Ответы и решения для варианта 34073004

1)

Через год клиент должен будет выплатить 12 000 + 0,16 · 12 000 = 13 920 рублей. Разделим 13 920 руб. на 12 мес.:

$$\frac{13\,920}{12} = 1160 \text{ руб./мес.}$$

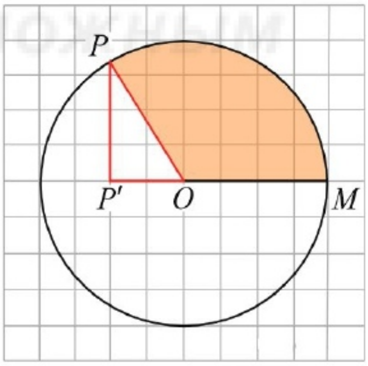
Значит, клиент должен вносить ежемесячно в банк 1160 рублей.

Ответ: 1160.

2)Из графика видно, что крутящий момент 60 Н · м достигается при 2000 оборотов двигателя в минуту (см. рисунок). Ответ: 2000.

3)

Заметим, что $\cos P'OP = \frac{P'O}{OP} = \frac{P'O}{OM} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Тогда $\angle P'OP = 60^\circ$, поэтому $\angle POM = 120^\circ$. Поэтому площадь сектора равна $\frac{1}{3}$ от площади круга. Следовательно, площадь круга равна 3 · 32 = 96.



Ответ:96.

4)

Обозначим «1» ту сторону монеты, которая отвечает за выигрыш жребия «Физиком», другую сторону монеты обозначим «0». Тогда благоприятных комбинаций три: 110, 101, 011, а всего комбинаций $2^3 = 8$: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Тем самым, искомая вероятность равна:

$$\frac{3}{8} = 0{,}375.$$

Ответ: 0,375.

5)

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{6+5x}=x \Leftrightarrow \begin{cases} 6+5x=x^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6=0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=6, \end{array} \right. \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Уравнение имеет единственный корень, он и является ответом.

Ответ: 6.

6)

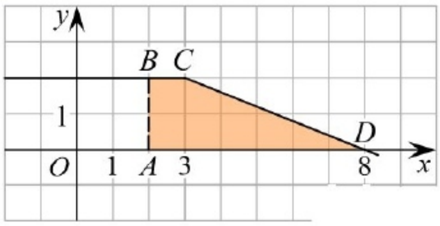
Поскольку $CH=AC\sin A$, $AC=AB\cos A$ имеем:

$$CH=AB\sin A\cos A=AB\cdot\frac{\sin A}{\cos A}\cos^2 A=AB\cdot\operatorname{tg}\alpha\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=13\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{5}{2}.$$

Ответ: 2,5.

7)

Разность значений первообразной в точках 8 и 2 равна площади выделенной на рисунке трапеции $ABCD$. Поэтому



$$F(b)-F(a)=\frac{1+6}{2}\cdot 2=7.$$

Ответ: 7.

8)

Диаметр шара, описанного вокруг куба, совпадает с его диагональю и вдвое больше радиуса. Поэтому диагональ куба равна $2\sqrt{3}$. Если ребро куба равно a, то диагональ куба дается формулой $d=a\sqrt{3}$. Следовательно, ребро куба равно 2, а его объем равен 8.

Ответ: 8.

9)

Воспользуемся тождеством $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$ и раскроем модули на отрезке [6; 10]:

$$\sqrt{(a-6)^2}+\sqrt{(a-10)^2}=|a-6|+|a-10|=a-6+10-a=4.$$

Ответ: 4.

10)

Пусть h_1 – расстояние до воды до дождя, h_2 – расстояние до воды после дождя. После дождя уровень воды в колодце повысится, расстояние до воды уменьшится, и время падения уменьшится, станет равным $t = 0,6 - 0,2 = 0,4$ с. Уровень воды поднимется на $h_1 - h_2$ метров.

$$h_1 - h_2 = 5 \cdot 0,6^2 - 5 \cdot 0,4^2 = 1.$$

Ответ: 1.

11)

Пусть v км/ч — скорость первого мотоциклиста, тогда скорость второго мотоциклиста равна v + 21 км/ч. Пусть первый раз мотоциклисты поравняются через t часов. Для того, чтобы мотоциклисты поравнялись, более быстрый должен преодолеть изначально разделяющее их расстояние, равное половине длины трассы. Поэтому

$$(v+21)t - vt = 7 \Leftrightarrow 21t = 7 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, мотоциклисты поравняются через $t = \frac{1}{3}$ часа или через 20 минут.

Ответ: 20.

