Ответы и решения для варианта 34073005

1)

В день отправления поезд едет $(24 - 21) \cdot 60 - 35 = 3 \cdot 60 - 35 = 145$ минут, а на следующий день до момента прибытия он едет $10 \cdot 60 + 35 = 635$ минут. Всего в пути поезд проведет $145 + 635 = 780$ минут. Разделим 780 на 60:

$$\frac{780}{60} = \frac{78}{6} = 13.$$

Значит, поезд находится в пути 13 часов.

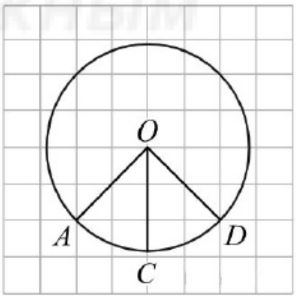
Ответ: 13.

2)Из графика видно, что от 2 до 8 мм осадков выпадало три дня: 7, 8 и 9 февраля (см. рисунок). Подробнее: 04.02 выпало 1,5 мм осадков, 05.02 — 0 мм, 06.02 — 1 мм, 07.02 — 7 мм, 08.02 — 6мм, 09.02 — 2 мм, 10.02 — 9 мм. Ответ: 3.

3)

Искомая дуга окружности равна опирающемуся на нее центральному углу.

Пусть точка O — центр окружности. Поставим на меньшую дугу BC окружности точку D симметрично относительно OC (см. рис.) и соединим точки A и D с точкой O. Центральный угол AOD равен 90°, поэтому дуга AD, на которую он опирается, тоже равна 90°. Дуга AC равна половине дуги AD, поэтому она равна 45°.



Ответ: 45.

4)

Рассмотрим события

А = кофе закончится в первом автомате,
В = кофе закончится во втором автомате.

Тогда

A·B = кофе закончится в обоих автоматах,
A + B = кофе закончится хотя бы в одном автомате.

По условию $P(A) = P(B) = 0{,}3$; $P(A \cdot B) = 0{,}12$.

События A и B совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}48.$$

Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна $1 - 0{,}48 = 0{,}52$.

Ответ: 0,52.

5)

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{-72-17x}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} -72-17x=x^2, \\ -x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+17x+72=0, \\ x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=-8, \end{array}\right. \\ x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-9, \\ x=-8. \end{array}\right.$$

Меньший корень равен -9.

Ответ: -9.

6)Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции равен полуразности большего и меньшего оснований. Поэтому он равен (3 − 2):2 = 0,5. Ответ: 0,5.

7)

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y=2x-2$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 2 и $f'(x_0)=2$. Осталось найти, при каких x производная принимает значение 2. Искомая точка $x_0=5$.

Ответ: 5.

8)

Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту и выражается через сторону основания a и высоту H формулой $V=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}H$. Поэтому $H=\frac{4V}{\sqrt{3}a^2}$, а значит, при увеличении стороны a в 4 раза знаменатель увеличится в 16 раз, то есть высота уменьшится в 16 раз и будет равна 5 см.

Ответ: 5.

9)

Выполним преобразования:

$$5\sin^2\alpha+13\cos^2\alpha=6 \Leftrightarrow 5\sin^2\alpha+13\cos^2\alpha=6(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\sin^2\alpha=-7\cos^2\alpha \Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=7 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha=7.$$

Ответ: 7.

10)

Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени, является

$$H(t)=20-\sqrt{2\cdot 10\cdot 20}\cdot\frac{1}{50}t+\frac{10}{2}\left(\frac{1}{50}\right)^2t^2=0,002t^2-0,4t+20.$$

Четверть первоначального объёма воды в баке останется, когда высота столба воды будет 5 м. Определим требуемое на вытекание трех четвертей воды время — найдем меньший корень уравнения $H(t)=5$:

$$H(t)=5\Leftrightarrow 0,002t^2-0,4t+20=5\Leftrightarrow t^2-200t+7500=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=50;\\ t=150.\end{array}\right.$$

Таким образом, через 50 секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды.

