Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	200
2	6
3	0,5
4	0,2
5	3
6	63,5
7	44
8	108
9	-4
10	100
11	6
12	-2910
13	а) $0;\ -\log_2 19$ б) $-\log_2 19$
14	210
15	$(-\infty; 1] \cup (\log_3 5\,; 2)$
16	$3\sqrt{2} - 4$
17	20
18	$(-\infty; -7] \cup \{11\} \cup (15; +\infty)$
19	а) да, 25×1, 5×37 б) нет в) 18,5

©НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.RU.COM

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение $19 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-5; -4]$

Источники:

Яценко 2020 (36 вар)
Яценко 2020 (36 вар)
Яценко 2019 (50 вар)
Яценко 2018 (36 вар)
Яценко 2018 (36 вар)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

а) $19 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 2^2 + 1 = 0$

$19 \cdot 4^x - 20 \cdot 2^x + 1 = 0$

Пусть $2^x = t$

$19t^2 - 20t + 1 = 0$

$D = 324 = 18^2$

$t_1 = \frac{20+18}{38} = 1$ $\quad t_2 = \frac{20-18}{38} = \frac{1}{19}$

$2^x = 1$ $\quad 2^x = \frac{1}{19}$

$x = 0$ $\quad x = \log_2 \frac{1}{19}$

$x = \log_2 (19)^{-1}$

$x = -\log_2 19$

б) $0 \notin [-5; -4]$

$2^3 = 8$

Сравним $-\log_2 19$ с границами

$-5 \quad -\log_2 19 \quad -4$

$-\log_2 32 < -\log_2 19 < -\log_2 16$

$\Rightarrow -\log_2 19 \in [-5; -4]$

Ответ: а) $0; -\log_2 19$

б) $-\log_2 19$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

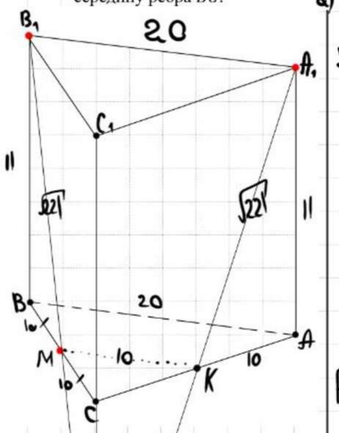
ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 200914

©НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.RU.COM

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 20, боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через A_1, B_1 и середину ребра BC, является трапецией.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A_1, B_1 и середину ребра BC.



а) A_1B_1MK – сечение

$MK \parallel A_1B_1$ (т.к. сечение пересекает параллельные грани по парал. прямым)

$A_1K \nparallel B_1M$

$\Rightarrow A_1B_1MK$ – трапеция ■

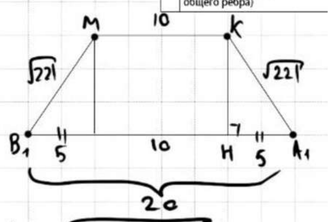
б) $MK \parallel AB$

M – середина

$\Rightarrow MK$ – ср. линия $\triangle ABC$

$\Rightarrow MK = 10$

Рассмотрим трапецию A_1B_1MK.



$KH = \sqrt{221 - 25} = 14$

$S_{тр} = \frac{20+10}{2} \cdot 14 = 210$

Ответ: 210

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Источники:

Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (30 вар)

ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ

1	Проводим прямые через две точки, лежащие в одной плоскости
2	Плоскость сечения пересекает параллельные грани по параллельным прямым
3	Метод следов (если в некоторой грани известна одна точка сечения, а в соседней грани – отрезок, то продлеваем общее ребро, а затем продлеваем отрезок до пересечения с продолжением общего ребра)

15 Решите неравенство $\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \le 3^x + 5.$

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$a^{\log_a b} = b$

$3^{\log_3 5} = 5$ 9F7BD6

Пусть $3^x = t$ $\quad t > 0$

$\frac{t^2 - 6 \cdot t + 4}{t - 5} + \frac{6 \cdot t - 51}{t - 9} \le t + 5$

Упростим $t^2 - 6t + 5 = (t-5) \cdot (t-1)$

Получаем:

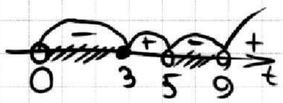
$\frac{t^2 - 6t + 5}{t - 5} - \frac{1}{t - 5} + \frac{6t - 54}{t - 9} + \frac{3}{t - 9} \le t + 5$

$t - \frac{1}{t-5} + 6 + \frac{3}{t-9} \le t + 5$

$\frac{3}{t-9} - \frac{1}{t-5} \le 0$

$\frac{3t - 15 - t + 9}{(t-5)(t-9)} \le 0$

$\frac{2t - 6}{(t-5)(t-9)} \le 0$



$\begin{cases} 0 < t \le 3 \\ 5 < t < 9 \end{cases}$

$0 < 3^x \le 3^1$

$x \le 1$

$5 < 3^x < 3^2$

$3^{\log_3 5} < 3^x < 3^2$

$\log_3 5 < x < 2$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (\log_3 5; 2)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

Источники:

FIPI
osfipi
Демо 2018
Демо 2017
Основная волна 2016

$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 2009 14

©НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.RU.COM

16 В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине B проведена биссектриса AK. В треугольник ABC вписан прямоугольник $KLMN$ так, что сторона MN лежит на отрезке AC, а вершина L — на отрезке AB.

