Задания 13. Логические задачи повышенной сложности

1. На доске написано число. Олег играет в арифметическую игру: он может либо стереть последнюю цифру написанного числа, либо прибавить к написанному числу число 2018 и записать полученный результат, стерев предыдущее число. Может ли Олег, действуя таким образом, в конце концов получить число 1? Если да, покажите как; если нет, объясните почему.

Решение.

Если число, написанное на доске, начинается с единицы, то Олег должен просто стереть последовательно все цифры, кроме первой. Если число начинается с цифры $a \neq 1$,можно стереть все цифры, кроме первой, и затем 5 раз прибавить 2018. Получится пятизначное число, которое начинается с 1. Затем нужно стереть по очереди четыре последние цифры.

Допускается другая последовательность действий и рассуждений, обоснованно приводящая к верному ответу.

Ответ: да.

2. Друзья Алеша, Боря и Витя учатся в одном классе. Один из них ездит домой от школы на автобусе, другой — на трамвае, а третий — на троллейбусе. Однажды после уроков Алёша пошёл проводить своего друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадку!» Кто на чем ездит домой?

Решение.

Рассмотрим таблицу, в строках которой расположим виды транспорта, а в столбцах — друзей-одноклассников. Если кто-то движется на определённом виде транспорта будем отмечать это знаком «+» на соответствующем пересечении, и «−» в противном случае.

Алёша пошёл проводить своего друга до остановки автобуса, значит, он не ездит на автобусе, отметим это знаком «−» в таблице. Также мимо этих двух друзей проезжал троллейбус, значит, Алёша ездит и не на троллейбусе. Кто-то из окна троллейбуса крикнул Боре про забытую тетрадку, значит, Боря не ездит на троллейбусе. Покажем это в таблице.

	Алёша	Боря	Витя
автобус	−		
трамвай			
троллейбус	−	−	

Из этой таблицы очевидно, что Алёша ездит на трамвае, а Витя на троллейбусе. Продолжая заполнять таблицу, получим:

	Алёша	Боря	Витя
автобус	−	+	−
трамвай	+	−	−
троллейбус	−	−	+

Таким образом, получаем, что Алёша — на трамвае, Боря — на автобусе, Витя — на троллейбусе.

3. На одном заводе работают три друга: слесарь, токарь и сварщик. Их фамилии: Борисов, Иванов и Семёнов. У слесаря нет ни братьев, ни сестёр, он самый младший из друзей. Семёнов старше токаря и женат на сестре Борисова. Назовите фамилии слесаря, токаря и сварщика.

Решение.

Рассмотрим таблицу, в строках которой расположим профессии, а в столбцах — фамилии друзей. Соответствие профессии и фамилии будем обозначать знаком «+» на соответствующем пересечении, и «−», если человек данной профессией не занят.

Семёнов старше токаря, значит, он не токарь, при этом слесарь самый младший, значит, Семёнов не может быть и слесарем. У Борисова есть сестра, кроме того, мы знаем, что у слесаря нет ни братьев, ни сестёр, значит, Борисов не слесарь.

	Борисов	Иванов	Семёнов
слесарь	−		−
токарь			−
сварщик			

Из таблицы ясно, что Семёнов — сварщик, а Иванов — слесарь. Продолжая заполнять таблицу, получим:

	Борисов	Иванов	Семёнов
слесарь	−	+	−
токарь	+	−	−
сварщик	−	−	+

Таким образом, получаем, что Иванов — слесарь, Борисов — токарь, Семёнов — сварщик.

4. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода, причём вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

Решение.

Представим расположение жидкостей в сосудах в виде таблицы, где будем отмечать, что жидкость находится в сосуде знаком «+», а то, что её там быть не может знаком «−». В условии явно сказано, что, например, вода и молоко не в бутылке, отметим это в таблице. Из того, что сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом получаем, что в кувшине не лимонад и не квас.

	Бутылка	Стакан	Кувшин	Банка
Молоко	−	−		−
Лимонад			−	−
Квас			−	
Вода	−			−

Получаем, что в банке может быть только квас, следовательно, в других сосудах он не находится. Молоко может находиться только в кувшине, значит, в кувшине не лимонад, не квас и не вода. Продолжая заполнять таблицу, получим.

