Ответы и решения для варианта 34073003

1)Численность детей в городе N составляет 200 000 · 0,15 = 30 000. Численность взрослого населения 200 000 − 30 000 = 170 000 человек. Из них не работает 170 000 · 0,45 = 76 500 человек. Значит, работает 170 000 − 76 500 = 93 500 человек. Ответ: 93 500.

2)Из графика видно, что наименьшая среднемесячная температура в период с пятого по двенадцатый месяц (с мая по декабрь) была в ноябре и составляла 6 °C (см. рисунок). Ответ: 6.

3)

Площадь четырехугольника (в том числе невыпуклого) равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними. Диагонали изображенного на рисунке четырехугольника являются взаимно перпендикулярными диагоналями квадратов со стороной 1. Поэтому длины диагоналей равны $\sqrt{2}$, а синус угла между ними равен 1. Тем самым, площадь четырехугольника равна 1.

Ответ: 1.

100-БАЛЛОВ
Делаем невозможное возможным

4)Пусть один из друзей находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 12 человек из 25 оставшихся одноклассников. Вероятность того, что второй друг окажется среди этих 12 человек, равна 12 : 25 = 0,48. Ответ: 0,48.

5)

Используя формулу $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, получаем:

$$2^{\log_8(5x-3)} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} (5x-3)^{\log_8 2} = 4, \\ 5x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow (5x-3)^{\frac{1}{3}} = 4 \Leftrightarrow 5x-3=64 \Leftrightarrow x=13,4.$$

Ответ: 13,4.

НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.COM

6)

Заметим, что сторона ромба равна 50. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам. Пусть $OB = 3x$, тогда $AO = 4x$. По теореме Пифагора $AO^2 + OB^2 = AB^2$, поэтому $25x^2 = 2500$, откуда $x = 10$. Тогда для высоты треугольника AOB имеем $h = \frac{AO \cdot OB}{AB} = \frac{4x \cdot 3x}{5x} = \frac{12x}{5} = \frac{12 \cdot 10}{5} = 24$.

Следовательно, высота ромба равна $2h = 48$.

Ответ: 48.

7)

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 6x - 3 = 3, \\ 3x^2 - 3x + c = 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 3x^2 - 6x + c - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ c = 7. \end{cases}$$

Ответ: 7.

8)

Площадь поверхности куба выражается через его ребро a формулой $S = 6a^2$, поэтому при увеличении длины ребра на 1 площадь увеличится на

$$S - S_0 = 6(a+1)^2 - 6a^2 = 12a + 6 = 54.$$

Отсюда находим, что ребро куба равно

$$a = \frac{54 - 6}{12} = 4.$$

Ответ: 4.

100balnik.com
100 БАЛЛОВ
Делаем невозможное возможным

9)

Подставляя аргументы в формулу, задающую функцию, получаем:

$$p(x-7)+p(13-x)=2(x-7)+1+2(13-x)+1=14.$$

Ответ: 14.

10)

Пусть p_1 и V_1 – начальные, а p_2 и V_2 – конечные значения давления и объема газа, соответственно. Условие $pV^a = const$ означает, что $p_1V_1^a = p_2V_2^a$, откуда $\frac{p_2}{p_1}=\frac{V_1^a}{V_2^a}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a$. Задача сводится к решению неравенства $\frac{p_2}{p_1}\geq 4$, причем по условию $\frac{V_1}{V_2}=2$:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^a \geq 4 \Leftrightarrow 2^a \geq 4 \Leftrightarrow a \geq 2.$$

100balnik.com
100-БАЛЛОВ
Делаем невозможное возможным

Ответ: 2.

11)

Примем расстояние между городами 1. Пусть время движения велосипедиста равно x ч, тогда время движения мотоциклиста равно $x-3$ ч, $x>3$. К моменту встречи они находились в пути 48 минут и в сумме преодолели всё расстояние между городами, поэтому

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}\right)\cdot\frac{48}{60}=1 \underset{x>3}{\Leftrightarrow} 4(2x-3)=5(x^2-3x) \Leftrightarrow 5x^2-23x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4; \\ x=\frac{3}{5} \end{array}\right. \underset{x>3}{\Leftrightarrow} x=4.$$

Таким образом, велосипедист находился в пути 4 часа.

