + 2^{x^4} = \cos^2 \frac{\pi x}{2}$$

имеет единственное решение.

19 а) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа?

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 245 раз больше сумм цифр этого числа?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 49 раз больше суммы цифр этого числа.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 20

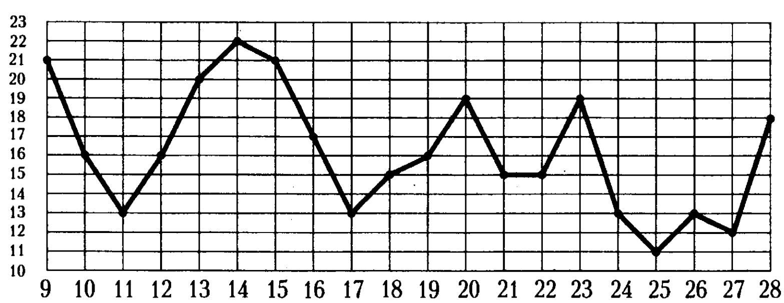
Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Тетрадь стоит 24 рубля. Сколько рублей заплатит покупатель за 60 тетрадей, если при покупке больше 50 тетрадей магазин делает скидку 10% от стоимости всей покупки?

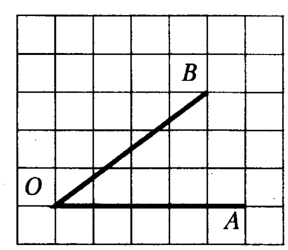
Ответ: ___________________

2 На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Калининграде во все дни с 9 по 28 апреля 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Найдите, какого числа средняя температура в Калининграде была наибольшей за данный период, а кого числа наименьшей. В ответ запишите разность температур в эти два дня в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Ответ: ___________________

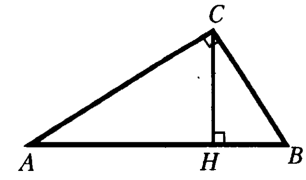
4 Клиент получает в банке кредитную карту. Четыре последних цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние четыре цифры состоят из двух повторяющихся групп по 2 различные цифры, например, 0404 или 5252?

Ответ: ___________________

5 Решите уравнение $\sqrt{27+6x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

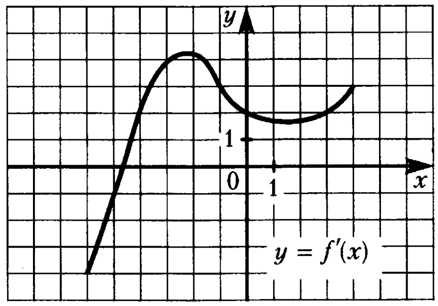
Ответ: ___________________

6 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AB = 49$, $\cos A = \frac{4}{7}$. Найдите AH.



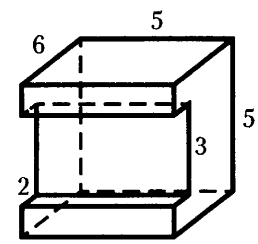
Ответ: ___________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 8 - x$ или совпадает с ней.



Ответ: ____________________

8 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\dfrac{8^{\frac{1}{6}} \cdot 8^{\frac{1}{9}}}{\sqrt[18]{8}}\right)^3$.

Ответ: ____________________

10 Мяч бросили под под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 1,5 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: ____________________

11 В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 36% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку минимума функции $y = (x-2)^2 e^{x-5}$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $125^x - 9 \cdot 25^x + 23 \cdot 5^x - 15 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_5 \frac{1}{5}; \log_5 4\right]$.

14 Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$.

а) Докажите, что прямые BD_1 и A_1C_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми BD_1 и A_1C_1, если $AB = 6$, $AA_1 = 18$.

15 Решите неравенство $\sqrt{3 - \log_2 x} \cdot \frac{(5-x)(x+6)}{x-11} \leqslant 0$.

16 Первая окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Вторая окружность проходит через точки D и E и пересекает продолжения сторон BC и AC за вершину C в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB.

б) Прямые MD и NE вторично пересекают первую окружность в точках X и Y соответственно. Найдите её радиус, если $AX = XY = 6$, а $AB = 8$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5,6 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

18 Найдите все значения $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 2a + \cos^4 a + 8^{x^8} = \cos^2 \pi x$$

имеет единственное решение.

19 а) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 16 раз больше суммы цифр этого числа?

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 225 раз больше сумм цифр этого числа?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 126 раз больше суммы цифр этого числа.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 21

Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

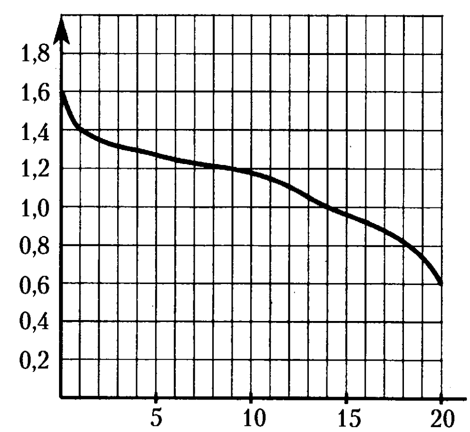
Часть 1

1 Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3500 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1100 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 900 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

Ответ: ____________________

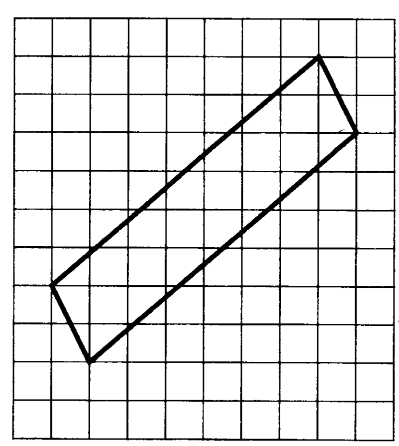
2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, на сколько вольт упадёт напряжение за первый час работы фонарика.

Ответ: ____________________



3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.

Ответ: ____________________



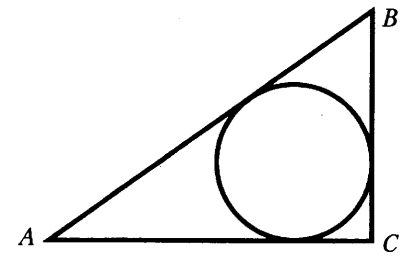
4 В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей; 13 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{10}$.

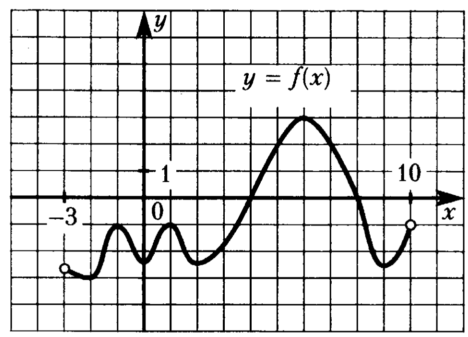
Ответ: ____________________

6 В треугольнике ABC $AC = 48$, $BC = 14$, угол C равен $90°$. Найдите радиус вписанной окружности.



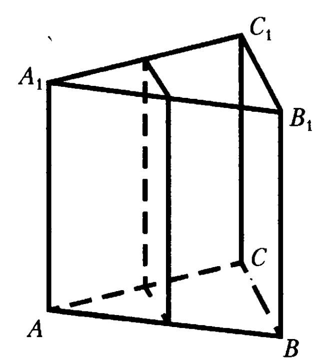
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 10)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ____________________

8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 14, боковые рёбра равны 3. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{15\sin 4°}{\cos 2° \cdot \cos 88°}$.

Ответ: ____________________

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 152 мг. Период его полураспада составляет 1 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 19 мг.

Ответ: ____________________

11 Две трубы наполняют бассейн за 3 часа 40 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 4 часа. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

Ответ: ___________________

12 Найдите точку минимума функции $y = \log_5(x^2 + 6x + 12)$.

Ответ: ___________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(\sin\left(4x - \frac{5\pi}{2}\right) + 2\cos^3 4x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 4x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB = CF:FA = 1:5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения плоскостью MGF.

15 Решите неравенство $\log_4 \frac{3-x}{x-7} + \log_{0,25}(x-3) \geqslant \log_{\frac{1}{4}}\left((x-7)^2\right)$.

16 В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A вписана окружность, касающаяся оснований BC и AD в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что диагонали трапеции делят отрезок PQ в одном и том же отношении.

б) Найдите большее основание трапеции AD, если меньшее основание $BC = 6$ и $S_{ABPQ}:S_{DCPQ} = 5:4$.

17 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 800 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 880 тыс. руб.?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x^2 + ax + a)^2 = 2x^4 + 2a^2(x+1)^2$$

имеет единственный корень на интервале $(-1; 1)$.

19 На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Оказалось, что каждое следующее число (кроме первого) или на 3 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

а) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 8, а десятое равно 18?

б) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 17, а девятое равно 8?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 1000, а последнее число равно 7?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 22

Профильный уровень

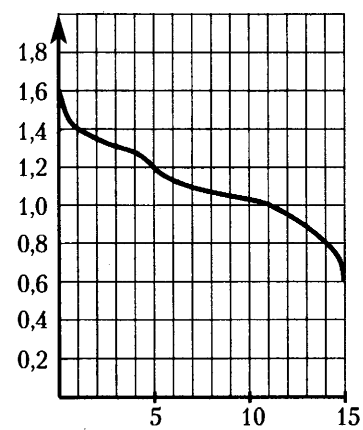
Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3300 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1700 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1300 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

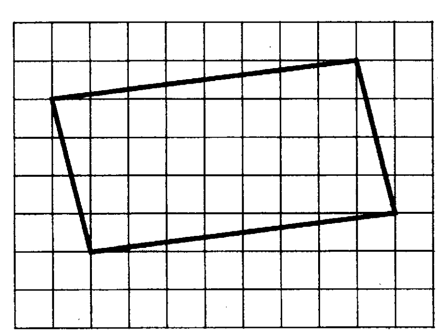
Ответ: ____________________

2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, на сколько вольт упадёт напряжение за первые пять часов работы фонарика.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



Ответ: ____________________

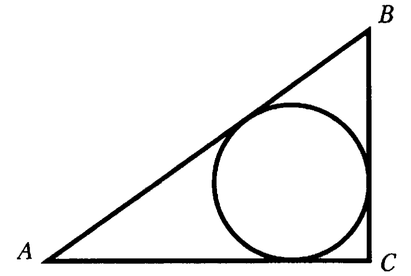
4 В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей; 18 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{8x-7} = \frac{1}{9}$.

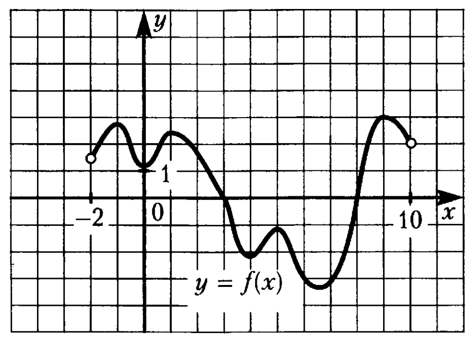
Ответ: ____________________

6 В треугольнике ABC $AC = 2$, $BC = 1{,}5$, угол C равен $90°$. Найдите радиус вписанной окружности.



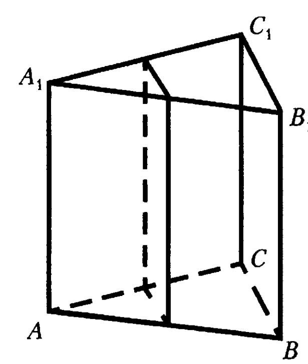
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите количество точек, в которых производная функции равна 0.



Ответ: ____________________

8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 8, боковые рёбра равны 20. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\frac{-20\sin 154°}{\cos 77° \cdot \cos 13°}$.

Ответ: ____________________

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 124 мг. Период его полураспада составляет 2 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 31 мг.

Ответ: ____________________

11 Две трубы наполняют бассейн за 2 часа 55 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 5 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку минимума функции $y = \log_3(x^2 + 18x + 87) - 10$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right) + 4\cos^3 3x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 25, а сторона основания равна 14. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB = CF:FA = 3:4$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

15 Решите неравенство $\log_2 \frac{5-x}{x-8} + \log_{0,5}(x-5) \geqslant \log_{\frac{1}{2}}\left((x-8)^2\right)$.

16 В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A вписана окружность, касающаяся оснований BC и AD в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что диагонали трапеции делят отрезок PQ в одном и том же отношении.

б) Найдите большее основание трапеции AD, если меньшее основание $BC = 8$ и $S_{ABPQ}:S_{DCPQ} = 5:3$.

Ответ: 24

17 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 850 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 986 тыс. руб.?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x^2 - 3ax - a)^2 = 2x^4 + 2a^2(3x+1)^2$$

имеет единственный корень на интервале $(-1; 1)$.

19 На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Оказалось, что каждое следующее число (кроме первого) или на 7 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

а) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 21, а тринадцатое равно 11?

б) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 13, а двенадцатое равно 17?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 3186, а последнее число равно 15?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 23

Профильный уровень

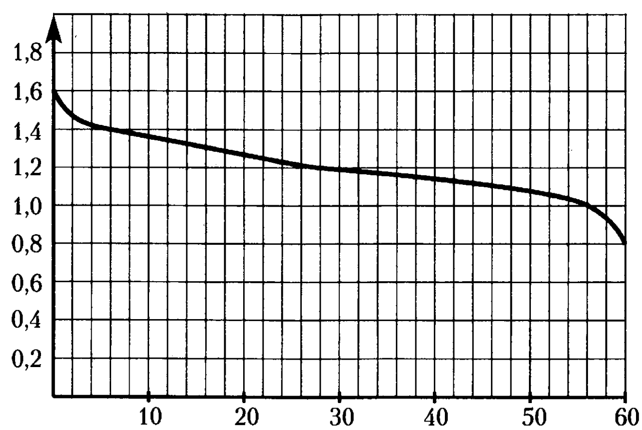
Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3300 рублей. До установки счётчиков за воду платили 800 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 400 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

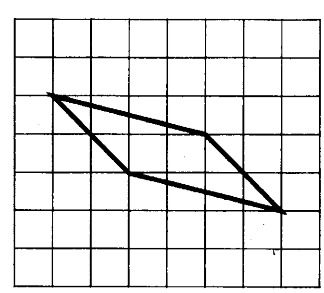
Ответ: ___________________

2 При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, на сколько вольт упадёт напряжение с 6-го по 56-й час работы фонарика.



Ответ: ___________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________

4 В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей; 17 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

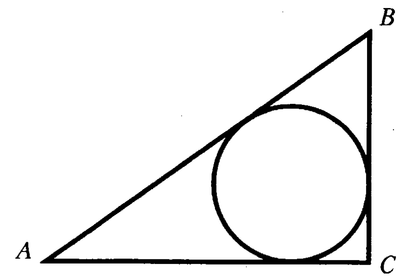
Ответ: ___________________

5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{x-9} = \frac{1}{9}$.

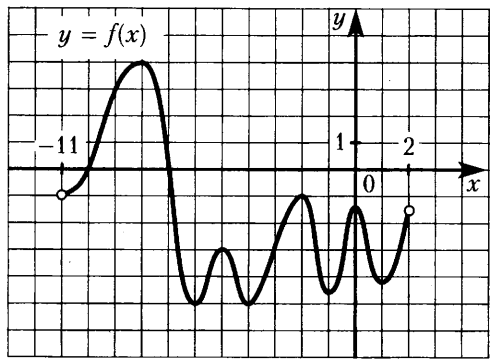
Ответ: ___________________

6 В треугольнике ABC $AC = 8$, $BC = 6$, угол C равен 90°. Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ: ____________________



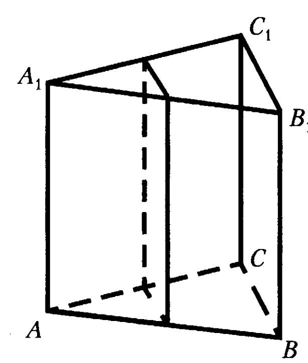
7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; 2)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ____________________

8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 2, боковые рёбра равны 14. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.

Ответ: ____________________



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{-11\sin 152^\circ}{\cos 76^\circ \cdot \cos 14^\circ}$.

Ответ: ____________________

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 100 мг. Период его полураспада составляет 4 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 25 мг.

Ответ: ____________________

11 Две трубы наполняют бассейн за 7 часов 12 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 12 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку минимума функции $y = \log_3(x^2 - 12x + 41) + 1$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos^3 2x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 2x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 17, а сторона основания равна 16. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB = CF:FA = 3:1$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

15 Решите неравенство $\log_5 \frac{2-x}{x-9} + \log_{0,2}(x-2) \geqslant \log_{\frac{1}{5}}\left((x-9)^2\right)$.

16 В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A вписана окружность, касающаяся оснований BC и AD в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что диагонали трапеции делят отрезок PQ в одном и том же отношении.

б) Найдите большее основание трапеции AD, если меньшее основание $BC = 3$ и $S_{ABPQ}:S_{DCPQ} = 5:13$.

17 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 800 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 848 тыс. руб.?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x^2 - 2ax - 2a)^2 = 2x^4 + 8a^2(x+1)^2$$

имеет единственный корень на интервале $(-1; 1)$.

19 На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Оказалось, что каждое следующее число (кроме первого) или на 5 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

а) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 9, а восьмое равно 20?

б) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 14, а девятое равно 21?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 576, а последнее число равно 6?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 24

Профильный уровень

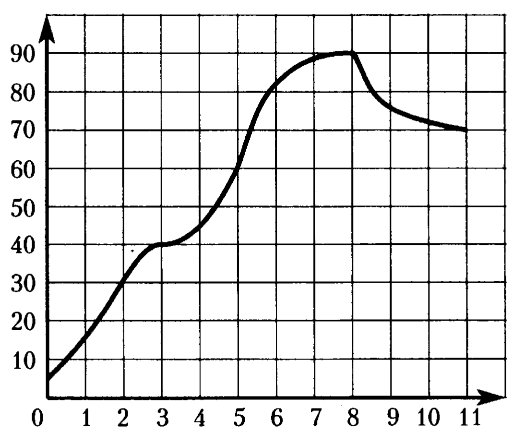
Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 4000 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1000 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 700 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

Ответ: ____________________

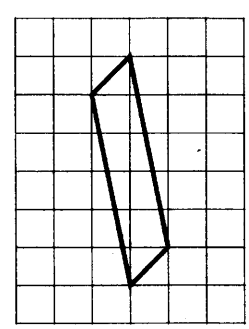
2 На графике изображена зависимость температуры от времени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, на сколько градусов нагреется двигатель со второй по восьмую минуту разогрева.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.

Ответ: ____________________



4 В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей; 14 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

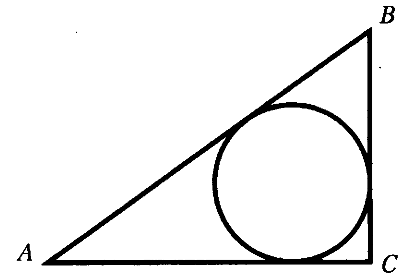
Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{8x-11} = \dfrac{1}{9}$.

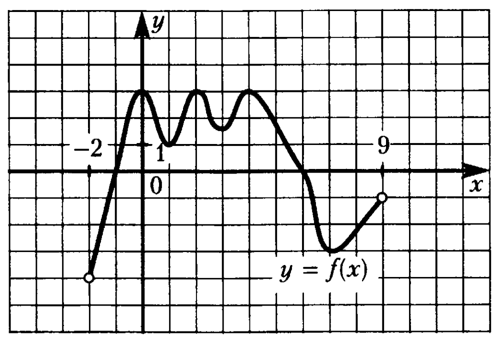
Ответ: ____________________

6 В треугольнике ABC $AC = 40$, $BC = 9$, угол C равен 90°. Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ: ____________________



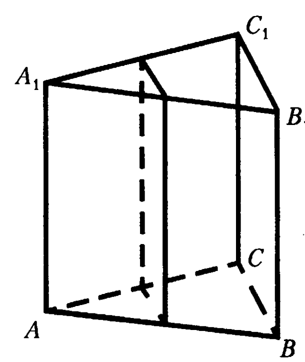
7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ____________________

8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 18, боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.

