Ответы и решения для варианта 34073006

1)

Чтобы получить количество миль в час, разделим 36 километров в час на 1,6 километра в миле:

$$\frac{36}{1,6}=\frac{360}{16}=\frac{45}{2}=22\frac{1}{2}.$$

Значит, спидометр показывает скорость 22,5 мили в час.

Ответ: 22.5.

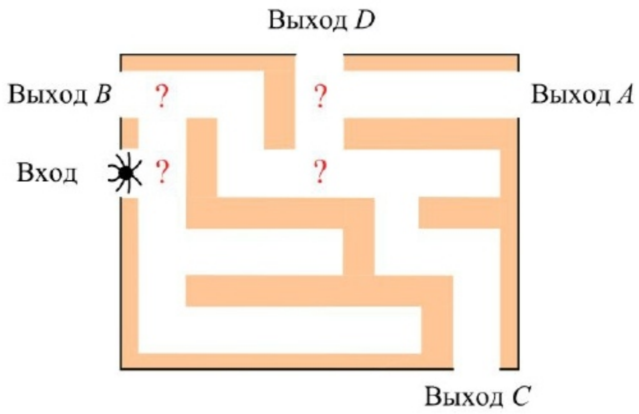
100balnik.com
100 БАЛЛОВ
Делаем невозможное возможным

2)Из 16 наблюдений, представленных на графике, 2 дня выпадало более 3 мм осадков в остальные дни менее 3 мм осадков. Поэтому 14 дней выпадало менее 3 мм осадков. Ответ: 14.

3)Площади кругов относятся как квадраты их радиусов. Поскольку радиус большего круга равен четырем третьим радиуса меньшего круга, площадь большего круга составляет шестнадцать девятых площади меньшего. Следовательно, она равна 16. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площадей кругов: 16 − 9 = 7. Ответ: 7.

4)

На каждой из четырех отмеченных развилок паук с вероятностью 0,5 может выбрать или путь, ведущий к выходу D, или другой путь. Это независимые события, вероятность их произведения (паук дойдет до выхода D) равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность прийти к выходу D равна $(0,5)^4 = 0,0625$.



Ответ: 0,0625.

НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.COM

5)

Заметим, что числители дробей равны. Имеем:

$$\frac{x+8}{5x+7}=\frac{x+8}{7x+5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+8=0; \\ 5x+7=7x+5, 7x+5\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-8; \\ x=1. \end{array}\right.$$

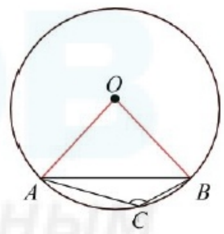
Ответ: 1.

6)

100balnik.com

вписанный угол дополняет половину центрального угла, опирающегося на ту же хорду, до 180°. Треугольник AOB является равносторонним, т. к. $AO = OB = AB = R$, поэтому угол $AOB = 60°$. Тогда

$$\angle ACB = 180° - \frac{\angle AOB}{2} = 150°.$$



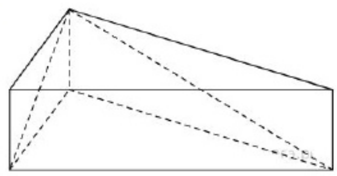
Ответ: 150.

100 БАЛЛОВ
Делаем невозможное возможным

7)Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная отрицательна в точках −1 и 4. Модуль тангенса угла наклона касательной явно больше в точке 4, поэтому тангенс в этой точке наименьший. Ответ:4.

8)

Объем призмы больше объема пирамиды с такой же площадью основания и высотой в 3 раза. Объем оставшейся части составляет тогда две трети исходного, он равен 4.



Ответ: 4.

9)

Выполним преобразования:

$$q(b-2)-q(b+2)=3(b-2)-3(b+2)=-12.$$

Ответ: −12.

НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.COM

10)

Задача сводится к решению неравенства $I \le 0,2I_{кз}$ при известном значении внутреннего сопротивления $r = 1$ Ом:

$$I \le 0,2I_{кз} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{R+1} \le 0,2 \cdot \frac{\varepsilon}{1} \Leftrightarrow R+1 \ge 5 \Leftrightarrow R \ge 4 \text{ Ом.}$$

Ответ: 4.

