Ответы и решения для варианта 34073007

1)С учетом комиссии, Аня должна внести в приемное устройство сумму не менее $300 + 300 \cdot 0{,}05 = 315$ рублей. Значит, минимальная сумма, которую должна положить Аня, — 320 рублей. Проверим, что этой суммы достаточно: 5% от нее составляют 16 руб. (это комиссия), оставшиеся 304 рубля пойдут на счет телефона. Ответ: 320.

2)Из графика видно, что 15 июля наибольшая температура составляла 21 °С, а наименьшая 8 °С. Их разность составляет 13 °С. Ответ: 13.

3)Площади кругов относятся как квадраты их радиусов. Радиус внешнего круга равен 6 клеток, радиус внутреннего равен 3 клетки. Поскольку радиус большего круга вдвое больше радиуса меньшего круга, площадь большего круга вчетверо больше площади меньшего. Следовательно, она равна 4. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площадей кругов: $4 - 1 = 3$. Ответ: 3.

4)Найдем вероятность того, что перегорят обе лампы. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$. Событие, состоящее в том, что не перегорит хотя бы одна лампа, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0{,}09 = 0{,}91$. Ответ: 0,91.

5)

Последовательно получаем:

$$\log_2(4-x) = 7 \Leftrightarrow 4 - x = 2^7 \Leftrightarrow 4 - x = 128 \Leftrightarrow x = -124.$$

Ответ: −124.

6)

$$\angle BOD = 180^\circ - \angle BOA = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)\right) = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Ответ: 45.

7)Поскольку касательная параллельна прямой у = 6 или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. У данной функции производная равна нулю только в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой у = 6 или совпадает с ней в 4 точках. Ответ: 4.

8)

Так как ребро куба равно радиусу сферы, в кубе содержится 1/8 часть сферы и, соответственно, 1/8 ее поверхности, равная

$$\frac{1}{8}S = \frac{1}{8} \cdot 4\pi R^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 1,6^2 = 1,28\pi.$$

Ответ: 1,28.

9)

Выполним преобразования:

$$\log^2_{\sqrt{7}} 49 = (2 \cdot 2\log_7 7)^2 = 16.$$

Ответ: 16.

10)

Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте ровно три метра. Для этого решим уравнение $h(t) = 3$:

$$h(t) = 3 \Leftrightarrow 1,6 + 8t - 5t^2 = 3 \Leftrightarrow 5t^2 - 8t + 1,4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0,2; \\ t = 1,4. \end{array}\right.$$

Проанализируем полученный результат: поскольку по условию задачи мяч брошен снизу вверх, это означает, что в момент времени $t = 0,2$ (с) мяч находился на высоте 3 метра, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t = 1,4$ (с) мяч находился на этой высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее трёх метров 1,4 − 0,2 = 1,2 секунды.

Ответ: 1,2.

11)

Пусть концентрация первого раствора кислоты – c_1, а концентрация второго – c_2. Если смешать эти растворы кислоты, то получится раствор, содержащий 68% кислоты: $30c_1+20c_2=50\cdot 0,68$. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты: $mc_1+mc_2=2m\cdot 0,7$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1+c_2=1,4, \\ 30c_1+20c_2=34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2=1,4-c_1, \\ 30c_1+28-20c_1=34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2=1,4-c_1, \\ 10c_1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2=0,8, \\ c_1=0,6. \end{cases}$$

Поэтому $m_1=0,6\cdot 30=18.$

Ответ: 18.

12)

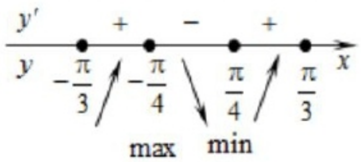
Найдем производную заданной функции:

$$y'=2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-4=\frac{-2(2\cos^2 x-1)}{\cos^2 x}=\frac{-2\cos 2x}{\cos^2 x}.$$

Производная определена во всех точках заданного отрезка. Найдем ее нули на этом отрезке:

$$\begin{cases} \cos 2x=0, \\ -\dfrac{2\pi}{3}\le 2x\le\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\dfrac{\pi}{2}, \\ 2x=-\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}, \\ x=-\dfrac{\pi}{4}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет наименьшее из чисел $y\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ и $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Найдем их:

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-4\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\pi-3=\frac{7\pi}{3}-2\sqrt{3}-3>0\,,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot 1-4\left(\frac{\pi}{4}\right)+\pi-3=-1.$$

Заметим, что $y\left(-\frac{\pi}{3}\right)>y\left(\frac{\pi}{4}\right)$, поэтому наименьшее значение функции на отрезке равно -1.