	Бутылка	Стакан	Кувшин	Банка
Молоко	−	−	+	−
Лимонад	+	−	−	−
Квас	−	−	−	+
Вода	−	+	−	−

Таким образом, получаем, что молоко — в кувшине, лимонад — в бутылке, квас — в банке, вода — в стакане.

5. На даче поселились пятеро мальчиков: Андрюша, Боря, Володя, Гена и Дима. Все были разного возраста: одному был 1 год, другому — 2 года, остальным 3, 4 и 5 лет. Володя был самым маленьким, Диме было столько лет, сколько Андрюше и Гене вместе. Сколько лет Боре? Возраст кого еще из мальчиков можно определить?

Решение.

Володя самый маленький, значит, ему 1 год. Возраст Димы равен сумме возрастов Андрея и Гены, нужно из чисел 2, 3, 4, 5 выбрать три числа так, чтобы получилось верное равенство вида $a = b + c$ подходят только числа 2, 3 и 5. Причём, ясно, что Диме 5 лет, а вот возраст Андрея и Гены точно определить нельзя: кому-то из них 2 года, а кому-то 3. Из вышесказанного можно заключить, что возраст Бори 4 года.

Таким образом, можно определить возраст трёх ребят. Боре 4 года, Володе 1 год, Диме 5 лет.

6. Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы рады бы отпустить тебя, но по нашему закону ты должен сказать какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы съедим тебя. Если оно окажется ложным, тебя съест наш ручной лев.» Что сказать Робинзону, чтобы людоеды его отпустили?

Решение.

«Меня съест Ваш ручной лев». Это утверждение не истинно и не ложно.

7. В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденной муке. На суде Мартовский Заяц заявил, что муку украл Болванщик. В свою очередь Болванщик и Соня дали показания, которые по каким-то причинам не были записаны. В ходе судебного заседания выяснилось, что муку украл лишь один из трёх подсудимых и что только он дал правдивые показания. Кто украл муку?

Решение.

Рассмотрим возможные случаи.

1. Предположим, что украл Мартовский Заяц, тогда он должен говорить правду. Тогда его показание: «муку украл Болванщик» не соответствует предположению.

2. Если украл Болванщик, то он говорит правду, а Заяц — ложь. Тогда ложное высказывание зайца не соответствует предположению.

Так как сказано, что муку украл лишь один из трёх подсудимых, остаётся только Соня.

Ответ: Соня.

8. На суде каждый из троих подсудимых обвинял одного из двух других. Оказалось, что первый был единственным, кто говорил правду. Если бы каждый стал обвинять другого из них (но не себя), то второй был бы единственным, кто сказал правду. Кто виновен?

Решение.

Если на суде каждый из троих подсудимых обвинял одного из двух других, то первый мог обвинить второго или третьего. И он бы оказался прав.

Если бы каждый стал обвинять другого из них (но не себя), то второй мог обвинить первого и третьего. И также был прав.

Таким образом, виновен второй или третий и одновременно первый или третий. Поэтому виновен третий.

Ответ: третий подсудимый.

9. Как, имея лишь два сосуда ёмкостью 5 и 7 л, налить из крана 6 л воды?

Решение.

Представим переливания в виде таблицы. В строках приведены объёмы воды в соответствующих сосудах на каждом этапе переливания.

7-литровый сосуд	0	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6
5-литровый сосуд	0	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5

10. В первый сосуд входит 9 л, во второй — 5 л, а в третий — 3 л. Первый сосуд наполнен водой, а остальные два пусты. Как с помощью этих сосудов отмерить 1 л воды? Как отмерить 4 л воды?

Решение.

Из первого сосуда перельём три литра воды в третий сосуд. Из первого сосуда перельём 5 литров воды во второй сосуд, тогда в первом сосуде останется 1 литр воды. Вспомним, что в третьем сосуде теперь 3 литра воды, перельём эту воду в первый сосуд, тогда в первом сосуде окажется 4 литра воды.

Можно представить эти переливания в виде таблицы. В строках приведены объёмы воды в соответствующих сосудах на каждом этапе переливания.

3-литровый сосуд	0	3	3	0
5-литровый сосуд	0	0	5	5
9-литровый сосуд	9	6	1	4

11. В бочке находится не менее 13 вёдер бензина. Как отлить из неё 8 вёдер с помощью 9-ведёрной и 5-ведёрной бочек?