Ответ: 50.

11)

Пусть производительность каждого из рабочих равна $1/x$ заказа в день, и пусть в новом составе бригады доделывали заказы y дней. Тогда за первые 7 дней работы бригадами в 16 и 25 человек было сделано $16\cdot 7/x$ и $25\cdot 7/x$ частей заказов, а за следующие y дней бригадами в 24 человека и 17 человек были доделаны оставшиеся $24\cdot y/x$ и $17\cdot y/x$ частей заказов. Поскольку в результате были целиком выполнены два заказа, имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{16\cdot 7}{x}+\dfrac{24y}{x}=1,\\ \dfrac{25\cdot 7}{x}+\dfrac{17y}{x}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}112+24y=x,\\ 175+17y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}112+24y=175+17y,\\ x=175+17y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=9,\\ x=328.\end{cases}$$

Значит, в новом составе бригады работали 9 дней. Таким образом, потребовалось 7 + 9 = 16 дней на выполнение заказов.

Ответ: 16.

12)

Найдем производную заданной функции: $y'=-5\sin x-6$. Уравнение $y'=0$ не имеет решений, производная отрицательна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является убывающей. Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y(0)=5\cos 0-6\cdot 0+4=5+4=9.$$

Ответ: 9.

13)

а) Заметим, что в силу формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, справедлива формула $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, откуда $4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \sin^2 x$. Имеем:

$$\frac{\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}} = 4\cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2\frac{x}{2} \neq 0,\\ \sin x = 4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\frac{x}{2} \neq 0,\\ \sin x = \sin^2 x\end{cases} \Leftrightarrow$$

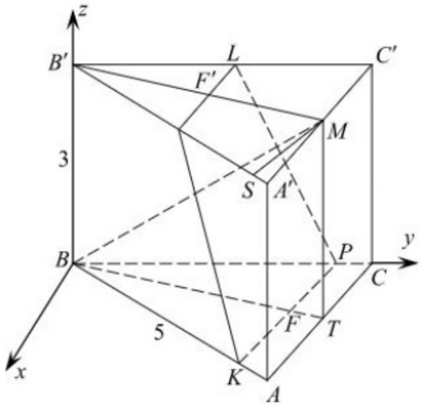
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\frac{x}{2} \neq 0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin x = 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{2} \neq \pi n,\\ \left[\begin{array}{l}x = \pi k,\\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq 2\pi n,\\ \left[\begin{array}{l}x = \pi k,\\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\end{array}\right.\end{cases} k,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + 2\pi k,\\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Неотрицательным значениям параметра k соответствуют положительные значения корней; они не лежат на отрезке $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$. Будем последовательно перебирать отрицательные значения параметра: значению $k = -1$ соответствуют корни $-\pi$ и $-\frac{3\pi}{2}$; значению $k = -2$ соответствуют корни -3π и $-\frac{7\pi}{2}$; значению $k = -3$ соответствуют корни -5π и $-\frac{11\pi}{2}$. Меньшим значениям k соответствуют меньшие значения корней; они также не лежат на заданном отрезке. Из вышеперечисленных корней заданному отрезку принадлежат числа -3π и $-\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $x = \pi + 2\pi k,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) -3π и $-\frac{7\pi}{2}$.

14)

а) Построим сечение призмы плоскостью γ. Проведём $KP \parallel AC$, $P \in CB$, $CP = 1$. Проведём PL, проведём $LR \parallel AC$, $R \in A'B'$. Проведём RK. Трапеция $LPKR$ — искомое сечение. Сечение параллельно AC по признаку параллельности прямой к плоскости.