12)

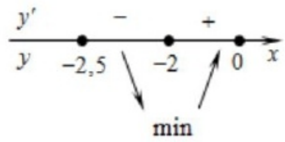
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3 - \dfrac{3}{x+3} = 0, \\ -2,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} = 1, \\ -2,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ -2,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2) = -2 \cdot 3 - \ln 1 = -6.$$

Ответ: −6.

13)

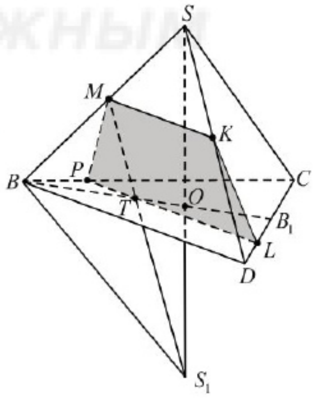
Произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы одно из них равно нулю, а другое при этом не теряет смысла:

$$\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{3x^2-7x+4}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ 3x^2-7x+4\geq 0,\end{cases}\\ 3x^2-7x+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ (x-1)\left(x-\dfrac{4}{3}\right)\geq 0,\end{cases}\\ x=1,\\ x=\dfrac{4}{3}.\end{array}\right.$$

Поскольку $3<\pi<4$, то $1<\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{4}{3}$. Поэтому $k\neq 0$.

Ответ: $\left\{1,\ \dfrac{4}{3}\right\}\cup\left\{(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{3}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0\right\}$.

14)



а) Проведём медиану S_1M треугольника SS_1B, которая пересекает прямую BB_1, являющуюся одновременно медианой треугольника SS_1B и основания BCD, в точке T. Тогда $BT:TB_1=4:5$.

Точка L, в свою очередь, делит отрезок B_1D в отношении $DL:LB_1=4:5$, так как $LD:LC=2:7$, а BB_1 — медиана треугольника BCD.

Следовательно, сторона сечения, проходящая через точки L и T, параллельна стороне BD основания BCD. Пусть прямая LT пересекает BC в точке P.

Проведём в треугольнике SBD через точку M среднюю линию, пусть она пересекает сторону SD в точке K. Тогда $PMKL$ — искомое сечение, причём $BP=DL$ и $BM=KD$. Из равенства треугольников BMP и DKL получим $MP=KL$, а значит, $PMKL$ — равнобедренная трапеция.

б) Большее основание PL трапеции равно 7, поскольку треугольник LPC правильный. Второе основание MK равно 4,5, поскольку MK — средняя линия правильного треугольника SBD. Следовательно, средняя линия трапеции равна $\dfrac{7+4,5}{2}=5,75$.

Ответ: 5,75.

15)

Преобразуем неравенство

$$\frac{\log_4(x^4-4x^3+4x^2)+\log_{0,25}(6x^2-12x-9)}{x^2-2x-8}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\log_4(x^2-2x)^2-\log_4(6(x^2-2x)-9)}{(x^2-2x)-8}\ge 0.$$

Заметим, что на ОДЗ знак разности $\log_a b-\log_a c$ совпадает со знаком дроби $\frac{b-c}{a-1}$. Поэтому, сделав замену переменной $t=x^2-2x$, получаем:

$$\frac{\log_4 t^2-\log_4(6t-9)}{t-8}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{t^2-6t+9}{t-8}\ge 0,\\ t>1,5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(t-3)^2}{t-8}\ge 0,\\ t>1,5\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=3,\\ t>8.\end{array}\right.$$

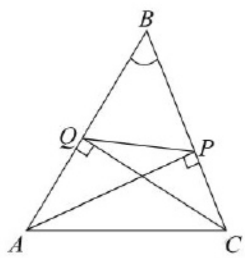
Вернёмся к исходной переменной:

$$x^2-2x=3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=3;\end{array}\right.$$

$$x^2-2x>8 \Leftrightarrow x^2-2x-8>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2,\\ x>4.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty,-2)\cup\{-1;3\}\cup(4,+\infty)$.

16)



а) Углы APC и AQC — прямые, значит, точки A, Q, P и C лежат на одной окружности с диаметром AC, и, следовательно, равны и вписанные углы PAC и PQC этой окружности, опирающиеся на дугу PC, что и требовалось доказать.

б) Прямоугольные треугольники ABP и CBQ имеют общий угол ABC, следовательно, они подобны, откуда $\frac{BQ}{BP}=\frac{BC}{BA}$ или $\frac{BQ}{BC}=\frac{BP}{BA}$, но тогда и треугольники BAC и BPQ также подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{BQ}{BC}=\frac{BP}{BA}=\cos\angle ABC$, откуда $AC=\frac{PQ}{\cos\angle ABC}=\frac{8}{\cos 60^\circ}=16$. Тогда радиус R окружности, описанной около треугольника ABC равен $R=\frac{AC}{2\sin\angle ABC}=\frac{16}{2\sin 60^\circ}=\frac{16}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{16}{\sqrt{3}}$.