Решение.

Представим переливания в виде таблицы. В строках приведены объёмы воды в соответствующих сосудах на каждом этапе переливания.

9-вёдерная бочка	9	4	4	0	9	8	8
5-вёдерная бочка	0	5	0	4	4	5	0
Большая бочка (a>13)	a−9	a−9	a−4	a−4	a−13	a−13	a−8

12. 12-ведёрная бочка наполнена керосином. Как разлить его на две равные части, пользуясь пятиведёрной и восьмиведёрной бочками?

Решение.

Представим переливания в виде таблицы. В строках приведены объёмы воды в соответствующих сосудах на каждом этапе переливания.

12-вёдерная бочка	12	4	4	9	9	1	1	6
8-вёдерная бочка	0	8	3	3	0	8	6	6
5-вёдерная бочка	0	0	5	0	3	3	5	0

13. Как взвесить груз на чашечных весах с гирями, если гири правильные, а весы неправильные?

Решение.

Уравновесим груз гирями. Затем груз уберем, оставив гири на другой чашке весов, и заменив груз таким новым набором гирь, чтобы снова весы оказались в равновесии. Груз весит столько, сколько весит этот набор.

14. Есть четыре камня, разной массы. За какое наименьшее число взвешиваний на весах без гирь можно найти самый тяжёлый и лёгкий камни?

Решение.

Взвешиваем 1 и 2, 3 и 4 камни. Затем сравниваем массы двух более лёгких и двух более тяжёлых камней двумя взвешиваниями. Всего 4 взвешивания.

15. Докажите что, среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся хотя бы два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки.

Решение.

При делении на n всего может получиться n различных остатков: 0, 1, ..., $n-1$. Таким образом, гарантируется что среди $n+1$ остатка найдутся как минимум два одинаковых.

16. Среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся два числа таких, что их разность делится на n.

Решение.

При делении на n всего может получиться n различных остатков: 0, 1, ..., n − 1. Таким образом, гарантируется что среди $n+1$ остатков найдутся как минимум два одинаковых. Если у двух чисел одинаковые остатки (при делении на n), то их разность делится на n.

17. Доказать, что из любых трёх целых чисел можно найти два, сумма которых чётна.

Решение.

Среди трёх чисел найдутся два одинаковой чётности. Сумма двух чисел одинаковой чётности — чётное число.

18. Можно ли 25 рублей разменять десятью купюрами по 1, 3 и 5 рублей?

Решение.

Нельзя. Сумма 10 нечётных чисел — четна.

19. Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять 1. Можно ли все числа сделать равными?

Решение.

Нет. За каждый шаг сумма всех написанных чисел увеличивается на 2. Так как вначале сумма равна 21, то она всегда будет оставаться нечётной. А сумма шести одинаковых чисел чётна.

20. На столе семь перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

Решение.

Нельзя. Чётность перевернутых стаканов не меняется.

21. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать банан и ананас, то вырастет банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если неизвестно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

Решение.

Чётность числа бананов не меняется, поэтому, если число бананов было чётным, то оставшийся плод — ананас, если нечётным, — то банан.

22. Иван-царевич имеет два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу 21 голову, а второй — 4 головы, но тогда у Змея Горыныча отрастает 2020 голов. (Однако если, например, у Змея Горыныча осталось лишь 3 головы, то рубить их ни тем, ни другим мечом нельзя.) Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов?

Решение.

Иван может за один раз увеличить количество голов на 2016 или уменьшить на 21. Оба этих числа кратны 7. Поэтому, сколько бы Иван не рубил мечами головы животному, число 100 (начальное количество голов) изменится на число, кратное 7. Но само число 100 не кратно 7, поэтому получить 0 голов не получится.

23. За один ход число, написанное на доске, разрешается либо заменить на удвоенное, либо стереть у него последнюю цифру. Вначале на доске написано число 456. Можно ли из него получить число 14?

Решение.

Можно: 456, 45, 90, 9, 18, 36, 72, 7, 14.

24. Двое играют в следующую игру. Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?

Решение.

После каждого хода количество кучек камней увеличивается на 1. Сначала их было 3, в конце — 45. Таким образом, всего будет сделано 42 хода. Последний, 42-й, ход сделает второй игрок.

25. Двое по очереди ломают шоколадку 6 x 8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, тот, кто делает первый ход, или второй?