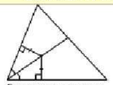
а) Докажите, что $MN = \sqrt{2}KN$.

б) Найдите площадь прямоугольника $KLMN$, если $AB = 1$.

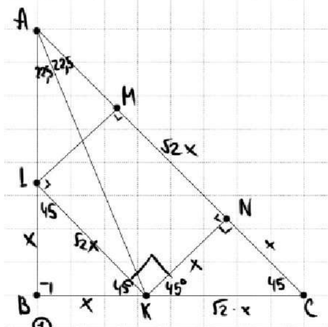
Источники:

Горащ #16 2019
Досрочная волна (Резерв) 2014

СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ



Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла



а) Пусть $KN = x$, тогда $BK = x$ (по св-ву биссектрисы)

б) $AB = BC = 1 = x + \sqrt{2}x$

$1 = x \cdot (1 + \sqrt{2})$

$x = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

$S_{KLMN} = x \cdot \sqrt{2} \cdot x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2}-4}{1}$

$\angle BKL = 180 - 45 - 90 = 45$

$\angle BLK = 180 - 90 - 45 = 45$

$\Rightarrow BL = x$

$LK = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2} \cdot x$

$MN = \sqrt{2}x$

$\Rightarrow MN = \sqrt{2} \cdot KN$

Ответ: $3\sqrt{2} - 4$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

Источники:

Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Основная волна 2017

Пусть S – сумма долга 1 марта – день платежа

$x_1 = 2\,592\,000$

$x_2 = 4\,392\,000$

$\left(1 + \frac{a}{100}\right) = b$

Сумма долга при 4 платежах	Дата	Сумма долга при 2 платежах
S	31 дек 2014	S
Sb	31 дек 2015	Sb
$Sb - x_1$	1 мар 16	$Sb - x_2$
$Sb^2 - bx_1$	31 дек 16	$Sb^2 - bx_2$
$Sb^2 - bx_1 - x_1$	1 мар 17	$Sb^2 - bx_2 - x_2 = 0$
$Sb^3 - b^2x_1 - bx_1$	31 дек 17	
$Sb^3 - b^2x_1 - bx_1 - x_1$	1 мар 18	
$Sb^4 - b^3x_1 - b^2x_1 - bx_1$	31 дек 18	
$Sb^4 - b^3x_1 - b^2x_1 - bx_1 - x_1 = 0$	1 мар 19	

$\begin{cases} Sb^4 - b^3x_1 - b^2x_1 - bx_1 - x_1 = 0 \\ Sb^2 - bx_2 - x_2 = 0 \end{cases}$

Вычтем $Sb^2 = bx_2 + x_2$

$(bx_2 + x_2) \cdot b^2 - b^3x_1 - b^2x_1 - bx_1 - x_1 = 0$

$b^3x_2 + b^2x_2 - b^3x_1 - b^2x_1 - bx_1 - x_1 = 0$

$b^2x_2(b+1) - b^2x_1(b+1) - x_1(b+1) = 0$

$(b+1)(b^2x_2 - b^2x_1 - x_1) = 0$

$b = -1$ ∅

$b^2x_2 - b^2x_1 - x_1 = 0$

$b^2(x_2 - x_1) - x_1 = 0$

$b^2(x_2 - x_1) = x_1$

$b^2 = \frac{x_1}{x_2 - x_1}$

$b^2 = \frac{2\,592\,000}{1\,800\,000} = \frac{72}{50} = \frac{36}{25}$

$b = \frac{6}{5} = 1 + \frac{a}{100}$

$1{,}2 = 1 + \frac{a}{100}$

$a = 20$

Ответ: 20%

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

©НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.RU.COM

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 4x^2 - ax + 6 = 0 \quad | :x$$

имеет единственный корень на отрезке $[-2; 2]$.