Ответ: −1.

13)

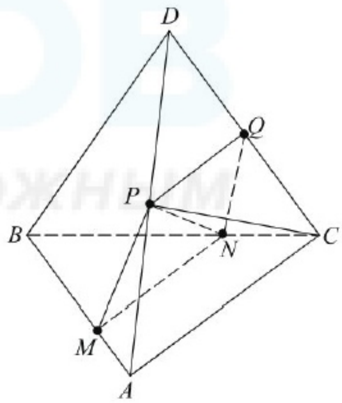
Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0, \\ x > -\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{\pi}{6}, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{2}, \\ \sin x = 3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Уравнение $\sin x = 3$ решений не имеет. Учитывая, что $x > -\dfrac{\pi}{6}$, получаем: $x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Ответ: $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n : n \in \mathbb{N}\right\}$.

14)



а) Треугольник ABC подобен треугольнику MBN по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Тогда углы BAC и BMN равны, и $AC \parallel MN$. $PQ \parallel AC$ поскольку является средней линией треугольника ADC. Значит, $MN \parallel PQ$ и поэтому P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Пусть объём $ABCD$ равен V. Пятигранник $APMNCQ$ состоит из четырёхугольной пирамиды $PACNM$ с основанием $ACNM$ и треугольной пирамиды $PQCN$ с основанием QCN. Выразим их объемы через V.

Расстояние от P до BCD вдвое меньше расстояния от A до BCD, а площади треугольников QCN и BCD, по теореме об отношении площадей треугольников с равным углом, относятся как 1 : 6. Значит, $V_{PQCN} = \dfrac{V}{12}$.

Площадь треугольника MBN составляет $\dfrac{4}{9}$ площади ABC. Значит, $\dfrac{S_{ACNM}}{S_{ABC}} = \dfrac{5}{9}$. Расстояние от точки P до ABC вдвое меньше расстояния от D до ABC, поэтому $V_{PACNM} = \dfrac{5V}{18}$.

Таким образом, $V_{APMNCQ} = \dfrac{13V}{36}$, то есть $\dfrac{V_{APMNCQ}}{V_{BMNDPQ}} = \dfrac{13}{23}$.

Ответ: 13 : 23.

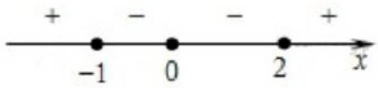
15)

Определим область допустимых значений:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x+2>0, \\ x+1>0, \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x>-2, \\ x>-1, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Заметим, что на ОДЗ знаки $\log_a b$ и $(a-1)(b-1)$ совпадают, решим неравенство:

$$(x+1-1)(x-1-1)(x+1-1)(x+2-1)\leq 0 \Leftrightarrow x(x-2)x(x+1)\leq 0 \Leftrightarrow x^2(x-2)(x+1)\leq 0,$$



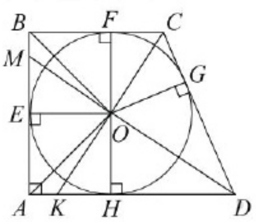
откуда $-1\leq x\leq 2$.

С учётом ОДЗ получаем ответ: $1<x\leq 2$.

Ответ: $(1; 2]$.

16)

а) Лучи CO и DO являются биссектрисами углов BCD и ADC соответственно, поэтому



$$\angle DCO+\angle CDO=\frac{\angle BCD+\angle ADC}{2}=90^\circ,$$

то есть прямые CO и DO перпендикулярны.