Ответ: ____________________



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\frac{-3\sin 28°}{\cos 14° \cdot \cos 76°}$.

Ответ: ____________________

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 132 мг. Период его полураспада составляет 5 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 33 мг.

Ответ: ____________________

11 Две трубы наполняют бассейн за 10 часов, а одна первая труба наполняет бассейн за 30 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку минимума функции $y = \log_3(x^2 - 24x + 148) + 1$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) - 4\cos^3\frac{x}{2}\right)\sqrt{-\operatorname{tg} 2x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 13, а сторона основания равна 10. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB = CF:FA = 4:1$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

15 Решите неравенство $\lg\frac{4-x}{x-15} + \log_{0,1}(x-4) \geqslant \log_{\frac{1}{10}}\left((x-15)^2\right)$.

16 В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A вписана окружность, касающаяся оснований BC и AD в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что диагонали трапеции делят отрезок PQ в одном и том же отношении.

б) Найдите большее основание трапеции AD, если меньшее основание $BC = 5$ и $S_{ABPQ}:S_{DCPQ} = 8:17$.

17 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 950 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 1121 тыс. руб.?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x^2 - 4ax + 4a)^2 = 2x^4 + 32a^2(x-1)^2$$

имеет единственный корень на интервале $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

19 На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Оказалось, что каждое следующее число (кроме первого) или на 5 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

а) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 15, а одиннадцатое равно 23?

б) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 19, а девятое равно 21?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 1296, а последнее число равно 6?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 25

Профильный уровень

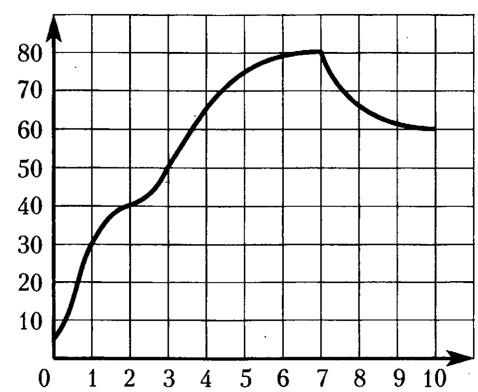
Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1800 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1400 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

Ответ: ___________________

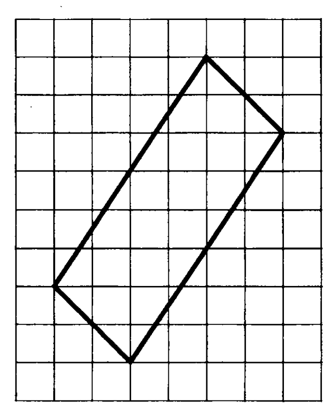
2 На графике изображена зависимость температуры от времени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, на сколько градусов нагреется двигатель с третьей по седьмую минуту разогрева.



Ответ: ___________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.

Ответ: ___________________



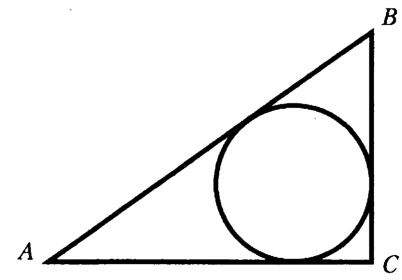
4 В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей; 12 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: ___________________

5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{x-5} = \frac{1}{7}$.

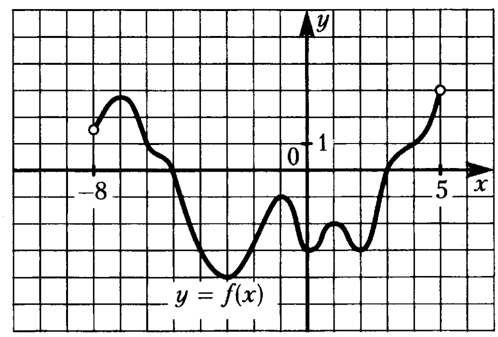
Ответ: ___________________

6 В треугольнике ABC $AC = 30$, $BC = 12{,}5$, угол C равен 90°. Найдите радиус вписанной окружности.



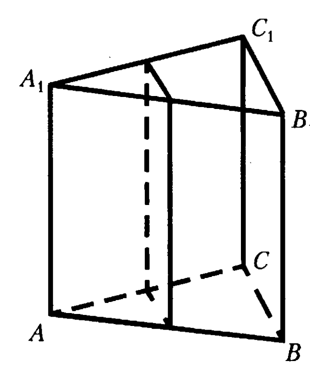
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ____________________

8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 12, боковые рёбра равны 2. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC, A_1B_1 и A_1C_1.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{3\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ \cdot \cos 40^\circ}$.

Ответ: ____________________

10 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 192 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 6 мг.

Ответ: ____________________

11 Две трубы наполняют бассейн за 2 часа 24 минуты, а одна первая труба наполняет бассейн за 4 часа. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку минимума функции $y = \log_2(x^2 + 2x + 30) + 10$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(\sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) + 2\cos^3 2x\right)\sqrt{-\operatorname{tg} 2x} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 15, а сторона основания равна 18. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB = CF:FA = 2:7$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

15 Решите неравенство $\log_4 \frac{1-x}{x-5} + \log_{0,25}(x-1) \geqslant \log_{\frac{1}{4}}\left((x-5)^2\right)$.

16 В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A вписана окружность, касающаяся оснований BC и AD в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что диагонали трапеции делят отрезок PQ в одном и том же отношении.

б) Найдите большее основание трапеции AD, если меньшее основание $BC = 4$ и $S_{ABPQ}:S_{DCPQ} = 20:29$.

17 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 900 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 1089 тыс. руб.?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x^2 + 3ax - 3a)^2 = 2x^4 + 18a^2(x-1)^2$$

имеет единственный корень на интервале $(-1; 1)$.

19 На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Оказалось, что каждое следующее число (кроме первого) или на 3 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

а) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 18, а девятое равно 28?

б) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 17, а десятое равно 11?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 1997, а последнее число равно 8?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 26

Профильный уровень

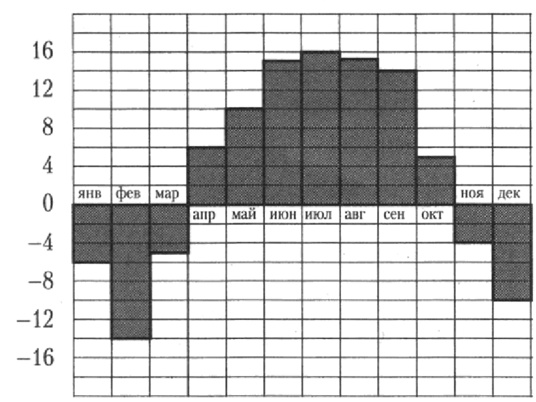
Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Система навигации, встроенная в спинку самолетного кресла, информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 18 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

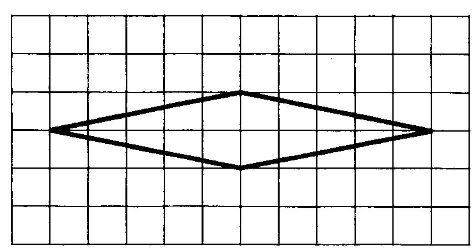
Ответ: ____________________

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Ярославле за каждый месяц 1995 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в первой половине 1995 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: ____________________

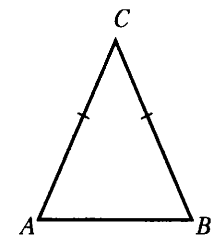
4 Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 бадминтонистов, среди которых 22 спортсмена из России, в том числе Андрей Чаев. Найдите вероятность того, что в первом туре Андрей Чаев будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $3^{2x-16} = \frac{1}{81}$.

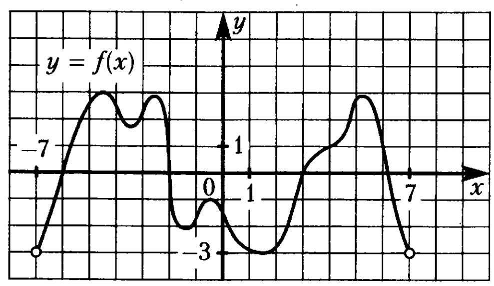
Ответ: ____________________

6 Угол при основании равнобедренного треугольника равен 75°. Боковая сторона треугольника равна 11. Найдите площадь этого треугольника.



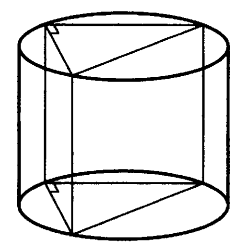
Ответ: ___________________

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции неотрицательна.



Ответ: ___________________

8 В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 6. Боковые рёбра призмы равны $\frac{10}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



Ответ: ___________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_7 24{,}5 + \log_7 2$.

Ответ: ___________________

10 Чтобы получить на экране увеличенное изображение лампочки, в лаборатории используют собирающую линзу с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: ___________________

11 Имеется два сплава. Первый содержит 10% кобальта, второй — 35% кобальта. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 250 кг, содержащий 25% кобальта. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ: ___________________

12 Найдите наибольшее значение функции $y = -3\operatorname{tg}x + 6x - 1{,}5\pi + 8$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2\sin 2x}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.
а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

15 Решите неравенство $\left(\log_2^2 x - 3\log_2 x\right)^2 + 66\log_2 x + 72 < 22\log_2^2 x$.

16 Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.
а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

17 Строительство нового завода обходится в 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. При реализации продукции завода по цене p тыс. рублей за единицу прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

18 Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

19 В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру поручают распределение премий, и он должен выдать их без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.
а) В отделе 40 сотрудников. Удастся ли выполнить задание так, чтобы все сотрудники получили поровну?
б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?
в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 27

Профильный уровень

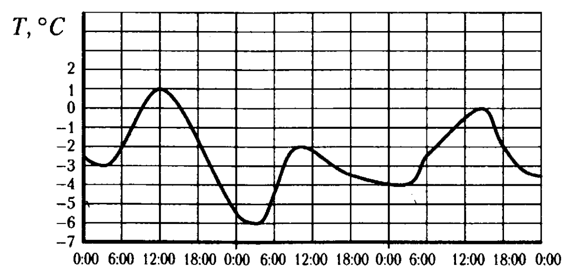
Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 На автозаправке клиент отдал кассиру 800 рублей и залил в бак 25 литров бензина. Цена бензина 31 руб. 50 коп. за литр. Какую сдачу должен получить клиент? Ответ дайте в рублях.

Ответ: ____________________

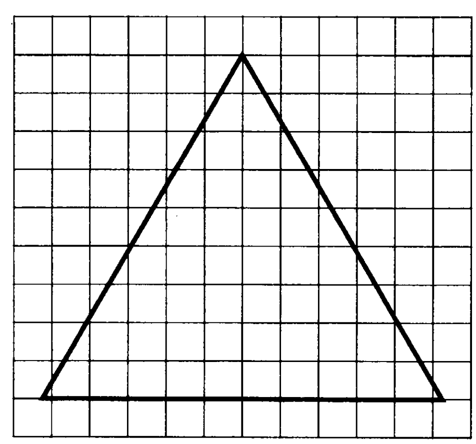
2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурами воздуха 20 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ____________________

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.

Ответ: ____________________



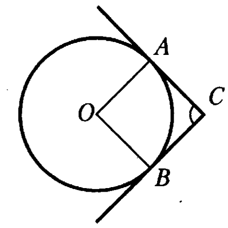
4 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $5^{-5-x} = 125$.

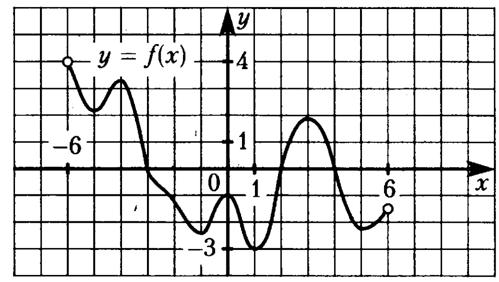
Ответ: ____________________

6 Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Меньшая дуга AB равна 61°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



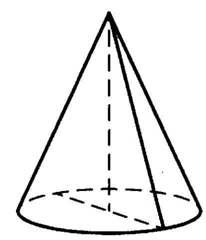
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-5{,}5; 1{,}5]$.



Ответ: ____________________

8 Высота конуса равна 12, а диаметр основания равен 10. Найдите образующую конуса.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{5}\right)^2}{72+8\sqrt{65}}$.

Ответ: ____________________

10 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 495 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v = c\cdot\dfrac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 15 м/с.

Ответ: ____________________

11 Заказ на изготовление 221 детали первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей изготавливает второй рабочий за час, если известно, что первый за час изготавливает на 4 детали больше?

Ответ: ____________________

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 7\,\mathrm{tg}\,x - 7x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}75$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 Сторона основания AB правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α перпендикулярна плоскости основания пирамиды, причём прямая MN лежит в плоскости α.

а) Докажите, что медиана CE основания делится плоскостью α в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

15 Решите неравенство $\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \leqslant 1 + \frac{1}{3^x - 2}$.

16 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка M лежит на стороне BC так, что точки B и C являются вершинами равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18 и $BM:MC = 1:3$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

18 Найдите все такие значения a, что система

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет не менее трёх решений.

19 а) Приведите пример четырёхзначного числа, сумма цифр которого в 10 раз меньше произведения цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, сумма цифр которого в 175 раз меньше произведения цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, сумма цифр которых в 50 раз меньше произведения цифр этого числа.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 28

Профильный уровень

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

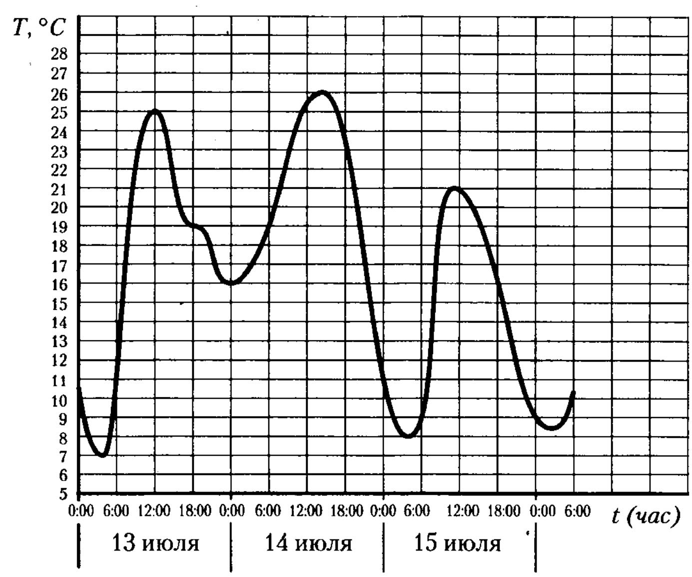
Часть 1

1 Тетрадь стоит 8 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 80 тетрадей, если при покупке больше 50 тетрадей магазин делает скидку 10% от стоимости всей покупки?

Ответ: ____________________

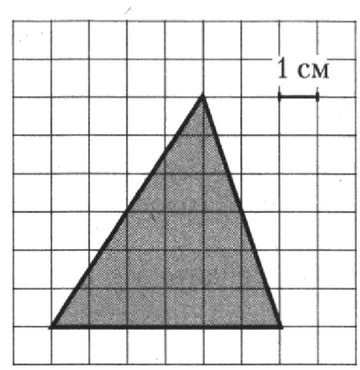
2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: ____________________



3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: ____________________



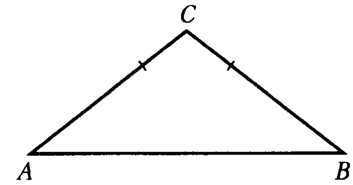
4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 17 пассажиров, равна 0,9. Вероятность того, что окажется меньше 14 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 14 до 16.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\log_4(5 - x) = 2$.

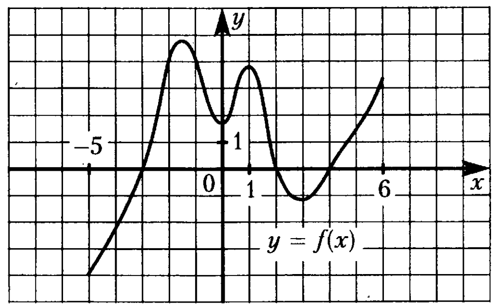
Ответ: ____________________

6 Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150°. Боковая сторона треугольника равна 18. Найдите площадь этого треугольника.



Ответ: ____________________

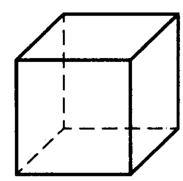
7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Ответ: ____________________

8 Объём куба равен 512. Найдите площадь его поверхности.

Ответ: ____________________



> Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $5\operatorname{tg}48^\circ \cdot \operatorname{tg}42^\circ$.

Ответ: ____________________

10 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 1,3 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

Ответ: ____________________

11 Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 525 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку минимума функции $y = (x + 64)e^{x - 64}$.

Ответ: ____________________

> Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x\right)\sqrt{-6\sin x} = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right)$.

14 На ребре SA правильной четырёхгольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M, причём $SM:MA = 1:2$. Точки P и Q — середины рёбер BC и AD соответственно.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

15 Решите неравенство $9^{x+\frac{1}{9}} - 4\cdot 3^{x+\frac{10}{9}} + 27 \geqslant 0$.

16 На гипотенузе KL равнобедренного прямоугольного треугольника вне треугольника KLM построен квадрат $KLPQ$. Прямая PM пересекает гипотенузу KL в точке N.

а) Докажите, что $KN:NL = 2:1$.

б) Прямая, проходящая через точку N перпендикулярно PM, пересекает отрезок KQ в точке R. Найдите KR, если $KQ = 9$.

17 Иван взял кредит в банке на срок 5 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 10%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Иваном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. За весь срок кредитования Иван выплатил банку в общей сложности 16 250 рублей. Какую сумму он взял в кредит?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2a < 4, \\ 2x + a \geqslant -4, \\ x + a < 2 \end{cases}$$

содержит все числа из отрезка $[-1; 0]$.

19 Про некоторый набор, состоящий из 11 различных натуральных чисел, известно, что сумма любых двух различных чисел этого набора меньше суммы любых трёх различных чисел этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 3000?

б) Может ли одним из этих чисел быть число 16?

в) Какое наименьшее возможное значение может принимать сумма чисел такого набора?

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 29

Профильный уровень

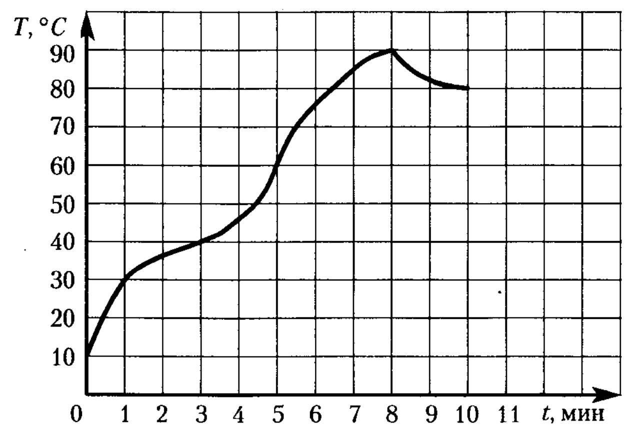
Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Спидометр автомобиля показывает скорость в милях в час. Какую скорость (в милях в час) показывает спидометр, если автомобиль движется со скоростью 48 км в час? Считайте, что 1 миля равна 1,6 км.

Ответ: ____________________

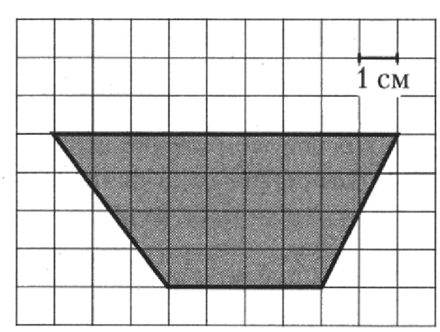
2 На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 60°C до температуры 90°C.