Источники:
СтатГрад 2017
СтатГрад 2019

Заметим, что $x=0$ не является реш. ур-я

$x^2 + 4x - a + \frac{6}{x} = 0$

$a = x^2 + 4x + \frac{6}{x}$

Рассмотрим $f(x) = x^2 + 4x + \frac{6}{x}$

x	-2	-1	-0,5	0,5	1	2
a	-7	-9	-13,75	14,25	11	15

$f'(x) = 2x + 4 - \frac{6}{x^2} = 0$

$\frac{2x^3 + 4x^2 - 6}{x^2} = 0$

$\frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2} = 0$

$\frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x = 1$ – точка экстремума

$f'(x)$: $-$ при $x<1$, $+$ при $x>1$; $f(x)$ убывает на $[-2;1]$, возрастает на $[1;2]$, min при $x=1$

$(\frac{6}{x})' = (6 \cdot \frac{1}{x})' = (6 \cdot x^{-1}) = 6(-x^{-2})$

$-x^3 + 2x^2 - 3 \;|\; x^2 + 3x + 3$

$-x^3 - x^2$

$-3x^2 - 3$

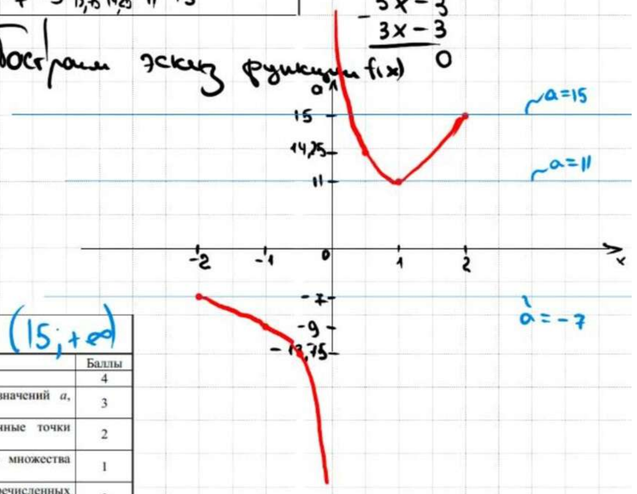
$-3x^2 - 3x$

$-3x - 3$

$-3x - 3$

0

Построим эскиз функции $f(x)$



Ответ: $(-\infty; -7] \cup \{11\} \cup (15; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

24C2D5

Источники:
FIPI
os8ipi
Основная волна 2015
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018

а) Ср. ар. чисел $= \frac{\text{сумма чисел}}{30} = 7$

$\Rightarrow$ Сумма чисел $= 210$

Могло ли быть 30 единиц?

$29 \cdot 1 + ? = 210$ ✗

29 единиц?

$28 \cdot 1 + ? + ? = 210$ ✗

28 единиц?

$27 \cdot 1 + ? + ? + ? = 210$ ✗

27 единиц?

Могло ли быть 26 единиц?

$26 \cdot 1 + ? + ? + ? + ? = 210$ ✗

25 единиц?

$25 \cdot 1 + ? + ? + ? + ? + ? = 210$

Да, например

25 единиц, 5 37-рок

Было: $\frac{25 \cdot 1 + 5 \cdot 37}{30} = 7$

Стало: $\frac{5 \cdot 18,5}{5} = 18,5$

б) x – кол-во единиц, S – первоначальная сумма всех чисел кроме единиц

Тогда $\frac{S}{2}$ – сумма чисел без единиц

$C_{ар} = \frac{\frac{S}{2}}{30-x} = \frac{210-x}{60-x}$

$C_{ар} = \frac{x \cdot 1 + S}{30} = 7$

$x + S = 210$

$S = 210 - x$

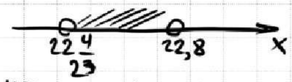
$12 < \frac{210-x}{60-2x} < 13 \quad | \cdot (60-2x)$

$720 - 24x < 210 - x < 780 - 26x$

$\begin{cases} 720 - 24x < 210 - x \\ 210 - x < 780 - 26x \end{cases}$

$\begin{cases} 23x > 510 \\ 25x < 570 \end{cases}$

$\begin{cases} x > \frac{510}{23} \\ x < \frac{570}{25} \end{cases}$



нет целых x

$\Rightarrow$ не можно

в) Чем больше x $\Rightarrow$ тем больше ср. ар.

$x_{max} = 25$

$\Rightarrow C_{ар.max} = 18,5$ (см. п. а)

Ответ:
а) Да, пример привели
б) Нет
в) 18,5

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

$C_{ар.} = \frac{210-x}{60-2x} = \frac{30-x}{60-2x} + \frac{180}{60-2x}$

$= \frac{1}{2} + \frac{180}{60-2x}$

$= \frac{1}{2} + \frac{90}{30-x}$

$\frac{1}{2} + \frac{90}{5} = 18,5$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 200914

©НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.RU.COM

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <…> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1) расхождение в баллах, выставленных двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только ответ на то задание, который был оценен двумя экспертами со столь существенным расхождением;

2) расхождения экспертов при оценивании ответов на хотя бы два из заданий 13–19. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 2300914

©НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.RU.COM