Решение.

После каждого хода количество кусков увеличивается ровно на 1. Выигрывает первый игрок.

26. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход можно стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать 2, а если разными — 1. Если последняя оставшаяся на доске цифра — 1, то выиграл первый игрок, если 2 — то второй. Кто при правильной игре выиграет?

Решение.

Чётность числа единиц на доске после каждого хода не меняется. Поскольку сначала единиц было чётное число, то после последнего хода на доске не может оставаться одна (нечётное число!) единица. Выигрывает второй игрок.

27. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били Друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выиграет?

Решение.

После каждого хода и количество вертикалей, и количество горизонталей, на которые можно поставить ладей, уменьшается на 1, поэтому игра будет продолжаться ровно 8 ходов. Последний, выигрышный ход будет сделан вторым.

28. Двое игроков по очереди расставляют между числами от 1 до 20, выписанными в строчку, «+» и «−». После того. как все места заполнены считается результат. Если он чётен, то выигрывает первый игрок, если нечётен, то — второй. Кто из игроков выиграет?

Решение.

Чётность результата не зависит от расстановки плюсов и минусов, а зависит только от количества нечётных чисел в первоначальном наборе. Так как в данном случае их 10 (т. е. чётное число), то выигрывает первый игрок.

29. В строчку написаны 10 единиц. Лёша и Витя по очереди ставят между какими-нибудь соседними числами знак: «+» или «−». Когда между всеми соседними числами поставлен какой-нибудь знак, вычисляется результат. Если полученное число чётное, то выигрывает Лёша, а если нечётное, то — Витя. Кто из ребят выиграл?

Решение.

Чётность результата не зависит от расстановки плюсов и минусов, а зависит только от количества нечётных чисел в первоначальном наборе. Так как в данном случае их 10 (т. е. чётное число), то выигрывает первый игрок (Лёша).

30. Вася и Петя выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Докажите, что какие 6ы цифры он не писал, Петя всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 4.

Решение.

Если Вася 11-м ходом ставит чётное число, то Петя ставит 4, а если Вася ставит нечётное число, то Петя ставит 2.

31. Двое выписывают шестизначное число, выставляя по очереди по одной цифре, начиная со старшего разряда. Если получившееся число разделится нацело на 7, то выигрывает сделавший последний ход, иначе — начинающий. Кто выиграет в такой игре?

Решение.

Из 10 чисел с последней цифрой 0, 1, ... , 9 всегда найдется делящееся на 7, поэтому выигрывает второй.

32. Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

Решение.

Среди этих трёх чисел, идущих подряд, есть хотя бы одно чётное число и одно число, делящееся на 3. Поэтому их произведение делится на 6.

33. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится на 30.

Решение.

Среди чисел есть числа, кратные 3, 5 и два чётных, одно из них делится на 4.

34. Коля и Петя купили одинаковые беговые лыжи. Сколько стоит одна пара лыж, если Петя уплатил стоимость лыж трёхрублёвыми купюрами, Коля — пятирублёвыми, а всего они дали в кассу меньше 10 купюр?

Решение.

15 руб. Цена лыж делится на 3 и на 5.

35. Найти такие четыре натуральных числа, что произведение любых трёх из них, сложенное с единицей, делится на четвёртое.

Решение.

Например, числа: 1, 2, 3, 7.

36. Чтобы узнать, является ли число 1601 простым, его стали последовательно делить на 2, 3, 5 и т. д. На каком простом числе можно прекратить испытания?

Решение.

Число 1601 лежит между числами $40 \cdot 40 = 1600$ и $40 \cdot 41 = 1640$. Поэтому если 1601 разлагается в произведение двух сомножителей, то меньший не больше 40. Наибольшее простое число, меньшее 40, равно 37.

Ответ: 37.

Примечание.

Число 1601 не разделится без остатка на простые числа 2, 3, 5, ..., 37. Из этого можно заключить, что 1601 — простое число.

37. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причём одинаковые цифры — на одинаковые буквы, а разные — на разные. В итоге у него получилось *АБ · ВГ = ДДЕЕ*. Докажите, что он где-то ошибся.

Решение.

Число слева не делится на 11, а справа — делится (при делении получается число Д0Е).

38. Сколько имеется четырёхзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97?

Решение.