Введём систему координат, как показано на рисунке. В этой системе координат: $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 6;\ 0)$, $B'(0;\ 0;\ 3)$, $C'(0;\ 6;\ 3)$, $A\left(3\sqrt{3}; 3; 0\right)$, $A'\left(3\sqrt{3}; 3; 3\right)$, $P(0;\ 5;\ 0)$, $T\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 0\right)$, $M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3\right)$, $K\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$.

Тогда

$$\overrightarrow{BM} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3\right),\ \overrightarrow{KP} = \left(\frac{-5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; 0\right),\ \overrightarrow{LP} = (0; 2; -3).$$

Откуда получаем:

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{KP} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3\right) \cdot \left(\frac{-5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; 0\right) = -\frac{45}{4} + \frac{45}{4} + 0 = 0.$$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{LP} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3\right) \cdot (0; 2; -3) = 0 + 9 - 9 = 0.$$

Так как $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{KP}$ и $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{LP}$ получаем, что $BM \perp (KLP)$.

б) Далее заметим, что плоскость сечения перпендикулярна вектору $\overrightarrow{BM}$, найдем уравнение плоскости и вычислим расстояние от точки до плоскости:

Найдём свободный член D в уравнении плоскости $\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{9}{2}y + 3z + D = 0$, подставив координаты точки K:

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot 0 + D = 0 \Leftrightarrow \frac{45}{4} + \frac{45}{4} + D = \frac{90}{4} + D = \frac{45}{2} + D, \text{ поэтому } D = -\frac{45}{2}.$$

Упростив уравнение плоскости, получим: $\sqrt{3}x + 3y + 2z - 15 = 0$.
Тогда для искомого расстояния получаем:

$$d(C; (KLP)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|\sqrt{3} \cdot 0 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 - 15|}{\sqrt{3 + 9 + 4}} = \frac{3}{4}.$$

15)

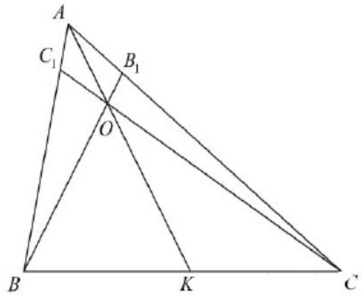
Последовательно получаем:

$$6^x + \frac{1}{6^x} > 2 \Leftrightarrow 6^{2x} + 1 > 2 \cdot 6^x \Leftrightarrow (6^x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow 6^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

16)

а) По теореме Менелая $\frac{CB}{BK}\cdot\frac{KO}{OA}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}=1$ и $\frac{BC}{CK}\cdot\frac{KO}{OA}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$. Поскольку $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AB_1}{B_1C}$, находим: $\frac{CB}{BK}=\frac{BC}{CK}\Leftrightarrow CK=BK$.



б) По теореме Менелая $\frac{AB}{AC_1}\cdot\frac{C_1O}{OC}\cdot\frac{CK}{KB}=1\Leftrightarrow\frac{C_1O}{OC}=\frac{1}{5}$. Также имеем $\frac{CA}{AB_1}\cdot\frac{B_1O}{OB}\cdot\frac{BK}{KC}=1\Leftrightarrow\frac{B_1O}{OB}=\frac{1}{5}$. Заметим, что треугольники AB_1B и BCB_1 имеют общую высоту, следовательно: $\frac{S_{AB_1B}}{S_{BCB_1}}=\frac{1}{4}$. Поэтому $\frac{S_{AB_1B}}{S_{ABC}}=\frac{1}{5}$. Аналогично доказываем, что $\frac{S_{CAC_1}}{S_{ABC}}=\frac{1}{5}$.

Треугольники AOC и AC_1O имеют общую высоту, поэтому $\frac{S_{AC_1O}}{S_{AOC}}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{S_{AC_1O}}{S_{AC_1C}}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{S_{AC_1O}}{S_{ABC}}=\frac{1}{30}$. Аналогично доказываем, что $\frac{S_{AB_1O}}{S_{ABC}}=\frac{1}{30}$. Тогда $\frac{S_{AB_1OC_1}}{S_{ABC}}=\frac{1}{15}$.