Получаем

$$\angle AMO=90^\circ-\angle ADM=90^\circ-\angle KDO=\angle DKO.$$

б) Лучи AO и BO являются биссектрисами прямым углов BAD и ABC соответственно, поэтому треугольник AOB равнобедренный прямоугольный. Значит, $\angle MAO=\angle CBO=45^\circ$, $AO=BO$. Поскольку прямые CO и DO перпендикулярны, получаем:

$$\angle BOC=90^\circ-\angle BOM=\angle AOM.$$

Следовательно, треугольники AOM и BOC равны и нужно найти площадь одного из них.

Пусть окружность касается сторон AB, BC, CD и AD в точках E, F, G и H соответственно, а её радиус равен r. Тогда

$$AH=AE=BE=BF=r;\ CF=CG=10-r;\ DH=DG=15-r.$$

В прямоугольном треугольнике COD имеем:

$$OG^2=CG\cdot DG;\ r^2=(10-r)(15-r),$$

откуда $r=6$. Значит, $S_{AOM}=S_{BOC}=\dfrac{BC\cdot OF}{2}=30$.

Ответ: б) 30.

17)

Пусть средства клиентов, имеющихся в банке, составляет S у.е.

Наименьшая прибыль, которую банку могут принести оба проекта 0,25S.

$$0,3S\cdot 1,32+0,7S\cdot 1,22-S=0,396S+0,854S-S=0,25S.$$

Банк получит наименьшую чистую прибыль если он своим клиентам выплатит проценты по высшей ставке (20%). Рассчитаем этот показатель: $\frac{0,25S-0,2S}{S}\cdot 100\%=0,05\cdot 100\%=5\%$.

Наибольшая прибыль, которую банку могут принести оба проекта 0,3S.

$$0,3S\cdot 1,37+0,7S\cdot 1,27-S=0,411S+0,889S-S=0,3S.$$

Банк получит наибольшую чистую прибыль, если банк своим клиентам выплатит проценты по низшей ставке (10%).

$$\frac{0,3S-0,1S}{S}\cdot 100\%=0,2\cdot 100\%=20\%.$$

Ответ: 5%; 20%.

18)

Преобразуем уравнение:

$$64x^6+4x^2=(3x+a)^3+(3x+a).$$

Рассмотрим функцию $f(t)=t^3+t$. Она монотонно возрастает как сумма двух возрастающих функций. Поэтому уравнение $f(4x^2)=f(3x+a)$ равносильно уравнению $4x^2=3x+a$. Оно имеет более одного корня в тех случаях, когда дискриминант уравнения $4x^2-3x-a=0$ положителен. То есть когда $9+16a>0$, $a>-\frac{9}{16}$.

Ответ: $a>-\frac{9}{16}$.

19)

а) Пусть в школе № 1 писали тест n учащихся, а средний балл был равен A. Тогда суммарный балл всех учащихся этой школы равнялся nA, а значит, после перехода одного учащегося в школу № 2, суммарный балл стал равен $2(n-1)A$. Таким образом, суммарный балл уменьшился на $(2-n)A$, что невозможно, поскольку перешедший учащийся набрал положительное количество баллов, а $n\geq 2$.

б) Пусть в школе № 2 средний балл равнялся B, а перешедший в нее учащийся набрал u баллов. Тогда получаем:

$$u=nA-1,1(n-1)A=1,1(52-n)B-(51-n)B,$$

или

$$10u=(11-n)A=(62-n)B.$$

Если $B=1$, то $n=2$, поскольку число $(62-n)B$ должно делиться на 10, а $(11-n)A$ не должно быть отрицательным. Получаем $9A=60$, что невозможно, поскольку A целое.

в) Заметим, что если $B=2$, то $n=2$ или $n=7$. В первом случае $9A=120$, а во втором $4A=110$. Значит, ни один из этих случае не возможен.

При $B=3$ получаем $n=2$, откуда $u=18$, $A=20$. Этот случай реализуется, например, если в школе № 1 писали тест 2 учащихся и набрали 22 и 18 баллов, а в школе № 2 писали тест 49 учащихся и каждый набрал по три балла, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося 18 баллов.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 3.