Чтобы число делилось на 45 оно должно делиться на 9 и на 5. Число делится на 5, если оно оканчивается на 0 или 5. Число делится на 9, если сумма всех цифр числа делится на 9. Учитывая эти ограничения, получим, что чисел, удовлетворяющих условиям задачи два: 2970 и 6975.

39. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

Решение.

Результатом могут быть числа: 1155, 3150, 4155, 6150, 7155, 9150.

40. Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

Решение.

Чтобы число делилось на 36, оно должно делится на 9 и 4 одновременно. Для делимости на 4 достаточно, чтобы две последних цифры делились на 4, а для 9 — сумма цифр делилось на 9. Так как нужно найти наименьшее число, используя все 10 цифр, получаем 1023456789, но оно не соответствует делимости на 4. Пробуем менять местами две последние цифры, получаем 1023456798 — не подходит. Так далее до 4 цифр — 1023457896.

Ответ: 1023457896.

41. Тренер купил несколько мячей, скакалок, обручей и заплатил за все покупки 1690 рублей. Скакалка стоит 260 рублей, обруч — 130 рублей, мяч — 100 рублей. Сколько мячей, скакалок и обручей купил тренер? Ответ поясните.

Решение.

Из условия следует, что тренер купил как минимум одну скакалку, один обруч и один мяч. Числа 1690, 260 и 130 кратны 13. Число 100 не кратно 13, значит, общая стоимость мячей должна быть кратна 13. Предположим, что мячей 13. Тогда $1690 - 13 \cdot 100 = 390$ — столько денег останется на покупку скакалок и обручей. Получаем, что 390 — сумма при покупке 1 скакалки и 1 обруча.

Ответ: 13 мячей, 1 скакалка и 1 обруч.

42. Тренер купил несколько мячей, скакалок, обручей и заплатил за все покупки 1540 рублей. Скакалка стоит 330 рублей, обруч — 220 рублей, мяч — 90 рублей. Сколько мячей, скакалок и обручей купил тренер? Ответ поясните.

Решение.

Из условия следует, что тренер купил как минимум одну скакалку, один обруч и один мяч. Числа 1540, 330 и 220 кратны 11. Число 90 не кратно 11, значит, общая стоимость мячей должна быть кратна 11. Предположим, что мячей 11. Тогда $1540 - 11 \cdot 90 = 550$ — столько денег останется на покупку скакалок и обручей. Получаем, что 550 — сумма при покупке 1 скакалки и 1 обруча.

Ответ: 11 мячей, 1 скакалка и 1 обруч.

43. Задумали двузначное число. Когда это число умножили на произведение его цифр, получили 255. Какое число задумали? Напишите свое решение.

Решение.

Разложим число 255 на простые множители: $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$. Отсюда следует, что задуманное число делится на 17. Тогда оно может равняться 17, 34, 51, 68 или 85. Из этих чисел только 51 и 85 имеют в своей записи цифлу 5. Проверим их:

$$51 \cdot 5 \cdot 1 = 255,$$
$$85 \cdot 5 \cdot 8 = 3400.$$

Допускается другая последовательность действий и рассуждений, обоснованно приводящая к верному ответу.

Ответ: 51.

44. Задумали двузначное число. Когда это число умножили на произведение его цифр, получили 744. Какое число задумали. Напишите свое решение.

Решение.

Разложим число 744 на простые множители: $744 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 31$. Отсюда следует, что задуманное число делится на 31. Тогда оно может равняться 31, 62, 93. Проверим каждое из них:

$$31 \cdot 3 = 93,$$
$$62 \cdot 12 = 744,$$
$$93 \cdot 27 = 2511.$$

Допускается другая последовательность действий и рассуждений, обоснованно приводящая к верному ответу.

Ответ: 62.

45. Задумали двузначное число. Когда это число умножили на произведение его цифр, получили 819. Какое число задумали. Напишите свое решение.

Решение.

Разложим число 819 на простые множители: $819 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$. Отсюда следует, что задуманное число делится на 13. Тогда оно может равняться 13, 26, 39, 52, 65, 78. Так как 819 нечетное, в задуманном числе только нечетные цифры. Значит, оно может равняться 13, 39 или 91. Проверим эти числа:

$$13 \cdot 3 = 39,$$
$$39 \cdot 27 = 1053,$$
$$91 \cdot 9 = 819.$$

Допускается другая последовательность действий и рассуждений, обоснованно приводящая к верному ответу.