100balnik.com
100 баллов
Делаем невозможное возможным

11)

Пусть масса 30-процентного раствора кислоты – m_1 кг, а масса 60-процентного – m_2. Если смешать 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 36-процентный раствор кислоты: $0,3m_1 + 0,6m_2 = 0,36(m_1 + m_2 + 10)$. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты: $0,3m_1 + 0,6m_2 + 0,5 \cdot 10 = 0,41(m_1 + m_2 + 10)$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,3m_1 + 0,6m_2 = 0,36m_1 + 0,36m_2 + 3,6, \\ 0,3m_1 + 0,6m_2 + 5 = 0,41m_1 + 0,41m_2 + 4,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,24m_2 - 0,06m_1 = 3,6, \\ 0,11m_1 - 0,19m_2 = 0,9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m_2 - m_1 = 60, \\ 11m_1 - 19m_2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 4m_2 - 60, \\ 11(4m_2 - 60) - 19m_2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 4m_2 - 60, \\ 25m_2 = 750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 60, \\ m_2 = 30. \end{cases}$$

Ответ: 60.

12)

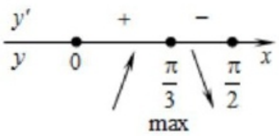
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} -12\sin x + 6\sqrt{3} = 0, \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = \dfrac{\pi}{3}$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12.$$

Ответ: 12.

НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.COM

13)

а) Заметим, что уравнение определено при любом x. Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2+5)=\log_2(8x^4+14)-\log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(9x^2+5)=\log_2(4x^4+7) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9x^2+5=4x^4+7 \Leftrightarrow 4x^4-9x^2+2=0 \Leftrightarrow (4x^2-1)(x^2-2)=0.$$

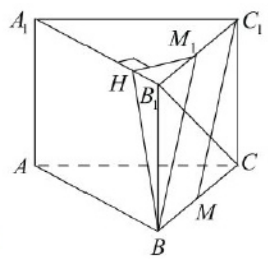
Значит, либо $4x^2-1=0$, откуда $x=\frac{1}{2}$ или $x=-\frac{1}{2}$, либо $x^2-2=0$, откуда $x=\sqrt{2}$ или $x=-\sqrt{2}$.

б) Поскольку $-\sqrt{2}<-1<-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}<\frac{8}{9}<\sqrt{2}$, отрезку $\left[-1;\frac{8}{9}\right]$ принадлежат корни $x=\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: а) $x=\pm\sqrt{2}, x=\pm\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{1}{2}$.

100balnik.com
100 БАЛЛОВ
Делаем невозможное возможным

14)



а) Поскольку

$$\operatorname{tg}\angle CMC_1=\frac{CC_1}{CM}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\frac{B_1C_1}{CC_1}=\operatorname{tg}\angle B_1CC_1,$$

получаем

$$\angle B_1CC_1=\angle CMC_1=90^\circ-\angle MC_1C,$$

то есть прямые B_1C и C_1M перпендикулярны.

б) Пусть M_1 — середина B_1C_1, тогда угол между прямой C_1M и плоскостью грани ABB_1A_1 равен углу между этой плоскостью и прямой BM_1.

Обозначим через M_1H перпендикуляр, опущенный на A_1B_1. Прямая M_1H перпендикулярна плоскости грани ABB_1A_1, поскольку она перпендикулярна прямым A_1B_1 и BB_1. Поэтому искомый угол равен углу M_1BH.

В прямоугольном треугольнике M_1BH:

$$M_1B=\sqrt{BB_1^2+B_1M_1^2}=2\sqrt{6},\ M_1H=M_1B_1\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{6},$$

откуда $\angle M_1BH=30^\circ$.

Ответ: б) 30°.

НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.COM

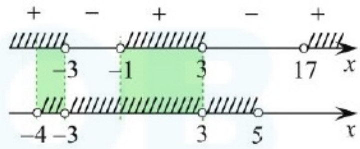
15)

Решим неравенство методом рационализации:

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} - \log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{25-x^2}{16} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{25-x^2}{16}-1\right)\left(\frac{24+2x-x^2}{14}-\frac{25-x^2}{16}\right) > 0, \\ 25-x^2>0, \\ 24+2x-x^2>0 \\ \frac{25-x^2}{16} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{9-x^2}{16}\right)\left(\frac{-x^2+16x+17}{112}\right) > 0, \\ -5<x<5, \\ -4<x<6, \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

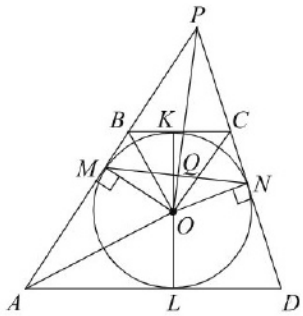
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-9)(x^2-16x-17) > 0, \\ -4<x<5, \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<x<-3, \\ -1<x<3. \end{array} \right.$$



Ответ: $(-4; -3) \cup (-1; 3)$.

100balnik.com
100 БАЛЛОВ
Делаем невозможное возможным

16)



а) Пусть окружность касается оснований BC и AD в точках K и L соответственно, а ее центр находится в точке O.

Лучи AO и BO являются биссектрисами углов BAD и ABC соответственно, поэтому

$$\angle BAO + \angle ABO = \frac{\angle BAD + \angle ABC}{2} = 90^\circ,$$

то есть треугольник AOB прямоугольный. Аналогично, треугольник COD тоже прямоугольный. Пусть $BM = x$, $CN = y$, тогда $AM = 8x$, $DN = 2y$.

$$MO = \sqrt{AM \cdot MB} = 2\sqrt{2} \cdot x = NO = \sqrt{CN \cdot ND} = \sqrt{2} \cdot y,$$

откуда $y = 2x$. Получаем: $BK = BM = x$, $AL = AM = 8x$, $CK = CN = 2x$, $DL = DN = 4x$, $BC = BK + KC = 3x$, $AD = AL + LD = 12x$, то есть $AD = 4BC$.

б) Заметим, что $OM = 2\sqrt{2} \cdot x = \sqrt{6}$, поэтому $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые MN и PO пересекаются в точке Q. Тогда треугольники BPC и APD подобны, поэтому $AP = 4BP$, $AB = 3BP$, $BP = 3x$, $PN = PM = 4x$. Прямая PO является серединным перпендикуляром к MN. В прямоугольном треугольнике OMP получаем:

$$OP = \sqrt{OM^2 + MP^2} = 2\sqrt{6} \cdot x, \; MQ = \frac{MP \cdot MO}{PO} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot x.$$

Значит, $MN = 2MQ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot x = 4.$

Ответ: б) 4.

НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.COM

17)

Пусть сумма кредита S ежегодные выплаты x, $k = 1 + \frac{r}{100}$. По условию долг на июль меняется так:

$$S,\ kS - x,\ k^2S - kx - x,\ k^3S - k^2x - kx - x,\ k^4S - k^3x - k^2x - kx - x.$$

Если долг выплачен двумя равными платежами x_2, то $k^2S - kx_2 - x_2 = 0$, откуда

$$x_2 = \frac{k^2(k-1)}{k^2-1}S = 106\,964.$$

Если долг выплачен четырьмя равными платежами x_4, то $k^4S - k^3x_4 - k^2x_4 - kx_4 - x_4 = 0$, откуда

$$x_4 = \frac{k^4(k-1)}{k^4-1}S = 58\,564.$$

Тогда

$$\frac{x_4}{x_2} = \frac{k^2}{k^2+1} = \frac{58\,564}{106\,964} = \frac{121}{221},$$

откуда $k^2 = \frac{121}{100} \Leftrightarrow k = 1,1.$ Следовательно, $r = 10.$

Ответ: 10

НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.COM

18)

Полагая $u=\sqrt{5|x|}$, $v=\sqrt{|y+3|}$, перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} u+v=1,\\ u^4+v^4=16a. \end{cases}$$

Заметим, что если хотя бы одна из переменных u, v отрицательна, то исходная система не имеет решений. Значению $u=0$ соответствует $x=0$, а значению $v=0$ соответствует $y=-3$, а каждой паре положительных значений $(u,\ v)$ соответствует по два значения исходных переменных x, y соответственно, то есть каждому такому решению соответствуют четыре решения исходной системы.