Ответ: 4

НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.COM

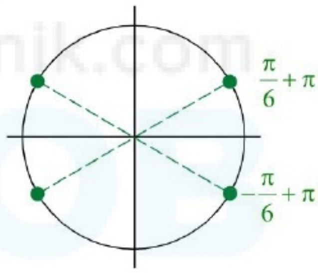
12)

Поскольку функция $y=2^x$ возрастающая, заданная функция достигает наименьшего значения в той же точке, в которой достигает наименьшего значения выражение x^2+2x+5. Квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке $x=-\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке -1. Значение функции в этой точке равно $y=2^{(-1)^2+2(-1)+5}=16$.

Ответ: 16.

13)

Аргумент $2x$



а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. Из неё следует, что $\sin^4 x=\frac{1}{4}(\cos^2 2x-2\cos 2x+1)$. Поэтому из исходного уравнения получаем:

$$4\cos^2 2x-8\cos 2x+4+8\cos 2x-7=0 \Leftrightarrow 4\cos^2 2x=3 \Leftrightarrow \cos 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

100balnik.com
100 БАЛЛОВ
Делаем невозможное возможным

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.

Получим $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; $\frac{23\pi}{12}$.

Ответ: а) $\left\{\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; $\frac{23\pi}{12}$.

НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.COM

14)

а) Пусть прямая AK пересекает прямую PH в точке M. Так как $PC \perp \alpha$ и $AK \subset \alpha$, то $PC \perp AK$. Поскольку $AC = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2} = AP$, то AK — высота и медиана правильного треугольника PAC. Следовательно, M — точка пересечения медиан этого треугольника, откуда и получаем $PM : MH = 2 : 1$.

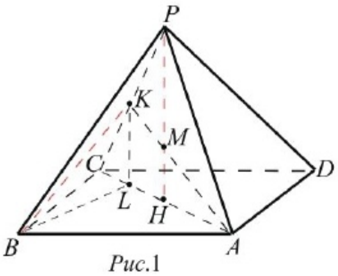


*Рис.*1

б) Пусть точка L — проекция точки K на плоскость ABC. Так как $KL \parallel PH$ и $PK = KC$, то $L \in AC$ и L — середина CH. Отрезок BL — проекция отрезка BK на плоскость ABC. Поскольку $(ABC) \perp PH$, точка H — проекция прямой PH на плоскость ABC. Значит, расстояние между прямыми PH и BK равно расстоянию от точки H до прямой BL, то есть высоте h треугольника BHL проведенной из вершины H.

Далее имеем:

$$BH = \frac{BD}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}, \quad LH = \frac{AC}{4} = \frac{12\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2}, \quad BL = \sqrt{BH^2 + LH^2} = 3\sqrt{10},$$

$$h = \frac{2S_{\Delta BHL}}{BL} = \frac{BH \cdot LH}{BL} = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: б) $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$.

100balnik.com

100-БАЛЛОВ

Делаем невозможное возможным

15)

Перепишем неравенство в виде $\left(25^x + \dfrac{1}{25^x}\right) + 5\left(5^x + \dfrac{1}{5^x}\right) \le 12$ и положим $5^x + \dfrac{1}{5^x} = t$.

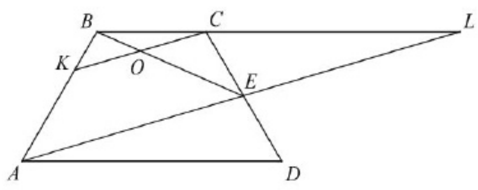
Тогда $25^x + \dfrac{1}{25^x} + 2 = t^2$ и, значит, $25^x + \dfrac{1}{25^x} = t^2 - 2$.

Далее имеем: $t^2 + 5t - 14 \le 0 \Leftrightarrow -7 \le t \le 2$, откуда $-7 \le 5^x + \dfrac{1}{5^x} \le 2 \Leftrightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

16)