Ответ: ____________________

3 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Ответ: ____________________



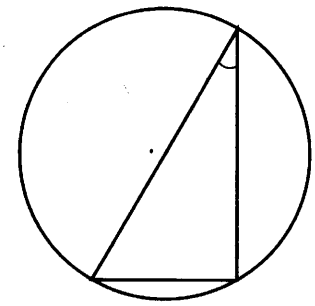
4 В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 13 из них встречается вопрос по теме «Производная». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопроса по теме «Производная».

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3+x} = 9$.

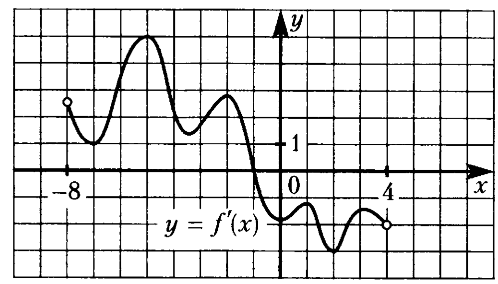
Ответ: ____________________

6 Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную радиусу окружности. Ответ дайте в градусах.



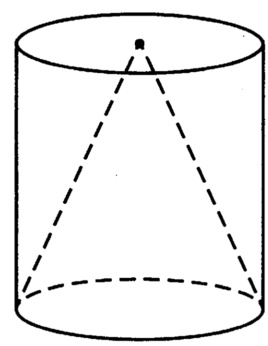
Ответ: ____________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$, производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: ____________________

8 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 18. Найдите объём цилиндра.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\log_4 13 \cdot \log_{13} 16$.

Ответ: ____________________

10 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 6$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{150}$ м/мин^2, и $b = -\frac{2}{5}$ м/мин— постоянные, t— время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ дайте в минутах.

Ответ: ____________________

11 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 80 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 2 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 2 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________

12 Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 18x^2 + 81x + 76$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{4\sin^2 x - 3}{\sqrt{11\,\mathrm{tg}\,x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1 = 2:3$.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей BED_1 и ABC.

б) Найдите угол наклона плоскости BED_1 к плоскости основания призмы.

15 Решите неравенство $\log_{x^2}(x-1)^2 \leqslant 1$.

16 На диагонали LN параллелограмма $KLMN$ отмечены точки P и Q, причём $LP = PQ = QN$.

а) Докажите, что прямые KP и KQ проходят через середины сторон параллелограмма.

б) Найдите отношение площади параллелограмма $KLMN$ к площади пятиугольника $MRPQS$, где R — точка пересечения KP со стороной LM, S — точка пересечения KQ с MN.

17 Сергей взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Сергеем банку.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 2x^3 - (2a+3)x^2 + 2ax + 3a + a^2 = 0$$

имеет решения, и определите то решение, которое получается только при единственном значении параметра a.

19 Из 40 последовательных нечётных чисел 1, 3, 5, ... , 79 выбрали 7 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A — четвёртое по величине среди этих чисел, а B — среднее арифметическое выбранных семи чисел.

а) Может ли $B - A$ равняться $\dfrac{2}{7}$?

б) Может ли $B - A$ равняться $\dfrac{3}{7}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение $B - A$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 30

Профильный уровень

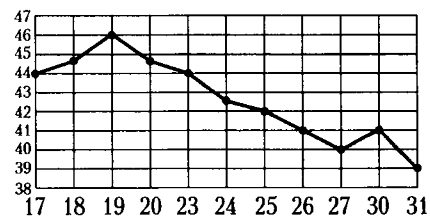
Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Для покраски 1 кв. м потолка требуется 200 г краски. Краска продаётся в банках по 1,5 кг. Какое наименьшее количество банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 52 кв. м?

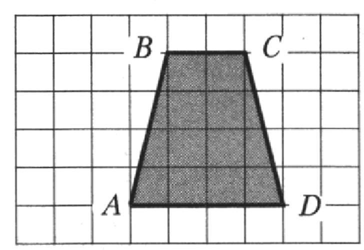
Ответ: ___________________

2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена нефти на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



Ответ: ___________________

3 Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: ___________________

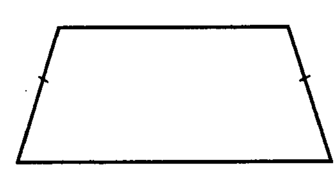
4 Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 2% бракованных стекла, а вторая — 4%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: ___________________

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{1}{15-2x}}=\frac{1}{3}$.

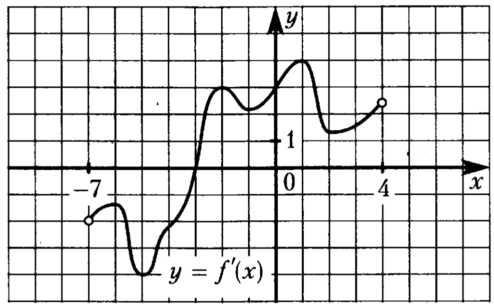
Ответ: ___________________

6 Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 17, а её площадь равна 144. Найдите периметр трапеции.



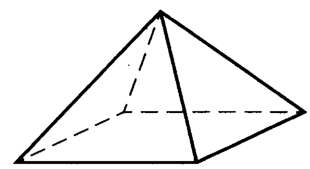
Ответ: ___________________

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 4)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $(-6; 1)$.



Ответ: ____________________

8 Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 16, боковые рёбра равны 17. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9 Найдите $6\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}8$.

Ответ: ____________________

10 При температуре $0°C$ рельс имеет длину $l_0 = 12{,}5$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha\cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: ____________________

11 Смешали 8 литров 10-процентного водного раствора некоторого вещества с 12 литрами 40-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: ____________________

12 Найдите точку минимума функции $y = -18x^2 - x^3 + 77$.

Ответ: ____________________

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}\sin x + 1\right)\sqrt{-5\cos x} = 0.$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{\pi}{2};\, 2\pi\right].$

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка S — вершина, $AB = 8$, $SC = 6$. Точка M принадлежит ребру SA, точка K — ребру SC, причём $AM:MS = CK:KS = 1:2$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью BMK.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABC.

15 Решите неравенство $(0{,}5x - 2)^{-4} - 0{,}25x^2 > 4 - 2x$.

16 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 8\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60°$.

17 Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

18 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2a + 3)^2 + (y - a)^2 = 2{,}25, \\ (x + 3)^2 + (y - a)^2 = a^2 + 2a + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-13,\ -8,\ -6,\ -1,\ 2,\ 7$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 7 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

ОТВЕТЫ

1.1. Рациональные уравнения и выражения

1.1.1. –3. **1.1.2.** 9,5. **1.1.3.** 22. **1.1.4.** –3. **1.1.5.** 1,1. **1.1.6.** 9. **1.1.7.** 10. **1.1.8.** –2. **1.1.9.** 3,5. **1.1.10.** 10. **1.1.11.** 7. **1.1.12.** –5. **1.1.13.** 2. **1.1.14.** 3,5. **1.1.15.** 2. **1.1.16.** –3. **1.1.17.** –1. **1.1.18.** –2. **1.1.19.** –1. **1.1.20.** 10. **1.1.21.** –5. **1.1.22.** 1. **1.1.23.** 5. **1.1.24.** 4. **1.1.25.** 4. **1.1.26.** 8. **1.1.27.** –2. **1.1.28.** 1. **1.1.29.** 2. **1.1.30.** –1. **1.1.31.** 75. **1.1.32.** 50. **1.1.33.** 12. **1.1.34.** 15. **1.1.35.** 4000. **1.1.36.** 5000. **1.1.37.** 2,2. **1.1.38.** 1,8. **1.1.39.** 1,6. **1.1.40.** 0,8. **1.1.41.** 15. **1.1.42.** 10. **1.1.43.** 45. **1.1.44.** 60. **1.1.45.** 55. **1.1.46.** 44. **1.1.47.** 100. **1.1.48.** 84. **1.1.49.** 400. **1.1.50.** 860. **1.1.51.** 1. **1.1.52.** 5. **1.1.53.** 4,83. **1.1.54.** 17,23. **1.1.55.** 0,27. **1.1.56.** 0,12. **1.1.57.** 40. **1.1.58.** 4. **1.1.59.** 3. **1.1.60.** 4. **1.1.61.** 3. **1.1.62.** 4. **1.1.63.** 10. **1.1.64.** 18. **1.1.65.** 56. **1.1.66.** 48. **1.1.67.** 16. **1.1.68.** 15. **1.1.69.** 4. **1.1.70.** 19. **1.1.71.** 11. **1.1.72.** 3. **1.1.73.** 6. **1.1.74.** 26. **1.1.75.** 12. **1.1.76.** 15. **1.1.77.** 28. **1.1.78.** 24. **1.1.79.** 12. **1.1.80.** 18. **1.1.81.** 17. **1.1.82.** 34. **1.1.83.** 125. **1.1.84.** 90. **1.1.85.** 4. **1.1.86.** 25. **1.1.87.** 69. **1.1.88.** 72. **1.1.89.** 150. **1.1.90.** 550. **1.1.91.** 96. **1.1.92.** 108. **1.1.93.** 40. **1.1.94.** 60. **1.1.95.** 52. **1.1.96.** 49. **1.1.97.** 6. **1.1.98.** 9. **1.1.99.** 4. **1.1.100.** 9. **1.1.101.** 12. **1.1.102.** 15. **1.1.103.** 6. **1.1.104.** 8.

1.2. Иррациональные уравнения и выражения

1.2.1. 4. **1.2.2.** 3. **1.2.3.** 16. **1.2.4.** 105. **1.2.5.** 4. **1.2.6.** –6. **1.2.7.** 6. **1.2.8.** 3. **1.2.9.** 2. **1.2.10.** –10. **1.2.11.** 2. **1.2.12.** 2. **1.2.13.** –9. **1.2.14.** –5. **1.2.15.** 21. **1.2.16.** 3. **1.2.17.** –4. **1.2.18.** 6. **1.2.19.** 2. **1.2.20.** –8. **1.2.21.** 11. **1.2.22.** –279. **1.2.23.** –2. **1.2.24.** 7. **1.2.25.** 13 500. **1.2.26.** 24 500. **1.2.27.** 11,25. **1.2.28.** 21,25. **1.2.29.** 6000. **1.2.30.** 10 000.

1.3. Степенные уравнения и выражения

1.3.1. 1. **1.3.2.** 2. **1.3.3.** 5. **1.3.4.** 4. **1.3.5.** 49. **1.3.6.** 3. **1.3.7.** 64. **1.3.8.** 7. **1.3.9.** 25. **1.3.10.** 9. **1.3.11.** 1,5. **1.3.12.** 125. **1.3.13.** 243. **1.3.14.** 2,25. **1.3.15.** 45. **1.3.16.** 8. **1.3.17.** 1. **1.3.18.** 2. **1.3.19.** 0,25. **1.3.20.** 1296. **1.3.21.** 4. **1.3.22.** 121. **1.3.23.** 1,5. **1.3.24.** 1. **1.3.25.** 108. **1.3.26.** 3,2. **1.3.27.** 6. **1.3.28.** 0. **1.3.29.** 7. **1.3.30.** 4,5. **1.3.31.** 5. **1.3.32.** 6,5. **1.3.33.** –7. **1.3.34.** 2. **1.3.35.** 8. **1.3.36.** 5. **1.3.37.** 3,5. **1.3.38.** –0,5. **1.3.39.** 1. **1.3.40.** 2,5. **1.3.41.** 20. **1.3.42.** 32. **1.3.43.** 0,5. **1.3.44.** 0,2.

1.4. Тригонометрические уравнения и выражения

1.4.1. –0,5. **1.4.2.** –0,5. **1.4.3.** –0,36. **1.4.4.** 45,08. **1.4.5.** –3. **1.4.6.** –0,2. **1.4.7.** 4. **1.4.8.** 81. **1.4.9.** 3. **1.4.10.** –24. **1.4.11.** –4,76. **1.4.12.** –41. **1.4.13.** –6. **1.4.14.** –44. **1.4.15.** 96. **1.4.16.** 87. **1.4.17.** –45. **1.4.18.** 51. **1.4.19.** 10. **1.4.20.** 35. **1.4.21.** –48. **1.4.22.** –35. **1.4.23.** –28. **1.4.24.** 17. **1.4.25.** 24. **1.4.26.** 1. **1.4.27.** –12. **1.4.28.** –18. **1.4.29.** –30. **1.4.30.** –0,5. **1.4.31.** –7,5. **1.4.32.** 2. **1.4.33.** –12. **1.4.34.** –4. **1.4.35.** –24. **1.4.36.** –38. **1.4.37.** 0,16. **1.4.38.** 0,96. **1.4.39.** 0,6. **1.4.40.** 6,4. **1.4.41.** 0,5. **1.4.42.** 1,5. **1.4.43.** –2. **1.4.44.** –1. **1.4.45.** –3. **1.4.46.** 1. **1.4.47.** 90. **1.4.48.** 45. **1.4.49.** 15. **1.4.50.** 60.

1.5. Логарифмические уравнения и выражения

1.5.1. 3. **1.5.2.** 3. **1.5.3.** –2,5. **1.5.4.** –2. **1.5.5.** 1. **1.5.6.** 3. **1.5.7.** 7. **1.5.8.** –0,5. **1.5.9.** 72. **1.5.10.** 343. **1.5.11.** 9. **1.5.12.** 4. **1.5.13.** –4. **1.5.14.** 4. **1.5.15.** 2. **1.5.16.** 3. **1.5.17.** –1. **1.5.18.** 3. **1.5.19.** 2. **1.5.20.** 2. **1.5.21.** –1. **1.5.22.** 1331. **1.5.23.** 8. **1.5.24.** 7. **1.5.25.** 7. **1.5.26.** 9. **1.5.27.** –348. **1.5.28.** –13. **1.5.29.** 3. **1.5.30.** 4. **1.5.31.** –0,4. **1.5.32.** –11. **1.5.33.** 2. **1.5.34.** 2. **1.5.35.** 8. **1.5.36.** –1,5. **1.5.37.** –3. **1.5.38.** –3. **1.5.30.** 14. **1.5.40.** 54. **1.5.41.** 26.

2.1. Текстовые задачи

2.1.1. 20. **2.1.2.** 95. **2.1.3.** 14. **2.1.4.** 9. **2.1.5.** 12. **2.1.6.** 7. **2.1.7.** 15. **2.1.8.** 7. **2.1.9.** 18. **2.1.10.** 6. **2.1.11.** 16. **2.1.12.** 14. **2.1.13.** 54. **2.1.14.** 18. **2.1.15.** 2. **2.1.16.** 5. **2.1.17.** 3. **2.1.18.** 3. **2.1.19.** 185. **2.1.20.** 60. **2.1.21.** 1. **2.1.22.** 7. **2.1.23.** 2. **2.1.24.** 5. **2.1.25.** 248,2. **2.1.26.** 91. **2.1.27.** 5. **2.1.28.** 8. **2.1.29.** 487. **2.1.30.** 660. **2.1.31.** 31 000. **2.1.32.** 35 000. **2.1.33.** 63. **2.1.34.** 16. **2.1.35.** 16. **2.1.36.** 21. **2.1.37.** 25. **2.1.38.** 26. **2.1.39.** 295. **2.1.40.** 580. **2.1.41.** 93 500. **2.1.42.** 74 250. **2.1.43.** 1725. **2.1.44.** 3850. **2.1.45.** 7. **2.1.46.** 12. **2.1.47.** 1400. **2.1.48.** 1900. **2.1.49.** 8. **2.1.50.** 10. **2.1.51.** 25. **2.1.52.** 30. **2.1.53.** 19 125. **2.1.54.** 22 050. **2.1.55.** 4000. **2.1.56.** 6670. **2.1.57.** 2. **2.1.58.** 4. **2.1.59.** 168. **2.1.60.** 180. **2.1.61.** 231. **2.1.62.** 56. **2.1.63.** 11 895. **2.1.64.** 7015. **2.1.65.** 35. **2.1.66.** 32,4. **2.1.67.** 37,5. **2.1.68.** 77,5. **2.1.69.** 8550. **2.1.70.** 21 450.

2.2. Графики и диаграммы

2.2.1. –7. **2.2.2.** 18. **2.2.3.** 4. **2.2.4.** 18. **2.2.5.** 5. **2.2.6.** 4. **2.2.7.** 8. **2.2.8.** 6. **2.2.9.** 200. **2.2.10.** 3. **2.2.11.** 4. **2.2.12.** 1500. **2.2.13.** 36. **2.2.14.** 54. **2.2.15.** 8. **2.2.16.** 9. **2.2.17.** 13. **2.2.18.** 14. **2.2.19.** 6. **2.2.20.** 19. **2.2.21.** 1005. **2.2.22.** 1,94. **2.2.23.** –2. **2.2.24.** –20. **2.2.25.** 30. **2.2.26.** 420 000. **2.2.27.** 800 000. **2.2.28.** 12. **2.2.29.** 8. **2.2.30.** 9. **2.2.31.** 4. **2.2.32.** 8. **2.2.33.** 12. **2.2.34.** 13. **2.2.35.** 11. **2.2.36.** 17. **2.2.37.** 3. **2.2.38.** 2. **2.2.39.** 10. **2.2.40.** 5.

2.3. Вероятность

2.3.1. 0,4. **2.3.2.** 0,48. **2.3.3.** 0,25. **2.3.4.** 0,14. **2.3.5.** 0,5. **2.3.6.** 0,35. **2.3.7.** 0,4. **2.3.8.** 0,32. **2.3.9.** 0,84. **2.3.10.** 0,986. **2.3.11.** 0,008. **2.3.12.** 0,005. **2.3.13.** 0,4. **2.3.14.** 0,2. **2.3.15.** 0,16. **2.3.16.** 0,18. **2.3.17.** 0,25. **2.3.18.** 0,2. **2.3.19.** 0,4. **2.3.20.** 0,16. **2.3.21.** 0,5. **2.3.22.** 0,25. **2.3.23.** 0,08. **2.3.24.** 0,11. **2.3.25.** 0,25. **2.3.26.** 0,375. **2.3.27.** 0,25. **2.3.28.** 0,375. **2.3.29.** 0,5. **2.3.30.** 0,25. **2.3.31.** 0,14. **2.3.32.** 0,07. **2.3.33.** 0,5. **2.3.34.** 0,5. **2.3.35.** 0,16. **2.3.36.** 0,168. **2.3.37.** 0,59049. **2.3.38.** 0,00243. **2.3.39.** 0,25. **2.3.40.** 0,2. **2.3.41.** 0,25. **2.3.42.** 0,25. **2.3.43.** 0,19. **2.3.44.** 0,43. **2.3.45.** 0,12. **2.3.46.** 0,05. **2.3.47.** 0,039. **2.3.48.** 0,028. **2.3.49.** 0,999. **2.3.50.** 0,9991. **2.3.51.** 0,46. **2.3.52.** 0,58. **2.3.53.** 0,0575. **2.3.54.** 0,0494. **2.3.55.** 0,3611. **2.3.56.** 0,5235. **2.3.57.** 5. **2.3.58.** 3. **2.3.59.** 0,28. **2.3.60.** 0,33. **2.3.61.** 0,025. **2.3.62.** 0,017. **2.3.63.** 0,25. **2.3.64.** 0,0625. **2.3.65.** 0,25. **2.3.66.** 0,5.

3.1. Длины

3.1.1. 2. **3.1.2.** 4. **3.1.3.** 6. **3.1.4.** 5. **3.1.5.** 29. **3.1.6.** 12. **3.1.7.** 12,5. **3.1.8.** 20. **3.1.9.** 24. **3.1.10.** 13. **3.1.11.** 10. **3.1.12.** 43. **3.1.13.** 36. **3.1.14.** 5. **3.1.15.** 6. **3.1.16.** 10. **3.1.17.** 10. **3.1.18.** 22. **3.1.19.** 126. **3.1.20.** 7. **3.1.21.** 17. **3.1.22.** 33. **3.1.23.** 34. **3.1.24.** 32. **3.1.25.** 15. **3.1.26.** 94. **3.1.27.** 8,5. **3.1.28.** 14. **3.1.29.** 40. **3.1.30.** 16. **3.1.31.** 20. **3.1.32.** 11. **3.1.33.** 4. **3.1.34.** 6. **3.1.35.** 4. **3.1.36.** 5. **3.1.37.** 10. **3.1.38.** 9,5. **3.1.39.** 17. **3.1.40.** 14.