Ответ: 91.

46. Задумали двузначное число. Когда это число умножили на произведение его цифр, получили 312. Какое число задумали. Напишите свое решение.

Решение.

Разложим число 312 на простые множители: $312 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$. Отсюда следует, что задуманное число делится на 13. Тогда оно может равняться 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91. Проверим каждое из них:

$$13 \cdot 3 = 39,$$
$$26 \cdot 12 = 312.$$

Допускается другая последовательность действий и рассуждений, обоснованно приводящая к верному ответу.

Ответ: 26.

47. Задумали двузначное число. Когда это число умножили на произведение его цифр, получилось 912. Какое число задумали? Напишите своё решение.

Решение.

Разложим число 912 на простые множители: $912 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19$. Отсюда следует, что задуманное число делится на 19. Тогда оно может равняться 19, 38, 57, 76 или 95. Так как число 912 чётное, задуманное число содержит хотя бы одну чётную цифру. Значит, оно может равняться 38 или 76. Проверим эти числа:

$$38 \cdot 24 = 912,$$
$$76 \cdot 42 = 3192.$$

Ответ: 38.

48. Задумали двузначное число, которое делится на 15. Когда к этому числу приписали справа его последнюю цифру, получилось трёхзначное число, которое при делении на 9 даёт остаток 3. Какое число задумали? Напишите своё решение.

Решение.

Из всех двузначных чисел кратны 15 только 15, 30, 45, 60, 75, 90. Если приписать к ним справа их последнюю цифру, то мы получим ряд: 155, 300, 455, 600, 755, 900. Поделим каждое из них, кроме последнего, и найдем получившийся остаток:

$$155 : 9 = 17 \text{ (ост. 2)}$$
$$300 : 9 = 33 \text{ (ост. 3)}$$
$$455 : 9 = 50 \text{ (ост. 5)}$$
$$600 : 9 = 66 \text{ (ост. 6)}$$
$$755 : 9 = 83 \text{ (ост. 8)}$$

Ответ: 30.

49. Задумали двузначное число, которое делится на 15. Когда к этому числу приписали справа его последнюю цифру, получилось трёхзначное число, которое при делении на 9 даёт остаток 6. Какое число задумали? Напишите своё решение.

Решение.

Задуманное число делится на 3. Полученное трехзначное число тоже делится на 3. Значит, приписанная цифра делится на 3. Эта цифра делится на 5, поскольку задуманное число делится на 5. Значит, эта цифра равна 0.

Выпишем все двузначные числа, которые оканчиваются нулем и делятся на 15: 30, 60, 90.

Проверим их:

300 при делении на 9 дает остаток 3,

600 при делении на 9 дает остаток 6,

900 делится 9 без остатка.

Ответ: 60.

50. Задумано двузначно число, которое делится на 5. К нему справа приписали это же число еще раз. Оказалось, что получившееся четырехзначное число делится на 11. Какое число задумали? Напишите свое решение.

Решение.

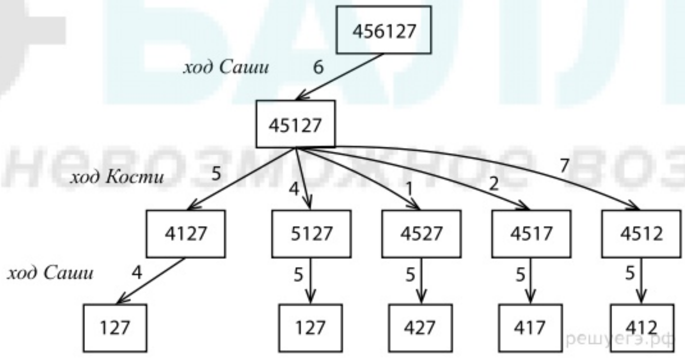
Пусть x — задуманное число, тогда полученное четырехзначное число равно 101 x. Оно, по условию, делится на 11. Отсюда следует, что x делится на 11, так как число 101 простое. Поскольку задуманное двузначное число делится на 5 и 11, оно равно 55.

Ответ: 55.