а) Пусть $BC \cap AE = L$, тогда треугольники AED и LEC равны, так как $DE = CE$, $\angle AED = \angle LEC$, $\angle ADE = \angle LCE$. Следовательно, BE — медиана ABL. Далее, $\Delta ABE \sim \Delta KBO$, $k = \dfrac{BE}{BO}$, и $\Delta LBE \sim \Delta CBO$ с тем же коэффициентом подобия $k = \dfrac{BE}{BO}$. Тогда



$$KO = AE \cdot \frac{BO}{BE} = LE \cdot \frac{BO}{BE} = CO.$$

б) Поскольку $\Delta AED = \Delta LEC$, $S_{\text{трап.}ABCD} = S_{ABL}$. Далее, $\Delta KBC \sim \Delta ABL$. Значит, $\dfrac{S_{KBC}}{S_{ABL}} = k^2$, то есть $k = \dfrac{3}{10}$. Тогда

$$\frac{BC}{BL} = \frac{3}{10}, \quad \frac{BC}{BC + CL} = \frac{3}{10}, \quad \frac{BC}{CL} = \frac{3}{7}, \quad \frac{BC}{AD} = \frac{3}{7}.$$

Ответ: 3 : 7.

17)

Обозначим буквой t время, прошедшее с начального момента времени. Поскольку каждый велосипедист движется по взаимно перпендикулярным дорогам, то расстояние между ними может быть вычислено по теореме Пифагора. Рассмотрим $f(t)$ — квадрат длины в каждый момент времени, тогда:

$$f(t)=(5-40t)^2+(3-30t)^2=$$
$$=25-400t+1600t^2+9-180t+900t^2=2500t^2-580t+34.$$

Итак, $f(t)=2500t^2-580t+34,\ t\geq 0$. У данной квадратичной функции есть наименьшее значение, которое достигается при $t_0=\dfrac{580}{2\cdot 2500}=\dfrac{29}{250}$ ч. $=\dfrac{29}{250}\cdot 60$ мин $=6\dfrac{24}{25}$ мин. Найдем его:

$$f\left(\frac{29}{250}\right)=\left(5-40\cdot\frac{29}{250}\right)^2+\left(3-30\cdot\frac{29}{250}\right)^2=$$
$$=\left(5-\frac{116}{25}\right)^2+\left(3-\frac{87}{25}\right)^2=\left(\frac{9}{25}\right)^2+\left(-\frac{12}{25}\right)^2=\left(\frac{15}{25}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Таким образом минимальное расстояние между велосипедистами равно $\sqrt{f\left(\dfrac{29}{250}\right)}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$ км, и будет достигнуто через $6\dfrac{24}{25}$ мин.

Ответ: $6\dfrac{24}{25}$ мин, $\dfrac{3}{5}$ км.

100balnik.com
100-БАЛЛОВ
Делаем невозможное возможным

18)

Заменим первое уравнение разностью, а второе — суммой исходных уравнений:

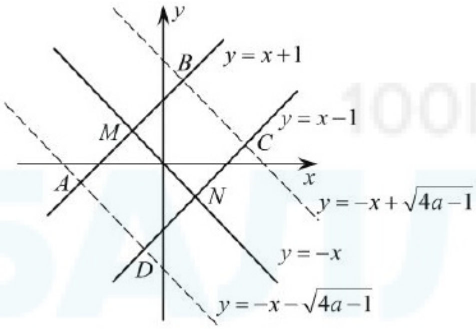
$$\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ 2xy=2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1, & (1) \\ (x+y)^2=4a-1. & (2) \end{cases}$$

При $a<\frac{1}{4}$ второе уравнение системы, а, значит, и вся система решений не имеет. При $a\geq\frac{1}{4}$ получаем:

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=x-1, \\ y=x+1. \end{array}\right.$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=-x-\sqrt{4a-1}, \\ y=-x+\sqrt{4a-1}. \end{array}\right.$$

Ясно (см. рисунок), что при $a>\frac{1}{4}$ система имеет четыре решения (координаты точек A, B, C и D), а при $a=\frac{1}{4}$ — два решения (координаты точек M и N).



Ответ: $a=\frac{1}{4}$.

19)

а) Да, мог. Например, если первый с третьим сыграли 21 игру, второй с третьим - 13 игр, а первый со вторым - 4 игры.

б) Нет, не мог. Действительно, в таком случае общее число сыгранных партий было бы равно (25 + 17 + 35)/2 = 38,5 игр — не целое число.

в) Нет, не мог. Пусть такое возможно, тогда третий игрок сыграл больше партий, чем первый и второй вместе взятые (25 + 17 < 56). Но других соперников у третьего не могло быть, поэтому получаем противоречие.

100balnik.com
100-БАЛЛОВ
Делаем невозможное возможным