3.2. Углы

3.2.1. 88. **3.2.2.** 73. **3.2.3.** 26. **3.2.4.** 57. **3.2.5.** 37. **3.2.6.** 64. **3.2.7.** 174. **3.2.8.** 55. **3.2.9.** 75. **3.2.10.** 72. **3.2.11.** 27. **3.2.12.** 42. **3.2.13.** 45. **3.2.14.** 55. **3.2.15.** 56. **3.2.16.** 61. **3.2.17.** 68. **3.2.18.** 36. **3.2.19.** 13. **3.2.20.** 82. **3.2.21.** 1. **3.2.22.** 123. **3.2.23.** 93. **3.2.24.** 151. **3.2.25.** 175. **3.2.26.** 117. **3.2.27.** 104. **3.2.28.** 124. **3.2.29.** 45. **3.2.30.** 30. **3.2.31.** 78. **3.2.32.** 48. **3.2.33.** 124. **3.2.34.** 116. **3.2.35.** 48. **3.2.36.** 64. **3.2.37.** 63. **3.2.38.** 8. **3.2.39.** 72. **3.2.40.** 38. **3.2.41.** 18. **3.2.42.** 60. **3.2.43.** 174. **3.2.44.** 32. **3.2.45.** 110. **3.2.46.** 40. **3.2.47.** 33. **3.2.48.** 56. **3.2.49.** 106.

3.3. Тригонометрия

3.3.1. 0,1. **3.3.2.** 0,75. **3.3.3.** 1,5. **3.3.4.** 2,4. **3.3.5.** 0,75. **3.3.6.** 0,8. **3.3.7.** 0,28. **3.3.8.** 0,75. **3.3.9.** 0,8. **3.3.10.** 0,5. **3.3.11.** 3. **3.3.12.** 2,7. **3.3.13.** 4. **3.3.14.** 5. **3.3.15.** 4. **3.3.16.** 4. **3.3.17.** 15. **3.3.18.** 32. **3.3.19.** 4. **3.3.20.** 12. **3.3.21.** 0,7. **3.3.22.** 0,7. **3.3.23.** 8. **3.3.24.** 20. **3.3.25.** 30. **3.3.26.** 12. **3.3.27.** 24. **3.3.28.** 16. **3.3.29.** 1,5. **3.3.30.** 10,2. **3.3.31.** 0,7. **3.3.32.** 0,55. **3.3.33.** –0,4. **3.3.34.** –0,37. **3.3.35.** –3. **3.3.36.** –8. **3.3.37.** –2,5. **3.3.38.** –0,25. **3.3.39.** 0,6. **3.3.40.** 0,5. **3.3.41.** –0,96. **3.3.42.** 3. **3.3.43.** 9. **3.3.44.** 18. **3.3.45.** 16,5. **3.3.46.** 2. **3.3.47.** 12. **3.3.48.** 0,6. **3.3.49.** 9. **3.3.50.** 0,75. **3.3.51.** 4.

3.4. Площади

3.4.1. 56. **3.4.2.** 36. **3.4.3.** 121. **3.4.4.** 400. **3.4.5.** 12. **3.4.6.** 30. **3.4.7.** 25. **3.4.8.** 64. **3.4.9.** 26,25. **3.4.10.** 127,5. **3.4.11.** 48. **3.4.12.** 234. **3.4.13.** 84. **3.4.14.** 192. **3.4.15.** 1. **3.4.16.** 4. **3.4.17.** 6. **3.4.18.** 1,5. **3.4.19.** 36. **3.4.20.** 45. **3.4.21.** 512. **3.4.22.** 264,5. **3.4.23.** 99. **3.4.24.** 59,5. **3.4.25.** 84. **3.4.26.** 27. **3.4.27.** 10. **3.4.28.** 78. **3.4.29.** 22. **3.4.30.** 36. **3.4.31.** 24. **3.4.32.** 22. **3.4.33.** 49. **3.4.34.** 50. **3.4.35.** 20. **3.4.36.** 12. **3.4.37.** 0,25. **3.4.38.** 625. **3.4.39.** 7,5. **3.4.40.** 6. **3.4.41.** 2. **3.4.42.** 4,5. **3.4.43.** 3,5. **3.4.44.** 2,5. **3.4.45.** 9. **3.4.46.** 4. **3.4.47.** 13,5. **3.4.48.** 14. **3.4.49.** 20. **3.4.50.** 25. **3.4.51.** 14. **3.4.52.** 8. **3.4.53.** 12. **3.4.54.** 16. **3.4.55.** 12,5. **3.4.56.** 24,5. **3.4.57.** 16. **3.4.58.** 9. **3.4.59.** 9. **3.4.60.** 8. **3.4.61.** 2. **3.4.62.** 4. **3.4.63.** 25,5. **3.4.64.** 2,5. **3.4.65.** 10. **3.4.66.** 10. **3.4.67.** 9. **3.4.68.** 4. **3.4.69.** 2,5. **3.4.70.** 10,5. **3.4.71.** 38. **3.4.72.** 16. **3.4.73.** 264. **3.4.74.** 32.

3.5. Стереометрия

3.5.1. 60. **3.5.2.** 60. **3.5.3.** 60. **3.5.4.** 0,8. **3.5.5.** 5. **3.5.6.** 13. **3.5.7.** 3. **3.5.8.** 13. **3.5.9.** 2. **3.5.10.** 1. **3.5.11.** 14. **3.5.12.** 8. **3.5.13.** 24. **3.5.14.** 32. **3.5.15.** 6. **3.5.16.** 12. **3.5.17.** 13. **3.5.18.** 60. **3.5.19.** 78. **3.5.20.** 110. **3.5.21.** 6. **3.5.22.** 21. **3.5.23.** 5. **3.5.24.** 260. **3.5.25.** 72,25. **3.5.26.** 144. **3.5.27.** 156,25. **3.5.28.** 256. **3.5.29.** 80. **3.5.30.** 5,5. **3.5.31.** 289. **3.5.32.** 400. **3.5.33.** 18. **3.5.34.** 35. **3.5.35.** 120. **3.5.36.** 12. **3.5.37.** 40. **3.5.38.** 400. **3.5.39.** 10. **3.5.40.** 6. **3.5.41.** 108. **3.5.42.** 150. **3.5.43.** 26. **3.5.44.** 52. **3.5.45.** 7. **3.5.46.** 5. **3.5.47.** 12. **3.5.48.** 8. **3.5.49.** 84. **3.5.50.** 288. **3.5.51.** 336. **3.5.52.** 1200. **3.5.53.** 360. **3.5.54.** 720. **3.5.55.** 24. **3.5.56.** 99. **3.5.57.** 9. **3.5.58.** 91. **3.5.59.** 800. **3.5.60.** 1152. **3.5.61.** 19. **3.5.62.** 41. **3.5.63.** 2. **3.5.64.** 38. **3.5.65.** 9. **3.5.66.** 121. **3.5.67.** 40. **3.5.68.** 51. **3.5.69.** 6. **3.5.70.** 8. **3.5.71.** 216. **3.5.72.** 162. **3.5.73.** 18. **3.5.74.** 300. **3.5.75.** 60. **3.5.76.** 2. **3.5.77.** 48. **3.5.78.** 1296. **3.5.79.** 6. **3.5.80.** 4. **3.5.81.** 224. **3.5.82.** 16. **3.5.83.** 119. **3.5.84.** 3,5. **3.5.85.** 11. **3.5.86.** 126. **3.5.87.** 1. **3.5.88.** 45. **3.5.89.** 90. **3.5.90.** 40. **3.5.91.** 81. **3.5.92.** 18. **3.5.93.** 35. **3.5.94.** 42. **3.5.95.** 6. **3.5.96.** 49. **3.5.97.** 21. **3.5.98.** 6. **3.5.99.** 364,5. **3.5.100.** 343. **3.5.101.** 1000. **3.5.102.** 50. **3.5.103.** 325. **3.5.104.** 252. **3.5.105.** 3. **3.5.106.** 52. **3.5.107.** 99. **3.5.108.** 6. **3.5.109.** 240. **3.5.110.** 1500. **3.5.111.** 144. **3.5.112.** 5. **3.5.113.** 4. **3.5.114.** 13,5. **3.5.115.** 1,125. **3.5.116.** 315. **3.5.117.** 260. **3.5.118.** 64. **3.5.119.** 125.

4.1. Геометрический и физический смысл производной

4.1.1. 1,5. **4.1.2.** 5,5. **4.1.3.** 0. **4.1.4.** 3. **4.1.5.** 1,5. **4.1.6.** 0,25. **4.1.7.** –1. **4.1.8.** –0,25. **4.1.9.** 4. **4.1.10.** –2; 4. **4.1.11.** 6. **4.1.12.** 4. **4.1.13.** 12. **4.1.14.** –19. **4.1.15.** 14. **4.1.16.** 2. **4.1.17.** 9. **4.1.18.** 7. **4.1.19.** –3. **4.1.20.** 6. **4.1.21.** 8. **4.1.22.** 9. **4.1.23.** 2. **4.1.24.** 7. **4.1.25.** 34. **4.1.26.** 4. **4.1.27.** 4.

4.2. Техника дифференцирования

4.2.1. 3. **4.2.2.** 0,25. **4.2.3.** 8. **4.2.4.** 32. **4.2.5.** –8. **4.2.6.** –16. **4.2.7.** –3. **4.2.8.** 1,6. **4.2.9.** 12. **4.2.10.** 45. **4.2.11.** 5,4. **4.2.12.** –95. **4.2.13.** –130. **4.2.14.** 21. **4.2.15.** 31. **4.2.16.** 0,25. **4.2.17.** 3. **4.2.18.** –9,75. **4.2.19.** –0,25. **4.2.20.** 0,25. **4.2.21.** 2,5. **4.2.22.** 2,25. **4.2.23.** 10,5. **4.2.24.** 3. **4.2.25.** 18. **4.2.26.** 27. **4.2.27.** 13. **4.2.28.** –37. **4.2.29.** –2. **4.2.30.** 4,5. **4.2.31.** 3. **4.2.32.** 2,25. **4.2.33.** 12. **4.2.34.** 5. **4.2.35.** –68. **4.2.36.** –12. **4.2.37.** 2. **4.2.38.** 4. **4.2.39.** –5. **4.2.40.** –4. **4.2.41.** 1. **4.2.42.** 1. **4.2.43.** –2,5. **4.2.44.** 2. **4.2.45.** 1. **4.2.46.** 0. **4.2.47.** –1. **4.2.48.** 4.

4.3. Исследование функций

4.3.1. 3. **4.3.2.** 2. **4.3.3.** 3. **4.3.4.** 4. **4.3.5.** 2. **4.3.6.** 1. **4.3.7.** 1. **4.3.8.** 3. **4.3.9.** 3. **4.3.10.** 4. **4.3.11.** 5. **4.3.12.** 1. **4.3.13.** 1. **4.3.14.** 5. **4.3.15.** 6. **4.3.16.** 3. **4.3.17.** –3. **4.3.18.** –3. **4.3.19.** 3. **4.3.20.** 4. **4.3.21.** 1. **4.3.22.** 0. **4.3.23.** –5. **4.3.24.** 8. **4.3.25.** 48. **4.3.26.** 51. **4.3.27.** 6. **4.3.28.** –22. **4.3.29.** –30. **4.3.30.** 15. **4.3.31.** 6,25. **4.3.32.** 256. **4.3.33.** 54. **4.3.34.** –253. **4.3.35.** 4. **4.3.36.** 11. **4.3.37.** 64. **4.3.38.** 144. **4.3.39.** 4. **4.3.40.** 15. **4.3.41.** 23. **4.3.42.** 14. **4.3.43.** 24. **4.3.44.** 25. **4.3.45.** 0. **4.3.46.** 11. **4.3.47.** 0. **4.3.48.** –2,25. **4.3.49.** 43. **4.3.50.** –42. **4.3.51.** 21. **4.3.52.** –35,5. **4.3.53.** 11,2. **4.3.54.** 10,2. **4.3.55.** 7. **4.3.56.** 12. **4.3.57.** –6. **4.3.58.** –8. **4.3.59.** 4. **4.3.60.** 6. **4.3.61.** 0. **4.3.62.** –10.

4.4. Первообразная

4.4.1. 40,5. **4.4.2.** –5. **4.4.3.** 16. **4.4.4.** 41,5. **4.4.5.** –241. **4.4.6.** 17. **4.4.7.** 42. **4.4.8.** –67,25. **4.4.9.** –14. **4.4.10.** –98,2. **4.4.11.** 14,5. **4.4.12.** –25,5. **4.4.13.** –15. **4.4.14.** 17. **4.4.15.** –19. **4.4.16.** –6. **4.4.17.** –45. **4.4.18.** –2,6. **4.4.19.** 3. **4.4.20.** –22. **4.4.21.** 10. **4.4.22.** 9. **4.4.23.** 3. **4.4.24.** 5. **4.4.25.** –1. **4.4.26.** 4. **4.4.27.** 36. **4.4.28.** 13,5. **4.4.29.** 9. **4.4.30.** 12,5. **4.4.31.** 24. **4.4.32.** –16,5.

5.1. Тригонометрические уравнения

5.1.1. а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$. **5.1.2.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{6}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$. **5.1.3.** а) $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}$, $n,k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{10\pi}{3}$; $\frac{17\pi}{5}$. **5.1.4.** а) $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{2\pi k}{5}$, $n,k\in\mathbb{Z}$; б) 15. **5.1.5.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $2\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$. **5.1.6.** а) $\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$; б) $\pi+\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+2\pi l$; $\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi m$, $l,m\in\mathbb{Z}$. **5.1.7.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$. **5.1.8.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}$. **5.1.9.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\pi+2\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi$. **5.1.10.** а) $\pm\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{19\pi}{6}$. **5.1.11.** а) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}$; 2π; $\frac{13\pi}{6}$. **5.1.12.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$. **5.1.13.** а) $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) -4π; $-\frac{10\pi}{3}$; -3π; $-\frac{8\pi}{3}$. **5.1.14.** а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$. **5.1.15.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{2}$. **5.1.16.** а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$. **5.1.17.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$. **5.1.18.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$. **5.1.19.** а) $2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) -10π. **5.1.20.** а) $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) -9π. **5.1.21.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{2}$; $\frac{27\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{2}$; $\frac{31\pi}{4}$. **5.1.22.** а) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) 7π; $\frac{29\pi}{4}$; 8π; $\frac{33\pi}{4}$.

5.2. Неравенства и системы неравенств

5.2.1. $\left(-5;-2\sqrt{5}\right]$, 0, $\left[2\sqrt{5};5\right)$. **5.2.2.** $(-\infty;0]$, $(\log_3 2;1)$. **5.2.3.** $(-\infty;\log_7 4)$, $(1;\log_7 9]$. **5.2.4.** $(-1;3]$. **5.2.5.** 0, $(1;2)$. **5.2.6.** 0, $(1;\log_2 3)$. **5.2.7.** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};-1\right]$, 0, $\left[1;\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. **5.2.8.** $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right)$, $(8;32)$. **5.2.9.** -2, $[1;+\infty)$. **5.2.10.** $\left[0;\frac{1}{6}\right)$, 6. **5.2.11.** 2. **5.2.12.** 6. **5.2.13.** $[-3;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;3]$. **5.2.14.** $[-\log_2 5;-2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $[3;+\infty)$. **5.2.15.** $\left(0;\frac{1}{8}\right]$, $\left[\frac{1}{4};\log_5 2\right]$. **5.2.16.** $[-2;-1)$, $\left[-\frac{1}{2};0\right)$, $(0;1)$. **5.2.17.** $(-2;-1]$; $[8;+\infty)$. **5.2.18.** $(-3;-2]$; $[6;+\infty)$. **5.2.19.** $(-\infty;-3]$; $\left[-\sqrt{6};-2\right)$. **5.2.20.** $(-\infty;-4]$; $\left[-2\sqrt{3};-3\right)$.

5.3. Уравнения и неравенства с параметром

5.3.1. 5. **5.3.2.** $a>0$: $x=\frac{6a+3+\sqrt{32a+9}}{2}$; $a\in\left[-\frac{9}{32};0\right]$: $x=\frac{6a+3\pm\sqrt{32a+9}}{2}$; при прочих a корней нет. **5.3.3.** ±1; $\pm\sqrt{7}$. **5.3.4.** $a\in[-2;0)\cup(0;1)\cup\left(1;\sqrt[3]{4}\right)$. **5.3.5.** $a\in(1;7]$. **5.3.6.** $a\in\left(\frac{1}{2};4+\sqrt{6}\right)$. **5.3.7.** $-2<a<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<a<2$. **5.3.8.** $-\sqrt{5}<a<-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$. **5.3.9.** $a=\frac{4}{5}$; $a>\frac{5}{6}$. **5.3.10.** $a\leqslant-\frac{57}{16}$. **5.3.11.** $-6<a\leqslant1$; $a=8$; $9\leqslant a<10$. **5.3.12.** $a\leqslant-5$; $a=5$; $a\geqslant11$. **5.3.13.** $1<a<2$. **5.3.14.** $-5\leqslant a<5\sqrt{2}-10$. **5.3.15.** $-5\sqrt{5}<a\leqslant-5$; $5\leqslant a<5\sqrt{5}$. **5.3.16.** $-\frac{7}{4}\leqslant a\leqslant8$. **5.3.17.** $1-\sqrt{10}<a<-2$; $a=0$. **5.3.18.** $1\leqslant a<2$. **5.3.19.** $0<a\leqslant1$. **5.3.20.** $0<a\leqslant1$. **5.3.21.** $-1\leqslant a<0$. **5.3.22.** $1\leqslant a<49$.

5.4. Планиметрия

5.4.1. б) 13 или $\frac{130}{3}$. **5.4.2.** $\frac{7}{2}$ или $\frac{51}{26}$. **5.4.3.** $\sqrt{2}$ или $\sqrt{6}$. **5.4.4.** б) $3 \pm 2\sqrt{2}$. **5.4.5.** б) $6\sqrt{7} - 9\sqrt{3}$ или $6 + 3\sqrt{3}$. **5.4.6.** б) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **5.4.7.** б) $\frac{25}{24}$ или $\frac{25}{12}$. **5.4.8.** б) $\frac{30}{13}$ или 10. **5.4.9.** б) 4 или $\frac{260}{59}$. **5.4.10.** б) 2 или 5. **5.4.11.** б) 17,5 или 42,5. **5.4.12.** б) 11,2. **5.4.13.** б) 96. **5.4.14.** б) 3. **5.4.15.** б) $\frac{116}{7}$. **5.4.16.** б) $\frac{115}{6}$. **5.4.17.** б) $\sqrt{10}$. **5.4.18.** б) 30.

5.5. Стереометрия

5.5.1. $2\operatorname{arctg}\frac{60}{91}$. **5.5.2.** $\operatorname{arctg}\frac{17}{40}$. **5.5.3.** $\frac{120}{13}$. **5.5.4.** $\frac{24}{5}$. **5.5.5.** 6. **5.5.6.** $\frac{36}{5}$. **5.5.7.** 4. **5.5.8.** 30°. **5.5.9.** $2\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **5.5.10.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **5.5.11.** $\arccos\frac{12\sqrt{7}}{35}$. **5.5.12.** $\operatorname{arctg}\frac{6}{5}$. **5.5.13.** $\operatorname{arctg}\frac{15}{32}$. **5.5.14.** 90°. **5.5.15.** $\operatorname{arctg}3$. **5.5.16.** $\frac{\sqrt{193}}{5}$. **5.5.17.** 80. **5.5.18.** б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}}{3}$. **5.5.19.** б) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$. **5.5.20.** б) $8 + 2\sqrt{2}$. **5.5.21.** б) 44. **5.5.22.** б) $\arccos\frac{14}{55}$. **5.5.23.** б) 30°. **5.5.24.** б) $\frac{12}{5}$.