Заметим далее, что если пара (u_0, v_0) является решением системы, то и пара (v_0, u_0) — также решение этой системы, то есть исходная система получает восемь решений если $u\neq v$. Таким образом, исходная система имеет четыре решения (x, y) тогда и только тогда, когда полученная система имеет следующие решения: $\{(u_1, u_1)\}$, или $\{(u_2, 0),\ ((0, v_2))\}$, где $u_{1,2}>0$ и $v_2>0$.

Рассмотрим три случая.

1. Если $u=v$, то из первого уравнения $u=v=\frac{1}{2}$, из второго уравнения $a=\frac{1}{128}$. При найденном значении параметра система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=1,\\ u^4+v^4=\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Осталось убедиться, что данная система не имеет других решений, кроме $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Из первого уравнения $v=1-u$, подставим во второе:

$$8u^4+8(1-u)^4=1 \Leftrightarrow 16u^4-32u^3+48u^2-32u+7=0 \Leftrightarrow 16u^4-8u^3-24u^3+12u^2+36u^2-18u-14u+7=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8u^3(2u-1)-12u^2(2u-1)+18u(2u-1)-7(2u-1)=0 \Leftrightarrow (2u-1)(8u^3-12u^2+18u-7)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2u-1)(8u^3-1-6(2u^2-3u+1))=0 \Leftrightarrow (2u-1)^2(4u^2+2u+1)-6(u-1))=0 \Leftrightarrow (2u-1)^2(4u^2-4u+7)=0.$$

Последнее уравнение имеет единственный корень $u=\frac{1}{2}$. Это доказывает, что других решений система не имеет.

2. Если $u=0$, а $v=1$, то $a=\frac{1}{16}$. При этом значении параметра система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=1,\\ u^4+v^4=1, \end{cases}$$

Проверим, имеет ли данная система решения, отличные от $(0, 1)$. Из первого уравнения снова $v=1-u$, подставим во второе:

$$u^4+(1-u)^4=1 \Leftrightarrow 2u^4-4u^3+6u^2-4u=0 \Leftrightarrow u(u^3-2u^2+3u-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$u((u^3-1)-(2u^2-3u+1))=0 \Leftrightarrow u(u-1)(u^2-u+2)=0.$$

Последнее уравнение имеет два корня $u=0$ и $u=1$. Первый из них соответствует рассматриваемому случаю и двум решениям исходной системы, а второй оставшемуся случаю $v=0$ и еще двум.

3. Если $v=0$, а $u=1$, то $a=\frac{1}{16}$. Как было показано выше, данное значение параметра является искомым.

Ответ: $a=\frac{1}{128}, a=\frac{1}{16}$.

НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.COM

19)

а) Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетило не более 4 мальчиков, поскольку если бы их было 5 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{5}{5+9}=\frac{5}{14}$, что больше $\frac{4}{13}$. Аналогично, кино посетило не более 6 мальчиков, поскольку $\frac{7}{7+9}=\frac{7}{16}>\frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 10.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

Из условия:

$$\frac{m_1}{m_1+d}\leq\frac{4}{13},\frac{m_2}{m_2+d}\leq\frac{2}{5},$$

значит, $\frac{m_1}{d}\leq\frac{4}{9},\frac{m_2}{d}\leq\frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\leq\frac{10}{9}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\geq\frac{1}{\frac{10}{9}+1}=\frac{9}{19}.$$

Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{19}$.

Ответ: а) да: б) 10; в) $\frac{9}{19}$.

100balnik.com

Делаем невозможное возможным

НОВЫЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ВАРИАНТЫ НА САЙТЕ 100BALNIK.COM