17)

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года k, то в конце двадцатого года на его счёте будет $a_k = 10k \cdot 1,24^{20-k}$ тыс. рублей.

Сравним числа a_k и a_{k+1}:

$$a_{k+1} - a_k = 10(k+1)\cdot 1,24^{20-k-1} - 10k \cdot 1,24^{20-k} = 10 \cdot 1,24^{20-k-1}(-0,24k+1).$$

Уравнение $-0,24k+1=0$ имеет корень $\frac{100}{24} = 4\frac{1}{6}$. Таким образом, $a_{k+1} - a_k > 0$ при $k \le 4$, $a_{k+1} - a_k < 0$ при $k \ge 5$. Значит,

$$a_5 > a_4 > \ldots > a_1,\; a_5 > a_6 > \ldots > a_{20},$$

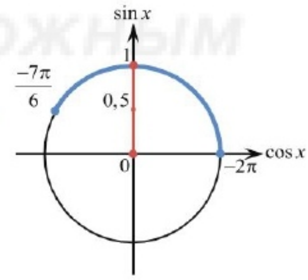
поэтому наибольший член последовательности (a_k) — это a_5, то есть ценные бумаги надо продавать в конце пятого года.

Ответ: 5.

18)

Заметим, что при любых значениях переменной x и параметра a знаменатель дроби в левой части неравенства положителен, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$a - (a^2 - 2a - 3)\sin x + 4 < 0,5(1 - 2\sin^2 x) + a^2 + 1,5.$$



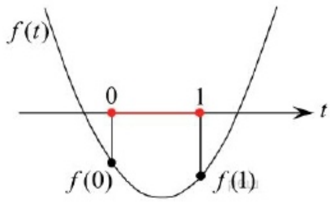
Для того, чтобы множество решений неравенства содержало отрезок $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right]$ синус должен принимать все значения $0 \le \sin x \le 1$ (см. рисунок)

Пусть $\sin x = t$, тогда неравенство принимает вид

$$a - (a^2 - 2a - 3)t + 4 < 0,5(1 - 2t^2) + a^2 + 1,5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^2 - (a^2 - 2a - 3)t - a^2 + a + 2 < 0$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 - (a^2 - 2a - 3)t - a^2 + a + 2$ Для того, чтобы множество решений последнего неравенства содержало отрезок $[0;\ 1]$ необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия $f(0) < 0$ и $f(1) < 0$

$$\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + a + 2 < 0, \\ -2a^2 + 3a + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ a > 2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a < \frac{3-\sqrt{57}}{4}, \\ a > \frac{3+\sqrt{57}}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < \frac{3-\sqrt{57}}{4}, \\ a > \frac{3+\sqrt{57}}{4}. \end{array}\right.$$



Ответ: $a < \frac{3-\sqrt{57}}{4}$; $a > \frac{3+\sqrt{57}}{4}$.

19)

Пусть в первый день Наташа и Маша сделали n и m фотографий соответственно, всего они делали снимки в течение k дней. Поскольку Наташа сделала на 1001 фотографию больше, чем Маша, получаем: $k(n-m)=1001$.

а) Если $n-m=143$, то есть в первый день Наташа сделала на 143 фотографии больше, чем Маша, то $k=\frac{1001}{143}=7$. Значит, Наташа могла за семь дней сделать на 1001 фотографию больше, чем Маша.

б) Так как $k(n-m)=1001$, 1001 кратно k, но 1001 на 8 без остатка не делится. Таким образом, за восемь дней Наташа не сделала бы на 1001 фотографию больше, чем Маша.

в) В последний день Маша сделала меньше 40 фотографий, то есть $m+k-1<40 \Leftrightarrow m+k<41$, откуда $k<40$. Так как k является делителем числа 1001 и $k<40$, либо $k=13$, либо $k=11$, либо $k=7$.

Поскольку количество фотографий Наташи отличается от Машиных на константу, будем максимизировать количество снимков Маши.

Если $k=7$, $m+6<40$, откуда наибольшее возможное значение $m=33$. Найдем общее количество фотографий:

$$\frac{2\cdot 33+6}{2}\cdot 7=252.$$

Если $k=11$, $m+10<40$, откуда наибольшее возможное значение $m=29$. Найдем общее количество фотографий:

$$\frac{2\cdot 29+10}{2}\cdot 11=374.$$

Если $k=13$, $m+12<40$, откуда наибольшее возможное значение $m=27$. Найдем общее количество фотографий:

$$\frac{2\cdot 27+12}{2}\cdot 13=429$$

Таким образом, наибольшее количество фотографий, сделанных Машей, равно 429, а Наташей — 429 + 1001 = 1430.

Ответ: а) Да; б) Нет; в) 1430.