5.6. Арифметика и алгебра

5.6.1. 585. **5.6.2.** 68 или 86. **5.6.3.** 2, 6, 42, 1806. **5.6.4.** (2; 1), (1; 2), (2; 2). **5.6.5.** (2; 3), (3; 5; 7). **5.6.6.** 1 и 4131. **5.6.7.** 1 и 875. **5.6.8.** $a = 3$, $b = 2$; $a = 7$, $b = 2$. **5.6.9.** а) да; б) 10; в) $\frac{9}{19}$. **5.6.10.** а) 23; б) 2645. **5.6.11.** а) да; б) нет; в) 26. **5.6.12.** а) например, 15 раз число 19 и число 78; б) нет; в) 1650. **5.6.13.** а) да; б) нет; в) 18,5. **5.6.14.** а) да; б) нет; в) $38\frac{1}{7}$. **5.6.15.** а) да; б) да; в) 15. **5.6.16.** а) например, 2529; б) нет; в) число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел). **5.6.17.** а) да; б) нет; в) 20. **5.6.18.** а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$.

5.7. Экономические задачи

5.7.1. 500. **5.7.2.** 12,5%. **5.7.3.** $p = 9$. **5.7.4.** 10. **5.7.5.** 80,5 млн руб. **5.7.6.** 20,25 млн руб. **5.7.7.** 5. **5.7.8.** 10. **5.7.9.** 20. **5.7.10.** 25. **5.7.11.** 3. **5.7.12.** 0,8 млн руб.

Тренировочный вариант 1 (профильный уровень)

1. 10. **2.** 7. **3.** 9. **4.** 0,096. **5.** 4. **6.** 76,5. **7.** −3. **8.** 1. **9.** 2. **10.** 50. **11.** 4. **12.** −6. **13.** а) $-1-\sqrt{3}$; $-1-\sqrt{5}$; б) $-1-\sqrt{5}$. **14.** б) $\arcsin\left(\frac{12\sqrt{7}}{70}\right)$. **15.** (0; 0,01]. **16.** б) 24. **17.** 18,75. **18.** $\left[\frac{4}{3}; 12\right]$. **19.** а) Да; б) нет; в) $99 \cdot 58 = 5742$.

Тренировочный вариант 2 (профильный уровень)

1. 8. **2.** 6. **3.** 12. **4.** 0,032. **5.** 4. **6.** 7. **7.** 2. **8.** 2. **9.** −2. **10.** 100. **11.** 7. **12.** 5. **13.** а) $-2-\sqrt{3}$; $-1-\sqrt{7}$; б) $-1-\sqrt{7}$. **14.** б) $\arcsin\left(\frac{60\sqrt{3}}{13\sqrt{589}}\right)$. **15.** (0; 100). **16.** б) 24. **17.** 15. **18.** $\left[\frac{3}{8}; 6\right]$. **19.** а) Да; б) нет; в) $99 \cdot 49 = 4851$.

Тренировочный вариант 3 (профильный уровень)

1. 6. **2.** −16. **3.** 15. **4.** 0,0189. **5.** 4. **6.** 59. **7.** 0. **8.** 5. **9.** 2. **10.** 200. **11.** 8. **12.** 2. **13.** а) $-2-\sqrt{5}$; $-1-\sqrt{5}$; б) $-2-\sqrt{5}$. **14.** б) $\arcsin\left(\frac{84\sqrt{3}}{25\sqrt{481}}\right)$. **15.** $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{12}; +\infty\right)$. **16.** б) 20. **17.** 37,5. **18.** $\left[\frac{5}{4}; 80\right]$. **19.** а) Да; б) нет; в) $99 \cdot 59 = 5841$.

Тренировочный вариант 4 (профильный уровень)

1. 6. **2.** −10. **3.** 18. **4.** 0,24. **5.** 4. **6.** 58. **7.** 0. **8.** 3. **9.** −9. **10.** 400. **11.** 4. **12.** −29,25. **13.** а) $-1-\sqrt{6}$; $-1-\sqrt{7}$; б) $-1-\sqrt{6}$. **14.** б) $\arcsin\left(\frac{12\sqrt{3}}{5\sqrt{91}}\right)$. **15.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$. **16.** б) 60. **17.** 30. **18.** $\left[\frac{4}{9}; 36\right]$. **19.** а) Да; б) нет; в) $99 \cdot 50 = 4950$.

Тренировочный вариант 5 (профильный уровень)

1. 11. **2.** 9. **3.** 6. **4.** 0,0064. **5.** 4. **6.** 51,5. **7.** 1. **8.** 3. **9.** −10. **10.** 300. **11.** 5. **12.** −36,25. **13.** а) $-2\sqrt{5}+1$; б) $-2\sqrt{5}+1$. **14.** б) $\arcsin\left(\frac{180\sqrt{3}}{41\sqrt{1159}}\right)$. **15.** $[-6; 0) \cup [1; +\infty)$. **16.** б) 48. **17.** 10. **18.** $\left[\frac{4}{9}; 54\right]$. **19.** а) Да; б) нет; в) $99 \cdot 50 = 4950$.

Тренировочный вариант 6 (профильный уровень)

1. 190. **2.** 19. **3.** 15. **4.** 0,288. **5.** 2. **6.** 25. **7.** 2. **8.** 24. **9.** 22. **10.** 60. **11.** 27. **12.** −17. **13.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{13\pi}{6}$. **14.** б) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$. **15.** $(-1; 2] \cup [3; +\infty)$. **16.** б) $48\sqrt{3}$. **17.** 24 млн руб. **18.** $k \leqslant -4$; $k \geqslant 5$. **19.** а) Да; б) нет; в) 5.

Тренировочный вариант 7 (профильный уровень)

1. 230. **2.** −11. **3.** 13. **4.** 0,357. **5.** −4. **6.** 135,2. **7.** 4. **8.** 36. **9.** 12. **10.** 40. **11.** 32. **12.** −24. **13.** а) $\pi+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$; -3π. **14.** б) $\arccos\left(\frac{3}{13}\right)$. **15.** $(-0{,}5; 0) \cup [0{,}5; 1] \cup (2; 2{,}5)$. **16.** б) $504\sqrt{35}$. **17.** 20,5 млн руб. **18.** $-5 < k < 3$. **19.** а) Да; б) нет; в) 4.

Тренировочный вариант 8 (профильный уровень)

1. 105. **2.** 3. **3.** 13. **4.** 0,384. **5.** 2. **6.** 9,375. **7.** 6. **8.** 144. **9.** 41. **10.** 30. **11.** 38. **12.** −12. **13.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 4π; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{10\pi}{3}$. **14.** б) $\arccos\left(\frac{1}{17}\right)$. **15.** $(-4; -3) \cup \{-2{,}5\} \cup (-2; -1)$. **16.** б) $120\sqrt{15}$. **17.** 38 млн руб. **18.** $k \leqslant -\sqrt{2}$; $k \geqslant 1$. **19.** а) Да; б) нет; в) 7.

Тренировочный вариант 9 (профильный уровень)

1. 130. **2.** 10. **3.** 17. **4.** 0,1539. **5.** −4. **6.** 31,25. **7.** −1. **8.** 36. **9.** 27. **10.** 50. **11.** 37. **12.** −14. **13.** а) πn, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{31\pi}{6}$; 4π; 5π. **14.** б) $\arccos\left(\frac{53}{71}\right)$. **15.** $[3; +\infty)$. **16.** б) $360\sqrt{2}$. **17.** 28 млн руб. **18.** $k \leqslant -1$; $k \geqslant \sqrt{5}$. **19.** а) Да; б) нет; в) 6.

Тренировочный вариант 10 (профильный уровень)

1. 220. **2.** 5. **3.** 17. **4.** 0,2304. **5.** 2. **6.** 8,45. **7.** 1. **8.** 7,2. **9.** 5. **10.** 40. **11.** 31. **12.** -27. **13.** а) πn, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$; $-\pi$; -2π. **14.** б) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$. **15.** $[1{,}44; 1{,}5]$. **16.** б) $\frac{3000\sqrt{7}}{7}$. **17.** 33,5 млн руб. **18.** $k \leqslant -3$; $k \geqslant \sqrt{13}$. **19.** а) Да; б) нет; в) 4.

Тренировочный вариант 11 (профильный уровень)

1. 12. **2.** 6. **3.** 6. **4.** 0,25. **5.** -4. **6.** 48. **7.** 2. **8.** 7776. **9.** -49. **10.** 2,6. **11.** 1. **12.** 32. **13.** а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{31\pi}{6}$. **14.** б) $\sqrt{2}$. **15.** $x = 2$ или $x < \log_3 7$. **16.** б) 37,5. **17.** 106 млн руб. **18.** $a = -3$, $a = 1{,}5$. **19.** а) Да; б) нет; в) $\frac{10}{17}$.

Тренировочный вариант 12 (профильный уровень)

1. 56. **2.** 28. **3.** 15. **4.** 0,25 **5.** -12. **6.** 30,75. **7.** 6. **8.** 3280,5. **9.** 7. **10.** 2,5. **11.** 3. **12.** 81. **13.** а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$. **14.** б) $\sqrt{2}$. **15.** $x < 3$ или $x = \log_2 10$. **16.** б) 96. **17.** 73 млн руб. **18.** $a = 1$, $a = 3$. **19.** а) Да; б) нет; в) $\frac{77}{134}$.

Тренировочный вариант 13 (профильный уровень)

1. 15. **2.** 70,3. **3.** 12. **4.** 0,5. **5.** $-0{,}2$. **6.** 39. **7.** 5. **8.** 4500. **9.** 23. **10.** 3. **11.** 1. **12.** 343. **13.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{23\pi}{6}$. **14.** б) $2\sqrt{3}$. **15.** $x = 0$ или $x > 1$. **16.** б) 54. **17.** 76 млн руб. **18.** $a = -1$, $a = 2$. **19.** а) Да; б) нет; в) $\frac{88}{185}$.

Тренировочный вариант 14 (профильный уровень)

1. 72. **2.** 71,2. **3.** 16. **4.** 0,75. **5.** -21. **6.** 30. **7.** 6. **8.** 288. **9.** -7. **10.** 2,4. **11.** 2. **12.** 25. **13.** а) $\frac{\sqrt{3}}{9}$, $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$. **14.** б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **15.** $x = 0$ или $x > 0{,}5$. **16.** б) 250. **17.** 151 млн руб. **18.** $a = -7$, $a = 2$. **19.** а) Да; б) нет; в) $\frac{143}{248}$.

Тренировочный вариант 15 (профильный уровень)

1. 150. **2.** 70,5. **3.** 6. **4.** 0,5. **5.** -21. **6.** 54. **7.** 8. **8.** 121,5. **9.** 0,5. **10.** 2. **11.** 5. **12.** 256. **13.** а) 3, $3\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{3}$. **14.** б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **15.** $x > 1$ или $x = \log_6 3$. **16.** б) 40. **17.** 55 млн руб. **18.** $a = -2$, $a = 2$. **19.** а) Да; б) нет; в) $\frac{14}{25}$.

Тренировочный вариант 16 (профильный уровень)

1. 704. **2.** 22. **3.** -1. **4.** 0,0007. **5.** -1. **6.** 12. **7.** 2. **8.** 114. **9.** 2. **10.** 30. **11.** 20. **12.** 2. **13.** а) 1, $\log_3 6$; б) $\log_3 6$. **14.** б) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **15.** $x = 2$. **16.** б) 2. **17.** 7,5 млн руб. **18.** $a = \pi$. **19.** а) Да; б) нет; в) 9657 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 24 числа).

Тренировочный вариант 17 (профильный уровень)

1. 1664. **2.** 11. **3.** 0,5. **4.** 0,0007. **5.** –3. **6.** 5,4. **7.** 3. **8.** 60. **9.** 16. **10.** 30. **11.** 50. **12.** 0. **13.** а) 1, $\log_2 7$; б) $\log_2 7$. **14.** б) $2\sqrt{3}$. **15.** $x = \frac{1}{4}$, $x \geqslant 1$. **16.** б) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$. **17.** 8,25 млн руб. **18.** $a = \pi$. **19.** а) Да; б) нет; в) 6877 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Тренировочный вариант 18 (профильный уровень)

1. 1463. **2.** 25. **3.** 1. **4.** 0,008. **5.** –4. **6.** 36. **7.** 1. **8.** 130. **9.** 5. **10.** 30. **11.** 10. **12.** 10. **13.** а) –1, $\log_7 2$; б) $\log_7 2$. **14.** б) $\frac{24\sqrt{41}}{41}$. **15.** $x = 3$, $0 < x \leqslant 1$. **16.** б) $4\sqrt{2}$. **17.** 5,25 млн руб. **18.** $a = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{3\pi}{2}$. **19.** а) Да; б) нет; в) 9864 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 24 числа).

Тренировочный вариант 19 (профильный уровень)

1. 1326. **2.** 14. **3.** 2,5. **4.** 0,008. **5.** –1. **6.** 25. **7.** –6. **8.** 80. **9.** 3. **10.** 30. **11.** 30. **12.** 0. **13.** а) $-\frac{1}{3}$, $\log_5 3$; б) $\log_5 3$. **14.** б) $\frac{10\sqrt{66}}{33}$. **15.** $x = 25$, $0 < x \leqslant 15$. **16.** б) 4. **17.** 7,2 млн руб. **18.** $a = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{3\pi}{2}$. **19.** а) Да; б) нет; в) 6477 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Тренировочный вариант 20 (профильный уровень)

1. 1296. **2.** 11. **3.** 0,75. **4.** 0,009. **5.** –3. **6.** 16. **7.** –5. **8.** 178. **9.** 4. **10.** 30. **11.** 60. **12.** 2. **13.** а) 1, 0, $\log_5 3$; б) 0, $\log_5 3$. **14.** б) $\frac{9\sqrt{22}}{11}$. **15.** $x = 8$, $0 < x \leqslant 5$. **16.** б) $\frac{6\sqrt{15}}{5}$. **17.** 7,7 млн руб. **18.** $a = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{3\pi}{2}$. **19.** а) Да; б) нет; в) 9887 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Тренировочный вариант 21 (профильный уровень)

1. 18. **2.** 0,2. **3.** 20. **4.** 0,35. **5.** 7. **6.** 6. **7.** 7. **8.** 21. **9.** 30. **10.** 3. **11.** 44. **12.** –3. **13.** а) $\frac{\pi}{4}n$, $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{16}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{16}$, π. **14.** б) $\sqrt{1239}$. **15.** $(3; 6]$. **16.** 12. **17.** 9. **18.** $a = 0$, $a > 0{,}5$. **19.** а) Нет. б) Да, например, 17, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 5, 8. в) 11.

Тренировочный вариант 22 (профильный уровень)

1. 9. **2.** 0,4. **3.** 33. **4.** 5. **5.** 2. **6.** 0,5. **7.** 7. **8.** 80. **9.** –40. **10.** 4. **11.** 7. **12.** –9. **13.** а) $\frac{\pi}{3}n$, $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) π, $\frac{19\pi}{18}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{25\pi}{18}$. **14.** б) $2\sqrt{1833}$. **15.** $(5; 7]$. **16.** 24. **17.** 15. **18.** $a < -0{,}25$, $a = 0$, $a = \frac{4}{9}$, $a > 0{,}5$. **19.** а) Нет. б) Да, например, 13, 20, 27, 34, 17, 24, 12, 6, 13, 20, 10, 17. в) 13.

Тренировочный вариант 23 (профильный уровень)

1. 9. **2.** 0,4. **3.** 6. **4.** 0,15. **5.** 18. **6.** 2. **7.** 8. **8.** 14. **9.** –22. **10.** 8. **11.** 18. **12.** 6. **13.** а) $\frac{\pi}{2}n$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$. **14.** б) $2\sqrt{1491}$. **15.** $(2; 8]$. **16.** 24. **17.** 11. **18.** $a < -0{,}25$, $a = 0$. **19.** а) Нет. б) Да, например, 14, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 16, 21. в) 11.

Тренировочный вариант 24 (профильный уровень)

1. 14. **2.** 60. **3.** 7. **4.** 0,3. **5.** 2,5. **6.** 4. **7.** 6. **8.** 72. **9.** –6. **10.** 10. **11.** 15. **12.** 12. **13.** а) $2\pi n$, $\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) -2π, $-\frac{2\pi}{3}$. **14.** $2\sqrt{455}$. **15.** (4; 14]. **16.** 20. **17.** 17. **18.** $a<-\frac{9}{8}$, $a=0$, $a>\frac{9}{40}$. **19.** а) Нет. б) Да, например, 19, 24, 29, 34, 17, 22, 11, 16, 21. в) 11.

Тренировочный вариант 25 (профильный уровень)

1. 10. **2.** 30. **3.** 20. **4.** 0,4. **5.** 12. **6.** 5. **7.** 6. **8.** 12. **9.** 6. **10.** 50. **11.** 6. **12.** –1. **13.** а) $\frac{\pi}{2}n$, $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{31\pi}{8}$, 4π. **14.** б) $13\sqrt{30}$. **15.** (1; 4]. **16.** 10. **17.** 13. **18.** $a<-\frac{1}{6}$, $a=0$. **19.** а) Нет. б) Да, например, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 16, 19, 22, 11. в) 11.

Тренировочный вариант 26 (профильный уровень)

1. 5490. **2.** 14. **3.** 10. **4.** 0,28. **5.** 6. **6.** 30,25. **7.** 8. **8.** 152,5. **9.** 2. **10.** 36. **11.** 50. **12.** 5. **13.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$. **14.** б) $\arccos\frac{14}{55}$. **15.** $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right)$, (16; 64). **16.** б) 30. **17.** $p=9$. **18.** $-\frac{7}{4}\leqslant a\leqslant 8$. **19.** а) Да; б) нет; в) 26.

Тренировочный вариант 27 (профильный уровень)

1. 12,5. **2.** 4. **3.** 6. **4.** 0,32. **5.** –8. **6.** 119. **7.** 5. **8.** 13. **9.** 0,25. **10.** 505. **11.** 13. **12.** 5. **13.** а) $-\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$. **14.** б) $5\sqrt{3}$. **15.** $(-\infty; 0]$, $(\log_3 2; 1)$. **16.** б) 100. **17.** 80,5 млн руб. **18.** $1-\sqrt{10}<a<-2$, $a=0$. **19.** а) Например, 2529; б) нет; в) число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Тренировочный вариант 28 (профильный уровень)

1. 576. **2.** 21. **3.** 18. **4.** 0,34. **5.** –11. **6.** 81. **7.** 5. **8.** 384. **9.** 5. **10.** 2,4. **11.** 25. **12.** –65. **13.** а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; πm, $m\in\mathbb{Z}$; б) 3π, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{15\pi}{4}$. **14.** б) 7 : 11. **15.** $\left(-\infty;\frac{8}{9}\right]$, $\left[\frac{17}{9};+\infty\right)$. **16.** б) 2. **17.** 12 500. **18.** $-\sqrt{2}\leqslant a<2$. **19.** а) Да; б) нет; в) 242.

Тренировочный вариант 29 (профильный уровень)

1. 30. **2.** 3. **3.** 26. **4.** 0,35. **5.** –5. **6.** 30. **7.** –7. **8.** 54. **9.** 2. **10.** 30. **11.** 8. **12.** 3. **13.** а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$. **14.** б) $\operatorname{arctg}\sqrt{13}$. **15.** (–1; 0), (0; 0,5], (1; +∞). **16.** б) 3. **17.** 60. **18.** $a\geqslant -4$; $x=-1{,}5$ при $a=2{,}25$. **19.** а) Да; б) нет; в) $\frac{198}{7}$.

Тренировочный вариант 30 (профильный уровень)

1. 7. **2.** 31. **3.** 3. **4.** 0,031. **5.** 3. **6.** 50. **7.** –3. **8.** 736. **9.** 1,68. **10.** 40. **11.** 28. **12.** –12. **13.** а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$. **14.** б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{12}$. **15.** (2; 4), (4; 6). **16.** б) 24. **17.** 18%. **18.** $a=2{,}5$. **19.** а) –8, –5, 7; б) 7; в) нет.

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 1

13 а) Решите уравнение $(x^2+2x-2)\left(\log_3(x^2-5)+\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{5}-x)\right)=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3{,}5; -2{,}8]$.

Решение.