Ответ: 1 : 15.

17)

Скорость сближения Алексея и Жучки (разность скоростей) Δv = 9 км/ч. Первоначальная разность расстояний между хозяином и собакой составляет ΔS = 6 км. Найдем разностное отношение $t=\Delta S/\Delta v=2/3$ часа. Это и есть время, которое потребовалось Жучке, чтобы догнать Алексея.

С того времени, как Жучка бежала за хозяином, Алексей прошел расстояние, равное $\frac{2}{3}v$ км. В соответствии с условием задачи Алексей прошел еще 6 км пока Жучка была дома. Значит, в направлении от дома Алексей, будучи на прогулке, прошел $6+\frac{2}{3}v$ км. Такой же путь Алексей прошел после того, как Жучка догнала его, но в обратном направлении. На преодоление этого пути (со скоростью 4 км/ч) потребовалось $\frac{6+\frac{2}{3}v}{4}=\frac{3}{2}+\frac{v}{6}$ часа. Итак, вся прогулка Алексея продлилась

$$\left(\frac{6}{v}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{v}{6}\right)=\left(\frac{6}{v}+\frac{v}{6}\right)+\frac{13}{6}\ \text{часа.}$$

Эта сумма будет наименьшей, когда сумма двух взаимно обратных положительных выражений $\frac{6}{v}$ и $\frac{v}{6}$ примет наименьшее значение. И эта наименьшая сумма заведомо известна, она равна 2 (классическое неравенство $\left(a+\frac{1}{a}\right)\geq 2$ — наименьшее значение достигается при a = 1). Следовательно, в нашем случае должно выполняться равенство $\frac{6}{v}=\frac{v}{6}=1$, то есть v = 6 км/ч. Время всей прогулки Алексея составляет $2+\frac{13}{6}=\frac{25}{6}$ часа.

Ответ: 6 км/ч, $\frac{25}{6}$ часа.

18)

Произведём замену переменной $t = x - 3$, получим:

$$a^2 + 9|t| + 3\sqrt{t^2+4} = 4a + 2|t - 2a| \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3\sqrt{t^2+4} = 2|t - 2a| - 9|t|.$$

Пусть теперь

$$f(t) = a^2 - 4a + 3\sqrt{t^2+4},$$
$$g(t) = 2|t - 2a| - 9|t|.$$

При $t \geq 0$ функция $g(t)$ убывает, принимая все значения от $g(0)$ до $-\infty$. При $t < 0$ функция $g(t)$ – возрастает, принимая все значения от $-\infty$ до $g(0)$. Значит, $\max g(t) = g(0) = 4|a|$

Функция $f(t)$ принимает минимальное значение при $f(t) = f(0) = a^2 - 4a + 6$, причём на промежутке $(0; +\infty)$ — функция возрастает, принимая все значения от $f(0)$ до $+\infty$, а на промежутке $(-\infty; 0)$ — убывает (функция чётная), принимая все значения от $+\infty$ до $f(0)$.

Поскольку наибольшее значение функции $g(t)$ и наименьшее значение функции $f(t)$ достигается при одном и том же значении $t = 0$, уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда $\max g(t) \geq \min f(t)$, то есть

$$a^2 - 4a + 6 \leq 4|a|$$

1) При $a \geq 0$ получаем

$$a^2 - 4a + 6 \leq 4a \Leftrightarrow a^2 - 8a + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{10} \leq a \leq 4 + \sqrt{10}$$

2) При $a < 0$ получаем

$$a^2 - 4a + 6 \leq -4a \Leftrightarrow a^2 + 6 < 0, \text{ решений нет.}$$

Ответ: $a \in [4 - \sqrt{10};\ 4 + \sqrt{10}]$.

19)

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41 - 7 - 8 - 10 = 16$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.