а) При условии, что $x<-\sqrt{5}$, получаем:

$$x^2+2x-2=0 \text{ или } \log_3(x^2-5)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{5}-x\right)=0.$$

Корни первого уравнения $x=-1-\sqrt{3}$ и $x=-1+\sqrt{3}$ (не удовлетворяет условию $x<-\sqrt{5}$).

Корень второго уравнения $x=-1-\sqrt{5}$.

Значит, $x=-1-\sqrt{3}$ или $x=-1-\sqrt{5}$.

б) $-1{,}8<-\sqrt{3}<-1{,}7$, поэтому $-2{,}8<-1-\sqrt{3}<-2{,}7$, а значит, корень $x=-1-\sqrt{3}$ не принадлежит отрезку $[-3{,}5; -2{,}8]$;

$-2{,}3<-\sqrt{5}<-2{,}2$, поэтому $-3{,}3<-1-\sqrt{5}<-3{,}2$, а значит, корень $x=-1-\sqrt{5}$ принадлежит отрезку $[-3{,}5; -2{,}8]$.

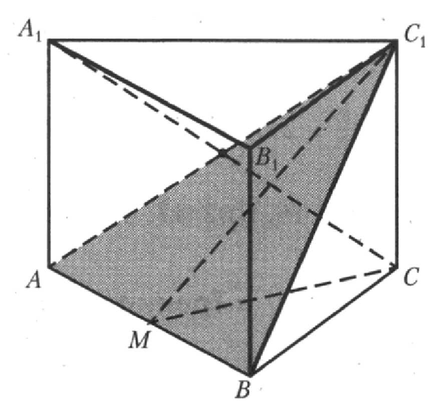
Ответ: а) $-1-\sqrt{3}$; $-1-\sqrt{5}$; б) $-1-\sqrt{5}$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCDA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отношение объёма призмы $ABCDA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды ABA_1C_1 равно $3:1$.

б) Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью ABC_1, если $AB=8$ и $AA_1=6$.

Решение.



а) Поскольку $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, четырёхугольник AA_1CC_1 — прямоугольник, а его диагонали AC_1 и A_1C пересекаются в некоторой точке и делятся ей пополам. Отсюда получаем, что отрезок A_1C делится плоскостью ABC_1 пополам. Следовательно, высоты пирамид A_1ABC_1 и $CABC_1$, проведённые из их вершин A_1 и C к общему основанию ABC_1, равны. Поэтому объёмы этих пирамид также равны. Аналогично, получаем, что равны и объёмы пирамид AA_1BC_1 и $B_1A_1BC_1$.

Поскольку объём призмы $ABCA_1B_1C_1$ складывается из трёх равных объёмов пирамид ABA_1C_1, $CABC_1$ и $B_1A_1BC_1$, получаем, что отношение объёма призмы $ABCA_1B_1C_1$ к объёму пирамиды ABA_1C_1 равно $3:1$.

б) Объём призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен произведению площади её основания ABC на высоту AA_1. Площадь основания ABC равна $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}$.

Значит, объём призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен $16\sqrt{3}\cdot 6=96\sqrt{3}$. По доказанному в пункте а), объём пирамиды A_1ABC_1 равен $\frac{1}{3}\cdot 96\sqrt{3}=32\sqrt{3}$.

По теореме Пифагора для треугольников ACC_1, BCC_1 и BAA_1 имеем:

$$AC_1 = BC_1 = BA_1 = \sqrt{AB^2 + AA_1^2} = 10.$$

Треугольник ABC_1 — равнобедренный. Пусть M — середина AB, тогда $AM = 4$, по теореме Пифагора $C_1M = \sqrt{AC_1{}^2 - AM^2} = 2\sqrt{21}$. Площадь треугольника ABC_1 равна $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CM_1 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{21} = 8\sqrt{21}$.

Пусть h — высота пирамиды A_1ABC_1, проведённая к основанию ABC_1. Объём пирамиды A_1ABC_1 равен трети произведения площади её основания ABC_1 на высоту h, проведённую к этому основанию. Отсюда получаем, что $h = \frac{3\cdot 32\sqrt{3}}{8\sqrt{21}} = \frac{12\sqrt{7}}{7}$.

Синус искомого угла равен отношению высоты пирамиды A_1ABC_1, проведённой к основанию ABC_1, к длине отрезка BA_1. Следовательно, искомый угол равен $\arcsin\left(\frac{h}{BA_1}\right) = \arcsin\left(\frac{12\sqrt{7}}{70}\right)$.

Ответ: б) $\arcsin\left(\frac{12\sqrt{7}}{70}\right)$.

15 Решите неравенство $3^{\lg x} + 6\frac{2}{3}\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 2^{0,5(\lg x - 6)} \leqslant 2^{\lg x}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$3^{\lg x} + \frac{20}{3}\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 2^{0,5\lg x}\cdot 2^{-3} \leqslant 2^{\lg x};$$

$$3^{\lg x} + \frac{20}{3\cdot 8}\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 2^{0,5\lg x} \leqslant 2^{\lg x};$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} + \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{0,5\lg x} \leqslant 1.$$

Откуда получаем, что $\left(\frac{3}{2}\right)^{0,5\lg x} \leqslant \frac{2}{3}$; $0,5\lg x \leqslant -1$; $0 < x \leqslant 0,01$.

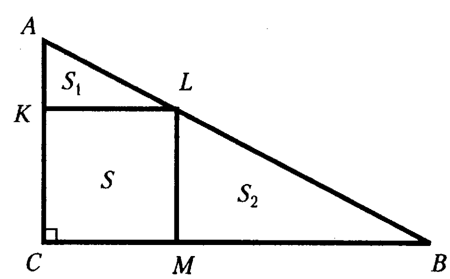
Ответ: $(0; 0,01]$.

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C так отмечены точки K, L и M соответственно, что $KLMC$ — квадрат.

а) Докажите, что длина стороны квадрата $KLMC$ равна $\frac{AC\cdot AB}{AC+BC}$.

б) Найдите площадь квадрата $KLMC$, если площади треугольников AKL и LMB равны 8 и 18 соответственно.

Решение.



а) Обозначим $BC = a$, $AC = b$, и $KL = x$. Треугольники AKL и ACB подобны по двум углам. Отсюда $\frac{AK}{AC} = \frac{KL}{CB}$, $\frac{b-x}{b} = \frac{x}{a}$ и $x = \frac{a\cdot b}{a+b}$.

б) Обозначим через S, S_1 и S_2 площади квадрата $KLMC$ и треугольников AKL и LMB соответственно. Используя обозначения и результат из доказательства пункта а), получаем $S_1 = \frac{1}{2}(b-x)x = \frac{ab^3}{2(a+b)^2}$,

$S_2 = \frac{1}{2}(a-x)x = \frac{a^3b}{2(a+b)^2}$ и $S = x^2 = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} = 2\sqrt{S_1S_2} = 2\sqrt{8\cdot 18} = 24$.

Ответ: б) 24.

17 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 60% (до $t_1 = 1{,}6t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $12\,000 - 2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

Решение.

Заметим, что налоговые сборы составляют $f(t) = t(12\,000 - 2t) = 12\,000t - 2t^2$ рублей при $t < 6000$. Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. При этом $f(t_0) = f(1{,}6t_0)$, значит, функция $f(t)$ достигает своего максимума при $t = \frac{2{,}6t_0}{2}$. Поскольку $1{,}3t_0$ составляет 81,25% от $1{,}6t_0$, государству следует понизить налог на 18,75%.

Ответ: 18,75.

18 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых любое x из отрезка $[-1;\,1]$ будет являться решением неравенства $3a^{2x} - 16^x + 2\cdot(4a)^x \geqslant 0$.

Решение.

Разделим обе части неравенства на положительное выражение $(4a)^x$ и обозначим $t = \left(\frac{a}{4}\right)^x$, $t > 0$. Получим: $3t - \frac{1}{t} + 2 \geqslant 0$; $\frac{3t^2 + 2t - 1}{t} \geqslant 0$.

Значит, $t \in \left[\frac{1}{3};\, +\infty\right)$, то есть $\left(\frac{a}{4}\right)^x \geqslant \frac{1}{3}$.

При $a > 4$ получаем: $x \geqslant \log_{\frac{a}{4}} \frac{1}{3}$. Любое число из промежутка $[-1;\,1]$ будет являться решением неравенства, если $\log_{\frac{a}{4}} \frac{1}{3} \leqslant -1$. Значит, $\frac{1}{3} \leqslant \frac{4}{a}$, то есть $a \in (4;\,12]$.

При $a \in (0;\,4)$ получаем: $x \leqslant \log_{\frac{a}{4}} \frac{1}{3}$. Любое число из промежутка $[-1;\,1]$ будет являться решением неравенства, если $\log_{\frac{a}{4}} \frac{1}{3} \geqslant 1$. Значит, $\frac{1}{3} \leqslant \frac{a}{4}$, то есть $a \in \left[\frac{4}{3};\, 4\right)$.

При $a = 4$ неравенство верно при всех x.

Ответ: $\left[\frac{4}{3};\, 12\right]$.

19 Пусть $\overline{ab}$ обозначает двузначное число, равное $10a + b$, где a и b — десятичные цифры, $a \neq 0$.

а) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd} - \overline{ba}\cdot\overline{dc} = 99$?

б) Существуют ли такие попарно различные ненулевые цифры a, b, c и d, что $\overline{ab}\cdot\overline{cd} - \overline{ba}\cdot\overline{dc} = 693$, если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7?

в) Какое наибольшее значение может принимать выражение $\overline{ab}\cdot\overline{cd} - \overline{ba}\cdot\overline{dc}$, если среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7?

Решение.

а) Да. Действительно, если $a = 1$, $b = 2$, $c = 9$ и $d = 4$, то $12\cdot 94 - (21\cdot 49) = 99$.

б) Докажем, что это невозможно. Имеем:

$$\overline{ab}\cdot\overline{cd} - \overline{ba}\cdot\overline{dc} = (10a + b)\cdot(10c + d) - (10b + a)\cdot(10d + c) = 99\cdot(ac - bd).$$

Значит, если $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=693$, то $99\cdot(ac-bd)=693=99\cdot 7$ и $ac-bd=7$. Если среди цифр a, b, c и d есть цифра 7, то одно из произведений ac или bd делится на 7, а значит, и другое произведение тоже делится на 7. Это невозможно, так как в этом случае среди цифр a, b, c и d есть по крайней мере две цифры 7.

в) Как показано выше, имеем $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}=99\cdot(ac-bd)$. Рассмотрим все возможные случаи, когда среди цифр a, b, c и d есть цифры 5 и 7.

Если цифры 5 и 7 — это a и c, то $ac-bd\leqslant 5\cdot 7-1\cdot 2=33$.

Если цифры 5 и 7 — это b и d, то $ac-bd\leqslant 8\cdot 9-5\cdot 7=37$.

Если цифра 5 — это a или c, а цифра 7 — это b или d, то $ac-bd\leqslant 5\cdot 9-7\cdot 1=38$.

Если цифра 7 — это a или c, а цифра 5 — это b или d, то $ac-bd\leqslant 7\cdot 9-5\cdot 1=58$.

Значит, наибольшее возможное значение выражения $\overline{ab}\cdot\overline{cd}-\overline{ba}\cdot\overline{dc}$ равно $99\cdot 58=5742$, оно достигается, например, при $a=7$, $b=5$, $c=9$ и $d=1$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $99\cdot 58=5742$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ 6

13 а) Решите уравнение $4\cdot 256^{\sin x}-65\cdot 16^{\sin x}+16=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение: $4\cdot\left(16^{\sin x}\right)^2-65\cdot 16^{\sin x}+16=0$.

Значит, $16^{\sin x}=16$ или $16^{\sin x}=\frac{1}{4}$.

Решая первое уравнение, получаем $\sin x=1$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Решая второе уравнение, получаем $\sin x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$ или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) Найдём корни уравнения, удовлетворяющие двойному неравенству $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant-\pi$.

В первом случае получаем: $-\frac{5\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi n\leqslant-\pi$; $-1{,}5\leqslant n\leqslant-\frac{3}{4}$, где $n\in\mathbb{Z}$; откуда $n=-1$; $x=-\frac{3\pi}{2}$.

Во втором случае получаем: $-\frac{5\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{6}+2\pi n\leqslant-\pi$; $-\frac{4}{3}\leqslant n\leqslant-\frac{7}{12}$, где $n\in\mathbb{Z}$; откуда $n=-1$; $x=-\frac{13\pi}{6}$.

В третьем случае получаем: $-\frac{5\pi}{2}\leqslant-\frac{5\pi}{6}+2\pi n\leqslant-\pi$; $-\frac{5}{6}\leqslant n\leqslant-\frac{1}{12}$, где $n\in\mathbb{Z}$; нет решений.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{13\pi}{6}$.

14 В верхнем основании прямого кругового цилиндра проведён диаметр AB, в нижнем — диаметр CD, который не параллелен AB. Точка H — проекция точки A на нижнее основание.

а) Докажите, что $2AH^2=AC^2+AD^2-AB^2$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ABD, если $AB=4$ и $AC=AD=3$.

Решение.

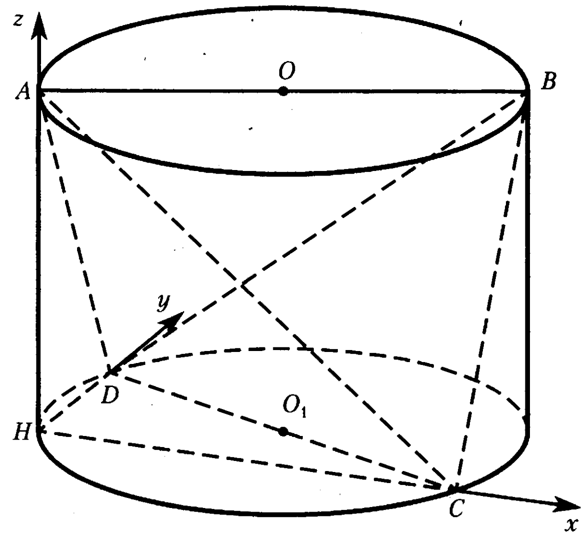
а) По условию данный цилиндр является прямым. Значит, его образующая AH перпендикулярна к плоскости основания и, следовательно, перпендикулярна отрезкам HC и HD. Отсюда по теореме Пифагора получаем $AC^2=AH^2+HC^2$ и $AD^2=AH^2+HD^2$.

Угол CHD — вписанный, опирающийся на диаметр CD. Значит, этот угол прямой. По теореме Пифагора имеем $AB^2 = CD^2 = HC^2 + HD^2$.

Следовательно,

$$AC^2 + AD^2 - AB^2 = \left(AH^2 + HC^2\right) + \left(AH^2 + HD^2\right) - AB^2 = 2AH^2.$$

б) Введём декартову систему координат $Hxyz$ с началом координат в точке $H(0;\,0;\,0)$ из решения пункта а), осью Hz в направлении луча HC, осью Hy в направлении луча HD и осью Hz в направлении луча HA.



По доказанному в пункте а) имеем

$$2AH^2 = AC^2 + AD^2 - AB^2 = 3^2 + 3^2 - 4^2 = 2.$$

Получаем $AH = 1$, $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = 2\sqrt{2}$ и $HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 2\sqrt{2}$.

Точки A, C, D и центр нижнего основания O_1 имеют координаты $(0;\,0;\,1)$, $\left(2\sqrt{2};\,0;\,0\right)$, $\left(0;\,2\sqrt{2};\,0\right)$ и $\left(\sqrt{2};\,\sqrt{2};\,0\right)$ соответственно. Значит, центр O верхнего основания имеет координаты $\left(\sqrt{2};\,\sqrt{2};\,1\right)$, а точка B — координаты $\left(\sqrt{2};\,\sqrt{2};\,1\right)$.

Плоскость ABC имеет в декартовых координатах $Hxyz$ уравнение $\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{y}{2\sqrt{2}} + z = 1$.

Плоскость ABC имеет в декартовых координатах $Hxyz$ уравнение $-\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{y}{2\sqrt{2}} + z = 1$. Значит, векторы $\vec{u}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};\,-\frac{1}{2\sqrt{2}};\,1\right)$ и $\vec{v}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}};\,\frac{1}{2\sqrt{2}};\,1\right)$ перпендикулярны к плоскостям ABC и ABD соответственно.

Косинус угла α межд ілоскостями ABC и ABD равен модулю косинуса угла φ между векторами $\vec{u}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};\,-\frac{1}{2\sqrt{2}};\,1\right)$ и $\vec{v}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}};\,\frac{1}{2\sqrt{2}};\,1\right)$. Следовательно, $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{3}{5}$ и $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

Ответ: б) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

15 Решите неравенство $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$.

Решение.

Так как $\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=1$, то $\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}$, и неравенство принимает вид $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leqslant \left(\sqrt{2}+1\right)^{x}$.

Поскольку $\sqrt{2}+1>1$, то $\frac{6x-6}{x+1}\leqslant x$; $\frac{x^2-5x+6}{x+1}\geqslant 0$; $\frac{(x-2)(x-3)}{x+1}\geqslant 0$.

Значит, $x\in(-1;\,2]\cup[3;\,+\infty)$.

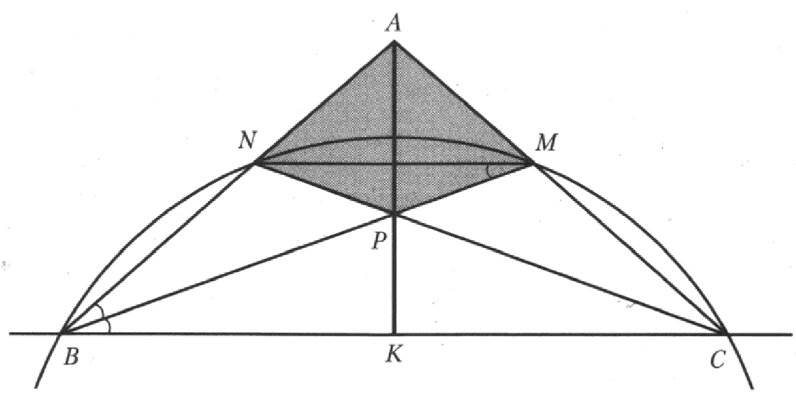
Ответ: $(-1;\,2]\cup[3;\,+\infty)$.

16 В треугольнике ABC проведены биссектрисы BM и CN. Оказалось, что точки B, C, M и N лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите площадь четырёхугольника $AMPN$, если $MN:BC=1:2$, а $BN=12$.

Решение.



а) Вписанные углы NCM и MBN опираются на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Поскольку $\frac{1}{2}\angle ACB=\angle MCN=\angle MBN=\frac{1}{2}\angle ABC$, получаем $\angle ACB=\angle ABC$, то есть треугольник ABC равнобедренный.

б) Поскольку $\angle BCN=\angle MCN=\angle MBN=\angle BMN$, то $BN=NM=MC=12$ и прямая MN параллельна прямой BC. Отрезок BC равен 24.

Пусть AK — биссектриса, медиана и высота треугольника ABC. Прямая AK проходит через точку P — центр вписанной окружности.

Треугольник ANM подобен треугольнику ABC, следовательно,

$$\frac{AN}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$AB=2BN=24,$$

$$AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=\sqrt{24^2-12^2}=12\sqrt{3}.$$

Площадь треугольника ABC равна

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AK\cdot BC=\frac{1}{2}PK\cdot(AB+AC+BC),$$

$$PK=\frac{AK\cdot BC}{AB+AC+BC}=\frac{12\sqrt{3}\cdot 24}{24+24+24}=4\sqrt{3},\quad AP=AK-PK=12\sqrt{3}-4\sqrt{3}=8\sqrt{3}.$$

В четырёхугольнике $AMPN$ диагонали AP и MN перпендикулярны, поэтому его площадь равна

$$S_{AMPN} = \frac{1}{2}AP \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 12 = 48\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $48\sqrt{3}$.

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 150 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 100 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 6000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 5000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение.

Заметим, что на первом поле с одного гектара можно собрать либо 200 центнеров картофеля и получить 1200000 рублей, либо 300 центнеров свеклы и получить 1500000 рублей. Таким образом, нужно всё первое поле отдать под свеклу. На втором поле с одного гектара можно собрать либо 150 центнеров картофеля и получить 900000 рублей, либо 100 центнеров свеклы и получить 500000 рублей. Поэтому второе поле нужно целиком отдать под картофель. В этом случае фермер сможет заработать $10 \cdot 300 \cdot 5000 + 10 \cdot 150 \cdot 6000 = 24\,000\,000$ (рублей).

Ответ: 24 млн рублей.

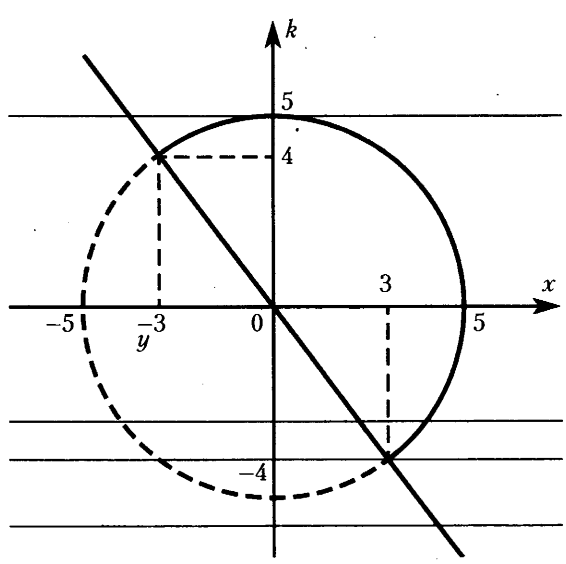
18 Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство $(x^2 + k^2 - 25)\sqrt{4x + 3k} \leqslant 0$ имеет не более двух решений.

Решение.

При любом значении k число $x = -\frac{3k}{4}$ является решением данного неравенства, поскольку в этом случае $\sqrt{4x + 3k} = 0$ и неравенство верно.

Заметим, что любое решение неравенства, кроме указанного выше, должно удовлетворять неравенству $x > -\frac{3k}{4}$.

Изобразим на плоскости Oxk все решения данного неравенства. Это будут точки $(x; k)$, для которых либо $4x + 3k = 0$, либо $4x + 3k > 0$ и $x^2 + k^2 - 25 \leqslant 0$.



Неравенству удовлетворяют все точки, лежащие на прямой AB и внутри полукруга, ограниченного хордой AB (включая точки границы).

Найдём координаты точек A и B, решив систему

$$\begin{cases} x^2 + k^2 = 25, \\ 4x + 3k = 0. \end{cases}$$

Получим $x = -3$, $k = 4$ или $x = 3$, $k = -4$.

Неравенство имеет единственное решение, если $k \leqslant -4$ или $k > 5$.

При $k = 5$ неравенство имеет ровно два решения: $x = 0$ и $x = -\frac{15}{4}$.

При остальных значениях k неравенство имеет бесконечное число решений.

Ответ: $k \leqslant -4$; $k \geqslant 5$.

19 Пусть S_n обозначает сумму первых n членов непостоянной бесконечной арифметической прогрессии a_1, a_2, ... a_n, ..., состоящей из натуральных чисел ($S_1 = a_1$).

а) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что $S_6 = 1980$?

б) Существует ли такая арифметическая прогрессия указанного вида, что для некоторого натурального числа n имеют место равенства $S_n = 350$ и $S_{n+2} = 625$?

в) Сколько существует таких натуральных чисел n, для каждого из которых существует такая арифметическая прогрессия указанного вида, что имеет место равенство $S_n = 625$?

Решение.

а) Да. Например, если $a_1 = 5$ и $d = a_2 - a_1 = 130$ то $S_6 = 6a_1 = 15d = 1980$.

б) Пусть a_1, a_2, ... a_n, ... — искомая бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, а $d = a_2 - a_1$ — её разность. Тогда по формуле суммы арифметической прогрессии имеем $S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ и $S_{n+2} = (n+2) \cdot a_1 + \frac{(n+2)(n+1)}{2} \cdot d$. Значит, если n нечётно, то S_n делится на n и S_{n+2} делится на $n + 2$, а если n чётно, то S_n делится на $\frac{n}{2}$ и S_{n+2} делится на $\frac{n+2}{2}$. Поскольку $S_{n+2} = 625 = 5^4 \geqslant \frac{(n+2)(n+3)}{2} \leqslant \frac{(n+2)^2}{2}$, отсюда получаем, что число $n + 2 < 25\sqrt{2} < 40$ и может равняться 5 или 5^2 в первом случае и 10 во втором случае. Тогда n может равняться 3, 23 или 8. Приходим к противоречию, так как тогда ни n, ни $\frac{n}{2}$ не являются делителями числа $S_n = 350$.

в) Как показано выше, если n нечётно, то S_n делится на n, а если n чётно, то S_n делится на $\frac{n}{2}$. Поскольку $S_n = 625 = 5^4$, отсюда получаем, что n может равняться 1, 5, 5^2, 5^3, 5^4 в первом случае и 2, 10, $2 \cdot 5^2$, $2 \cdot 5^3$, $2 \cdot 5^4$ во втором случае. Кроме того, имеем $S_n = 625 = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \geqslant \frac{n(n+1)}{2} > \frac{n^2}{2}$. Отсюда получаем, что $n < 25\sqrt{2} < 40$.

Для $n = 1$ существует искомая прогрессия с $a_1 = 625$ и $d = 1$. Для $n = 2$ существует искомая прогрессия с $a_1 = 312$ и $d = 1$. Для $n = 5$ существует искомая прогрессия с $a_1 = 123$ и $d = 1$. Для $n = 10$ существует искомая прогрессия с $a_1 = 58$ и $d = 1$. Для $n = 25$ существует искомая прогрессия с $a_1 = 13$ и $d = 1$. Значит, существует ровно 5 искомых натуральных чисел.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

13 а) Решите уравнение $(-2\cos^2 x + \sin x + 1)\cdot\log_{0,5}(-0{,}8\cos x) = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-6\pi; -4\pi]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$(-2(1-\sin^2 x) + \sin x + 1)\cdot\log_{0,5}(-0{,}8\cos x) = 0;$$

$$(2\sin^2 x + \sin x - 1)\cdot\log_{0,5}(-0{,}8\cos x) = 0.$$

Значит, $\log_{0,5}(-0{,}8\cos x) = 0$ или $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ при условии $\cos x < 0$.

Решая первое уравнение, получаем $\cos x = -1{,}25$ — корней нет.

Решая второе уравнение, получаем $\sin x = -1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Учитывая условие $\cos x < 0$, получаем $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Найдём корни уравнения, удовлетворяющие двойному неравенству $-6\pi \leqslant x \leqslant -4\pi$.

Получаем: $-6\pi \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant -4\pi$; $-\frac{41}{12} \leqslant n \leqslant -\frac{29}{12}$, где $n \in \mathbb{Z}$; получаем $n = -3$, $x = -\frac{31\pi}{6}$.

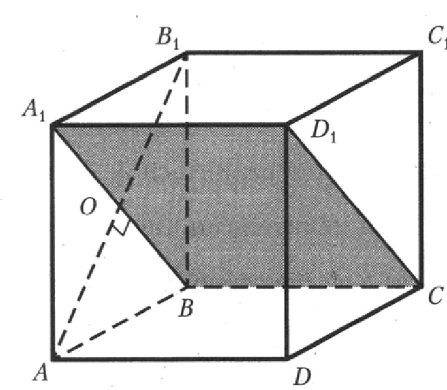
Ответ: а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{31\pi}{6}$.

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B, A_1 и D_1.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости сечения.

Решение.



а) Так как ребро BC параллельно ребру A_1D_1, то точка C лежит в плоскости BA_1D_1. Прямоугольник BCD_1A_1 — искомое сечение.

б) Пусть O — точка пересечения диагоналей грани AA_1B_1B.

По свойству диагоналей квадрата AO и A_1B перпендикулярны.

Поскольку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, ребро A_1D_1 перпендикулярно грани AA_1B_1B, поэтому AO и A_1D_1 перпендикулярны.

Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая AO перпендикулярна плоскости BA_1D_1, то есть длина отрезка AO является расстоянием от точки A до плоскости BA_1D_1.

$$AO = \frac{1}{2}A_1B_1 = \sqrt{2}.$$

Ответ: б) $\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство $\frac{3^x+7}{3^x-7}+\frac{3^x-7}{3^x+7}\leqslant\frac{4\cdot 3^{x+2}-64}{9^x-49}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{3^x+7}{3^x-7}+\frac{3^x-7}{3^x+7}\leqslant\frac{36\cdot 3^x-64}{\left(3^x\right)^2-49}.$$

Пусть $t=3^x$; неравенство принимает вид:

$$\frac{t+7}{t-7}+\frac{t-7}{t+7}\leqslant\frac{36t-64}{t^2-49};$$

$$\frac{2t^2-36t+162}{t^2-49}\leqslant 0;\ \frac{2(t-9)^2}{(t-7)(t+7)}\leqslant 0,$$

откуда $-7<t<7$ или $t=9$.

При $-7<t<7$ получаем $-7<3^x<7$, откуда $x<\log_3 7$.

При $t=9$ получаем $3^x=9$, откуда $x=2$.

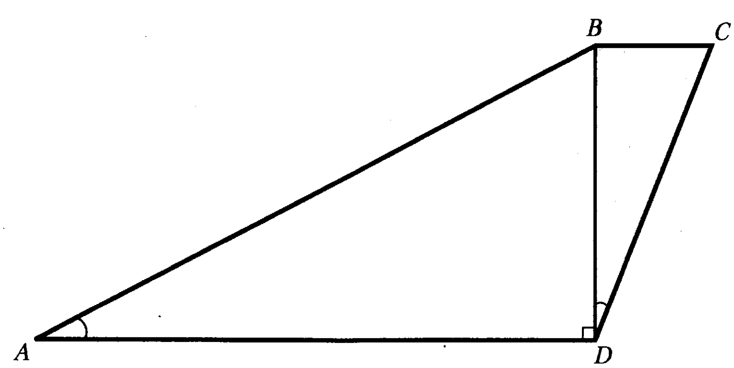
Ответ: $x<\log_3 7,\ x=2$.

16 В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AD параллельна стороне BC. Диагональ BD перпендикулярна стороне AD. Сумма тупых углов равна $270°$. Известно, что $AD=4BC$.

а) Докажите, что $AB=2CD$.

б) Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах параллельных сторон и диагоналей исходного четырёхугольника $ABCD$, если $BD=10$.

Решение.



а) Сумма острых углов DAB и BCD четырёхугольника $ABCD$ равна $360°-270°=90°$, значит, $\angle CDB=90°-\angle BCD=\angle BAD$, и прямоугольные треугольники ADB и DBC подобны. Тогда $\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{BD}$, поэтому

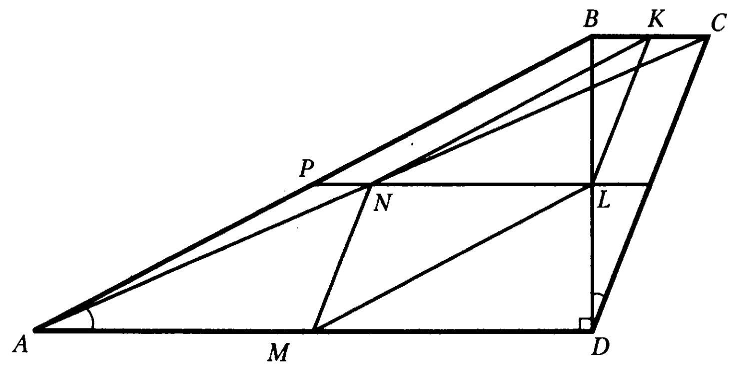
$$BD^2=BC\cdot AD=BC\cdot 4BC=4BC^2,$$

$$BD=2BC,$$

$$\frac{CD}{AB}=\frac{BD}{AD}=\frac{2BC}{AD}=2\cdot\frac{BC}{AD}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $AB=2CD$.

б) Из вышедоказанного получаем, что $BC = \frac{BD}{2} = 5$.



Пусть K, L, M и N — середины отрезков BC, BD, DA и AC, соответственно, а P — точка пересечения прямой NL со стороной AB. Отрезки PN и PL — средние линии треугольников ABC и ABD, поэтому $NL = PL - PN = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}BC = \frac{15}{2}$.

Поскольку NL отрезок параллелен отрезкам BC и AD, треугольник NKL равновелик треугольнику NBL, а треугольник NML — треугольнику NDL. Следовательно,

$$S_{KLMN} = S_{BND} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot NL = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{15}{2} = 37{,}5.$$

Ответ: б) 37,5.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в пятилетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 10% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 30 млн рублей в первый и второй годы, а также по 20 млн в третий, четвёртый и пятый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 180 млн, а к концу проекта — больше 320 млн рублей.

Решение.

Пусть S млн рублей — первоначальные вложения. К началу 2-го года получится $1{,}1S + 30$ млн рублей, а к началу 3-го года — $1{,}1(1{,}1S + 30) + 30 = 1{,}21S + 63$. По условию $1{,}21S + 63 > 180$, откуда $S > \frac{117}{1{,}21} = 96\frac{84}{121}$.

К началу 4-го года имеем $1{,}1(1{,}21S + 63) + 20$, а в конце проекта

$$1{,}1\big(1{,}1(1{,}1(1{,}21S + 63) + 20) + 20\big) + 20 = 1{,}61051S + 150{,}053.$$

По условию $1{,}61051S + 150{,}053 > 320$, откуда $S > \frac{169{,}947}{1{,}61051} = 105\frac{84345}{161051}$.

Наименьшее целое $S = 106$.

Ответ: 106 млн руб.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых решением системы неравенств

$$\begin{cases} a+3x \leqslant 12, \\ a+4x \geqslant x^2, \\ a \leqslant x \end{cases}$$

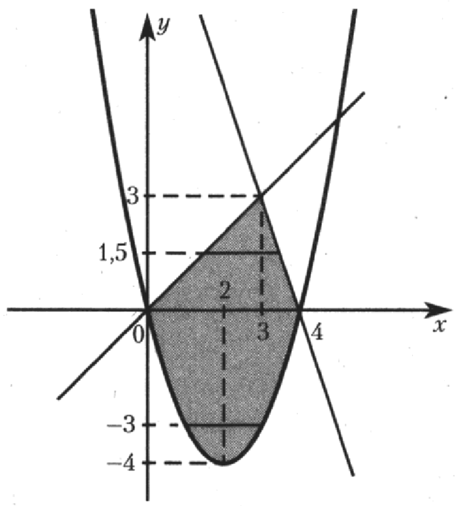
является отрезок, длина которого равна 2.

Решение.

Преобразуем систему неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant 12-3x, \\ a \geqslant (x-2)^2-4, \\ a \leqslant x. \end{cases}$$

Изобразим множество, задаваемое этой системой неравенств, на плоскости $x0a$.



Прямая $a = 12 - 3x$ пересекает параболу $a = (x-2)^2 - 4$ в точках $(-3; 21)$ и $(4; 0)$.

Прямая $a = x$ пересекает параболу $a = (x-2)^2 - 4$ в точках $(0; 0)$ и $(5; 5)$.

Прямые $a = 12 - 3x$ и $a = x$ пересекаются в точке $(3; 3)$.

При $a < -4$ система неравенств не имеет решений.

При $a = -4$ система неравенств имеет решение $x = 2$.

При $-4 < a \leqslant 0$ система неравенств имеет решение $2 - \sqrt{a+4} \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{a+4}$.

Длина отрезка равна 2: $2\sqrt{a+4} = 2$; $a = -3$. При $a = -3$ решением системы неравенств является отрезок $[1; 3]$.

При $0 < a < 3$ система неравенств имеет решение $a \leqslant x \leqslant \frac{12-a}{3}$.

Длина отрезка равна 2: $\frac{12-4a}{3} = 2$; $a = 1{,}5$. При $a = 1{,}5$ решением системы неравенств является отрезок $[1{,}5; 3{,}5]$.

При $a = 3$ система неравенств имеет решение $x = 3$.

При $a > 3$ система не имеет решений.

Ответ: $a = -3$, $a = 1{,}5$.

19 Все ученики класса дополнительно занимаются либо в спортивной секции, либо в кружке по любимому предмету, либо одновременно и в секции, и в кружке. Известно, что девочки, занимающиеся в спортивной секции, составляют не более $\frac{3}{13}$ от общего числа учащихся, занимающихся в спортивной секции, а на кружки девочек ходит не более $\frac{2}{7}$ от общего числа учащихся, занимающихся в кружках.

а) Может ли в классе быть всего 7 девочек и 11 мальчиков?

б) Может ли в классе быть всего 9 девочек и 9 мальчиков?

в) Какую наименьшую долю могут составлять мальчики от общего числа учеников, если неизвестно, сколько всего учеников в классе?

Решение.

а) Если в классе 3 девочки, занимающиеся в спортивной секции, 4 девочки, которые ходят на кружки, и 11 мальчиков, которые и в секции занимаются, и на кружки ходят, то все условия задачи выполнены: $\frac{3}{3+11} = \frac{3}{14} < \frac{3}{13}$ и $\frac{4}{4+11} = \frac{4}{15} < \frac{2}{7}$.

б) В спортивной секции занимаются не более 3 девочек, поскольку, если бы их было 4 или больше, то доля девочек в секции была бы не меньше $\frac{4}{4+9} = \frac{4}{13} > \frac{3}{13}$. Аналогично кружки посещают не более 4 девочек, поскольку если бы их было 5 или больше, то доля девочек в кружках была бы не меньше $\frac{5}{5+9} = \frac{5}{14} > \frac{2}{7}$, но тогда хотя бы две девочки не занимаются ни в спортивной секции, ни в кружках, что противоречит условию.

в) Предположим, что одна девочка посещает и спортивную секцию, и кружок. Если бы вместо неё в классе было бы две девочки, одна из которых ходила бы в секцию, а вторая на кружок, то доля девочек и в спортивной секции, и на кружке осталась бы прежней, а общая доля мальчиков класса стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли мальчиков в классе будем считать, что каждая девочка занимается или только в секции, или только в кружке.

Пусть в классе d_1 девочек, занимающихся в спортивной секции, d_2 девочек, занимающихся в кружках, и m мальчиков. Будем считать, что все мальчики ходят и на секцию, и в кружки, поскольку их доля в классе от этого не изменится, и доля в секции и на кружках не изменится.

По условию $\frac{d_1}{d_1+m} \leqslant \frac{3}{13}$, $\frac{d_2}{d_2+m} \leqslant \frac{2}{7}$, значит, $\frac{d_1}{m} \leqslant \frac{3}{10}$, $\frac{d_2}{m} \leqslant \frac{2}{5}$.

Тогда $\frac{d_1+d_2}{m} \leqslant \frac{7}{10}$, поэтому доля мальчиков в классе:

$$\frac{m}{d_1+d_2+m} = \frac{1}{\frac{d_1+d_2}{m}+1} \geqslant \frac{1}{\frac{7}{10}+1} = \frac{10}{17}.$$

Если в классе 3 девочки, занимающихся в спортивной секции, 4 девочки, посещающие кружки, и 10 мальчиков, занимающихся и в секции, и в кружках, то условия задачи выполнены, а доля мальчиков равна $\frac{10}{17}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $\frac{10}{17}$.

13 а) Решите уравнение $27^x - 6\cdot 9^x - 3^{x+2} + 54 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 5; \log_3 8]$.

Решение.

а) Разложим левую часть на множители:

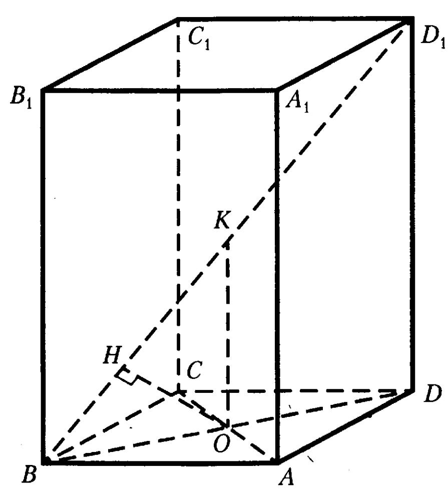
$$3^{3x} - 6\cdot 3^2 - 9\cdot 3^x + 54 = 0;$$
$$3^{2x}\cdot\left(3^x - 6\right) - 9\cdot\left(3^x - 6\right) = 0;$$
$$\left(3^x - 6\right)\cdot\left(3^{2x} - 9\right) = 0.$$

Получаем, что $3^x - 6 = 0$, откуда $x = \log_3 6$, или $3^{2x} - 9 = 0$, откуда $x = 1$.
б) Поскольку $1 = \log_3 3 < \log_3 6 < \log_3 8$, отрезку $[\log_3 5; \log_3 8]$ принадлежит только корень $\log_3 6$.

Ответ: а) 1, $\log_3 6$; б) $\log_3 6$.

14 Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$.
а) Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми BD_1 и AC, если $AB = 4$, $AA_1 = 8$.

Решение.



а) Диагональ основания AC перпендикулярна второй диагонали BD. Поскольку ребро DD_1 перпендикулярно основанию $ABCD$, прямая AC перпендикулярна ребру DD_1. Следовательно, прямая AC перпендикулярна плоскости BDD_1, а значит прямой BD_1.
б) Из точки O — центра основания $ABCD$ опустим перпендикуляр OH на диагональ BD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина отрезка OH — искомое расстояние между прямыми BD_1 и AC. Пусть OK — средняя линия треугольника BDD_1. В треугольнике BOK:

$$BO = \frac{BD}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}, \quad OK = \frac{DD_1}{2} = \frac{8}{2} = 4,$$
$$BK = \sqrt{BO^2 + OK^2} = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{6}.$$

Площадь треугольника BOK равна

$$S_{BOK} = \frac{1}{2}\cdot BO\cdot OK = \frac{1}{2}\cdot OH\cdot BK.$$

Следовательно, $OH = \dfrac{BO\cdot OK}{BK} = \dfrac{2\sqrt{2}\cdot 4}{2\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: б) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

15 Решите неравенство $\sqrt{1-\log_2 x}\cdot\frac{(x-3)(x+5)}{x+1}\geqslant 0$.

Решение.

Выражение, стоящее в левой части неравенства, принимает неотрицательные значения в двух случаях.

Во-первых, $\frac{(x-3)(x+5)}{x+1}\geqslant 0$ и при этом $1-\log_2 x\geqslant 0$.

В этом случае нет решений.

Во-вторых, $1-\log_2 x=0$ и при этом $x+1\neq 0$.

В этом случае $x=2$.

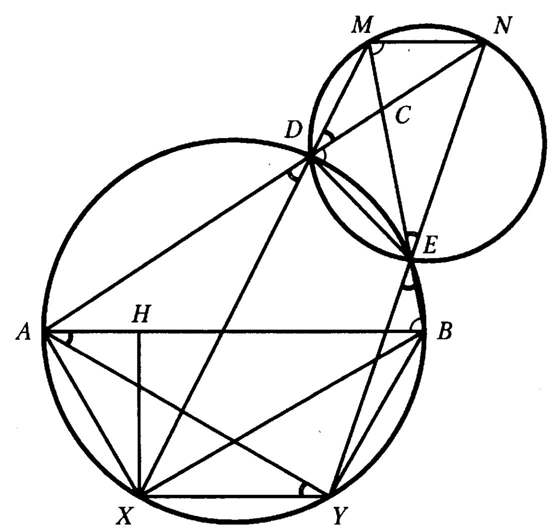
Ответ: $x=2$.

16 Первая окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Вторая окружность проходит через точки D и E и пересекает продолжения сторон BC и AC за вершину C в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB.

б) Прямые MD и NE вторично пересекают первую окружность в точках X и Y соответственно. Найдите её радиус, если $AX=XY=2$, а $AB=4$.

Решение.



а) Вписанные во вторую окружность углы EDN и EMN опираются на одну и ту же дугу, поэтому они равны. Четырёхугольник $ABED$ вписанный, поэтому

$$\angle ABE=180^\circ-\angle ADE=\angle EDN=\angle EMN.$$

Следовательно, MN параллельна прямой AB.

б) Вписанные во вторую окружность углы MDN и MEN опираются на одну и ту же дугу, поэтому они равны. Значит, $\angle XDA=\angle MDN=\angle MEN=\angle BEY$.

Вписанные в первую окружность равные углы XDA и BEY опираются на равные хорды, поэтому $BY=AX=XY=2$, а так как $\angle BAY=\angle AYX$, то $AXYB$ — равнобедренная трапеция с основаниями $AB=4$ и $XY=2$.

Пусть R — радиус первой окружности, XH — высота трапеции $AXYB$. Тогда

$$AH=\frac{AB-XY}{2}=\frac{4-2}{2}=1,\quad BH=4-1=3.$$

Из прямоугольных треугольников AXH и BXH находим, что

$$XH = \sqrt{3},$$
$$\angle XAB = \angle XAH = 60°,$$
$$BX = \sqrt{BH^2 + XH^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}.$$

Окружность искомого радиуса R описана около треугольника ABX, следовательно, по теореме синусов

$$R = \frac{BX}{2\sin\angle XAB} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2.$$

Ответ: б) 2.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

Решение.

По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$5;\ 3{,}75;\ 2{,}5;\ 1{,}25;\ 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 20%. Значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$6;\ 4{,}5;\ 3;\ 1{,}5.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$2{,}25;\ 2;\ 1{,}75;\ 1{,}5.$$

Всего следует выплатить: $2{,}25 + 2 + 1{,}75 + 1{,}5 = \frac{4\cdot 3{,}75}{2} = 7{,}5$ млн рублей.

Ответ: 7,5 млн руб.

18 Найдите все значения $0 \leqslant a \leqslant 2\pi$, при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 a + \cos^8 \frac{a}{2} + 5^{x^4} = \cos^2 \frac{\pi x}{2}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Если некоторое число x — решение уравнения, то и $(-x)$ — тоже решение.
Следовательно, единственным решением данного уравнения может быть только $x = 0$.
При $x = 0$ получаем

$$\sin^2 a + \cos^8 \frac{a}{2} + 1 = 1; \quad \sin^2 a + \cos^8 \frac{a}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin a = 0, \\ \cos \frac{a}{2} = 0. \end{cases}$$

На отрезке $[0; 2\pi]$ есть только одно решение этой системы: $a = \pi$.

При подстановке $a = \pi$ в данное уравнение получаем уравнение $5^{x^4} = \cos^2 \frac{\pi x}{2}$, которое имеет единственное решение $x = 0$.

Ответ: $a = \pi$.

19 а) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 14 раз больше суммы цифр этого числа?

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 210 раз больше сумм цифр этого числа?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 70 раз больше суммы цифр этого числа.

Решение.

а) Произведение цифр числа 1677 равно 294, а сумма цифр равна 21, то есть в 14 раз меньше.

б) Предположим, что такое число $n = \overline{abcd}$ существует. Оценим, во сколько раз произведение его цифр может быть больше суммы его цифр. Поскольку $a \leqslant 9$, $b \leqslant 9$, $c \leqslant 9$ и $d \leqslant 9$, то $a \cdot b \cdot c \cdot d \leqslant a \cdot 9^3$. Аналогично,

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \leqslant b \cdot 9^3,$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \leqslant c \cdot 9^3$$

$$\text{и } a \cdot b \cdot c \cdot d \leqslant d \cdot 9^3.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d \leqslant 9^3(a + b + c + d),$$

или

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \leqslant \frac{9^3}{4}(a + b + c + d).$$

Так как $210 > \frac{9^3}{4} = 182{,}25$, то такого числа не существует.

в) Предположим, что такое число $n = \overline{abcd}$ существует. Заметим, что среди этих цифр не может быть нулей. Имеем $a \cdot b \cdot c \cdot d = 70(a + b + c + d)$. Правая часть этого равенства делится на 35, поэтому среди цифр найдутся цифры 5 и 7. Будем считать, что $c = 5$ и $d = 7$. Тогда $a \cdot b = 2(a + b + 12)$. Так как правая часть последнего равенства чётна, a или b чётны. Будем считать, что чётно b.

Если $b = 2$, то $a = a + 14$, что невозможно.

Если $b = 4$, то $2a = a + 16$; $a = 16$, что невозможно.

Если $b = 6$, то $3a = a + 18$; $a = 9$. Число 9657 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр, удовлетворяют условию задачи.

Если $b = 8$, то $4a = a + 20$; $a = \frac{20}{3}$, что невозможно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 9657 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 24 числа).

13 а) Решите уравнение $\left(\sin\left(4x-\frac{5\pi}{2}\right)+2\cos^3 4x\right)\sqrt{\operatorname{tg}4x}=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

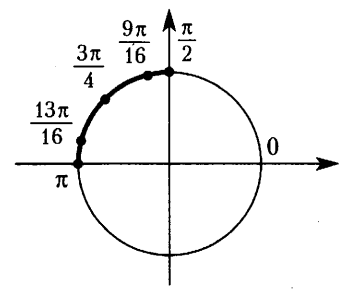
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$(2\cos^3 4x-\cos 4x)\sqrt{\operatorname{tg}4x}=0;\quad \cos 4x\cdot(2\cos^2 4x-1)\sqrt{\operatorname{tg}4x}=0.$

Значит, $\sin 4x=0$ или $\begin{cases}\cos 4x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \operatorname{tg}4x\geqslant 0,\end{cases}$ откуда $4x=\pi n$ или $4x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Следовательно, $x=\frac{\pi}{4}n$ или $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.



Получим числа $\frac{\pi}{2};\ \frac{9\pi}{16};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{13\pi}{16};\ \pi$.

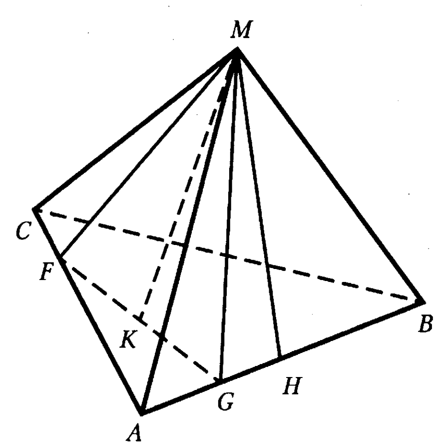
Ответ: а) $\frac{\pi}{4}n,\ \frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2},\ \frac{9\pi}{16},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{13\pi}{16},\ \pi$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки G и F делят стороны основания AB и AC соответственно так, что $AG:GB=CF:FA=1:5$.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MGF является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MGF.

Решение.



а) Искомым сечением является треугольник FMG. Из условия следует, что $AF=GF=2$. Треугольники AMG и CMF равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $MG=MF$.

б) Проведем высоту MH боковой грани AMB. Из прямоугольного треугольника AHM находим:

$$MH=\sqrt{AM^2-AH^2}=8.$$

В прямоугольном треугольнике MHG катет HG равен 4. Поэтому

$$MG=\sqrt{MH^2+HG^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}.$$

Из треугольника AGF по теореме косинусов находим:

$$GF=\sqrt{AG^2+AF^2-2\cdot AG\cdot AF\cdot\cos A}=\sqrt{4+100-2\cdot2\cdot10\cdot\frac{1}{2}}=2\sqrt{21}.$$

В равнобедренном треугольнике GMF проведем высоту MK. Она делит отрезок GF пополам. Из прямоугольного треугольника MKG получаем:

$$MK=\sqrt{MG^2-GK^2}=\sqrt{80-21}=\sqrt{59}.$$

Следовательно, площадь треугольника GMF равна

$$\frac{1}{2}\cdot GF\cdot MK = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{21}\cdot\sqrt{59} = \sqrt{1239}.$$

Ответ: б) $\sqrt{1239}$.

15 Решите неравенство $\log_4\frac{3-x}{x-7}+\log_{0,25}(x-3)\geqslant\log_{\frac{1}{4}}\left((x-7)^2\right)$.

Решение.

Преобразуем неравенство

$$\log_4\frac{3-x}{x-7}+\log_{0,25}(x-3)\geqslant\log_{\frac{1}{4}}\left((x-7)^2\right);$$

$$\log_4(x-3)-\log_4(7-x)-\log_4(x-3)\geqslant-\log_4\left((x-7)^2\right);$$

$$\begin{cases}\log_4\left((x-7)^2\right)\geqslant\log_4(7-x),\\ x>3;\end{cases}\quad\begin{cases}(x-7)^2-(7-x)\geqslant 0,\\ x>3,\\ x<7;\end{cases}\quad\begin{cases}(7-x)(6-x)\geqslant 0,\\ x>3,\\ x<7;\end{cases}$$

$$\begin{cases}6-x\geqslant 0,\\ x>3,\\ x<7;\end{cases}\qquad 3<x\leqslant 6.$$

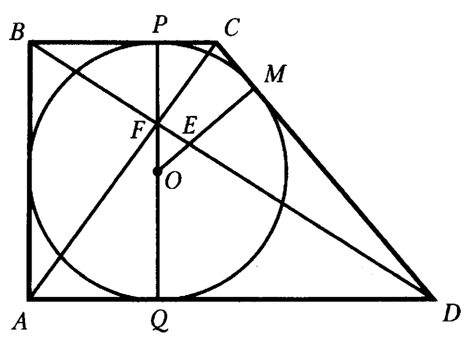
Ответ: $(3;\,6]$.

16 В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A вписана окружность, касающаяся оснований BC и AD в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что диагонали трапеции делят отрезок PQ в одном и том же отношении.

б) Найдите большее основание трапеции AD, если меньшее основание $BC=6$, и прямая PQ делит площадь трапеции в отношении $5:4$, то есть $S_{ABPQ}:S_{DCPQ}=5:4$.

Решение.



а) Пусть O — центр окружности, R — радиус, M — точка касания с большей боковой стороной CD. Поскольку прямая OP перпендикулярна прямой BC и прямая OQ перпендикулярна прямой AD, отрезок PQ проходит через точку O. Пусть $CP = x$ $(x < R)$.

Поскольку CO и DO — биссектрисы углов BCD и ADC, сумма которых равна $180°$, треугольник COD прямоугольный, а OM — его высота, проведённая из вершины прямого угла. Тогда

$$DQ = DM = \frac{OM^2}{CM} = \frac{R^2}{x}.$$

Пусть E — точка пересечения PQ с диагональю AC. Из подобия треугольников CEP и AEQ получаем, $\frac{PE}{EQ}=\frac{CP}{AQ}=\frac{x}{R}$.

Пусть F — точка пересечения PQ с диагональю BD. Из подобия треугольников BFP и DFQ получаем, $\frac{PF}{FQ} = \frac{BP}{DQ} = \frac{x}{R}$.

Следовательно, $\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FQ}$.

б) Заметим, что

$$S_{ABPQ} = AB \cdot BP = 2R^2, \quad S_{DCPQ} = \frac{CP + DQ}{2} \cdot PQ = \frac{x + \frac{R^2}{x}}{2} \cdot 2R = R\left(x + \frac{R^2}{x}\right).$$

Из условия следует, что

$$R\left(x + \frac{R^2}{x}\right) = \frac{5}{4} \cdot 2R^2; \quad x + \frac{R^2}{x} = \frac{5}{2}R; \quad 2x^2 - 5Rx + 2R^2 = 0.$$

Учитывая, что $x < R$, из этого уравнения находим, что $x = \frac{R}{2}$. Значит,

$$BC = R + x = 1{,}5R; \quad AD = R + \frac{R^2}{x} = 3R.$$

Следовательно, $AD = 2BC = 2 \cdot 6 = 12$.

Ответ: 12.

17 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 800 тыс. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что сумма выплат составит 880 тыс. руб.?

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n месяцев. Составим график погашения задолженности.

I	II	III	IV	V
Номер платежа	Сумма основного долга, тыс. руб.	Начисленные проценты, тыс. руб.	Погашение основного долга, тыс. руб.	Ежемесячный платёж, тыс. руб. (V = III + IV)
1	800	$0{,}02 \cdot 800 = 16$	$\frac{1}{n} \cdot 800$	$\frac{1}{n} \cdot 800 + 16$
2	$\frac{n-1}{n} \cdot 800$	$\frac{n-1}{n} \cdot 16$	$\frac{1}{n} \cdot 800$	$\frac{1}{n} \cdot 800 + 16 \cdot \frac{n-1}{n}$
...	...	...	...	...
n	$\frac{1}{n} \cdot 800$	$\frac{1}{n} \cdot 16$	$\frac{1}{n} \cdot 800$	$\frac{1}{n} \cdot 800 + 16 \cdot \frac{1}{n}$
ИТОГО:		$16 \cdot \left(\frac{n + ... + 1}{n}\right) = 8 \cdot (n+1)$	800	$800 + 8 \cdot (n+1)$

В последней строке используется формула суммы арифметической прогрессии.

По условию, $800 + 8(n+1) = 880$, откуда $n = 9$.

Ответ: 9.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение
$$(x^2 + ax + a)^2 = 2x^4 + 2a^2(x+1)^2$$
имеет единственный корень на интервале $(-1;\ 1)$.

Решение.

Алгебраическими преобразованиями уравнение приводится к виду
$$x^2 - ax - a = 0.$$

Это уравнение на интервале $(-1;\ 1)$ имеет единственный корень в одном из двух случаев.

1. Дискриминант уравнения равен 0, и единственный корень $x = \frac{a}{2}$ лежит на интервале $(-1;\ 1)$.

2. Функция $f(x) = x^2 - ax - a$ принимает в точках $x = -1$ и $x = 1$ значения противоположных знаков.

Рассмотрим первый случай. Получаем: $\begin{cases} a^2 + 4a = 0, \\ -1 < \frac{a}{2} < 1, \end{cases}$ откуда $a = 0$.

Рассмотрим второй случай.
$f(-1)f(1) = 1\cdot(1 - 2a) < 0$, откуда $a > 0{,}5$.

Ответ: $a = 0$, $a > 0{,}5$.

19 На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Оказалось, что каждое следующее число (кроме первого) или на 3 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

а) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 8, а десятое равно 18?

б) Могло ли так оказаться, что первое из этих чисел равно 17, а девятое равно 8?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 1000, а последнее число равно 7?

Решение.

а) Из условия задачи следует, что если некоторое число на доске не делится на 3, то и следующее за ним число также не делится на 3. Значит, если первое число рано 8, то все числа на доске не делятся на 3. Поэтому десятое число на доске не может делиться на 3.

б) Пример чисел 17, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 5, 8 показывает, что такое возможно.

в) Пусть на доске написано минимальное количество чисел, удовлетворяющих условию задачи. Пусть также при последовательных переходах от предыдущего к следующему уменьшение в 2 раза произошло m раз, а увеличение на 3 — n раз. По рассуждениям из решения пункта а каждое из написанных на доске чисел не делится на 3. Заметим, что если число делилось на 2, но не делилось на 3, то при делении его на 2 получается число с другим остатком при делении на 3. Поскольку 1000 и 7 имеют одинаковые остатки при делении на 3, получаем, что число m чётно.

Если $m \leqslant 6$, то последнее число больше, чем $\frac{1000}{2^6} = 15{,}625 > 7$. Значит, $m \geqslant 8$.

Пусть сначала $m \geqslant 10$. Тогда последнее число меньше, чем $\frac{1000}{2^{10}} + 3n > 3n + 1$. Значит, в этом случае $n \geqslant 3$ и количество написанных чисел не меньше 14.

Пусть теперь $m = 8$. Тогда найдутся такие целые неотрицательные числа $k_1, k_2, \dots k_n$, не большие 8, что $7 = \frac{1000}{2^8} + \frac{3}{2^{k_1}} + \frac{3}{2^{k_2}} + \dots + \frac{3}{2^{k_n}}$. Отсюда получаем, что $\frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_2}} + \dots + \frac{1}{2^{k_n}} = \frac{33}{2^5}$. Число $\frac{33}{2^5}$ не может иметь вид $\frac{1}{2^{k_1}}$. Значит, в этом случае $n \geqslant 2$ и количество написанных чисел не меньше 11.

Пример чисел 1000, 500, 250, 125, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 7 показывает, что на доске могло быть написано ровно 11 чисел.

Ответы: а) Нет. б) Да, например, 17, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 5, 8. в) 11.

СОДЕРЖАНИЕ