51. Саша и Костя по очереди вычеркивают по одной цифре из числа 456127, пока не останется трехзначное число. Саша начинает, и его задача — сделать трехзначное число как можно меньше. а Костя хочет, чтобы трехзначное число было как можно больше. Может ли Саша получить число меньше 445, как бы не действовал Костя? Напишите свое решение.

Решение.

Для того, чтобы получить наименьшее число, Саша должен вычёркивать самую большую из имеющихся цифр, учитывая разряд, то есть, сначала он должен вычеркнуть цифру 6. Удобно показать решение в виде дерева.



Другое решение.

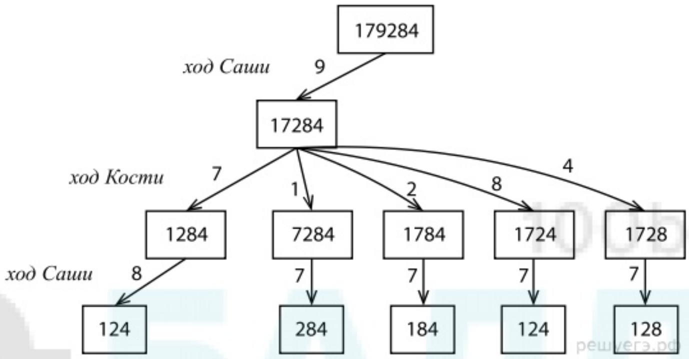
Сначала Саша вычёркивает 6; если затем Костя вычёркивает 5, то Саша — 4, остаётся 127, а если Костя вычёркивает не 5, то Саша вычёркивает 5. Тогда остаётся одно из чисел 127, 427, 417 или 412. Все эти числа меньше 445.

Ответ: да, может.

52. Саша и Костя по очереди вычеркивают по одной цифре из числа 179284, пока не останется трехзначное число. Саша начинает, и его задача — сделать трехзначное число как можно меньше. а Костя хочет, чтобы трехзначное число было как можно больше. Может ли Саша получить число меньше 295, как бы не действовал Костя? Напишите свое решение.

Решение.

Для того, чтобы получить наименьшее число, Саша должен вычёркивать самую большую из имеющихся цифр, учитывая разряд, то есть, сначала он должен вычеркнуть цифру 9. Удобно показать решение в виде дерева.



Другое решение.

Сначала Саша вычёркивает 9; если затем Костя вычёркивает 7, то Саша — 8, остаётся 124, а если Костя вычёркивает не 7, то Саша вычёркивает 7. Тогда остаётся одно из чисел 284, 184, 124 или 128. Все эти числа меньше 295.

Ответ: да, может.

53. В мешке находится 31 белая перчатка и 32 чёрные перчатки. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

Решение.

На каждом шаге число белых перчаток либо не меняется, либо уменьшается на два. Так как число белых перчаток вначале было нечётным, после каждого шага их число также нечётно. Если последняя перчатка окажется чёрной,
то получится, что белых перчаток осталось 0. Это невозможно. Значит, останется белая перчатка.

Ответ: Белая перчатка.

54. В мешке находится 21 белая перчатка и 26 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

Решение.

На каждом шаге число белых перчаток либо не меняется, либо уменьшается на два. Так как число белых перчаток вначале было нечётным, после каждого шага их число также нечётно. Если последняя перчатка окажется чёрной,
то получится, что белых перчаток осталось 0. Это невозможно. Значит, останется белая перчатка.

Ответ: Белая перчатка.

55. В мешке находится 22 белые перчатки и 25 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

Решение.

На каждом шаге число белых перчаток либо не меняется, либо уменьшается на два. Так как число белых перчаток вначале было чётным, после каждого шага их число также чётно. Поэтому одна белая перчатка остаться в мешке не может. Значит, последней окажется чёрная перчатка.

Ответ: Черная перчатка.

56. В мешке находится 24 белые перчатки и 20 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

Решение.

На каждом шаге число белых перчаток либо не меняется, либо уменьшается на два. Так как число белых перчаток вначале было чётным, после каждого шага их число также чётно. Поэтому одна белая перчатка остаться в мешке не может. Значит, последней окажется чёрная перчатка.

Ответ: Черная перчатка.

57. В мешке находится 27 белых перчаток и 29 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

Решение.

На каждом шаге число белых перчаток либо не меняется, либо уменьшается на два. Так как число белых перчаток вначале было нечётным, после каждого шага их число также нечётно. Если последняя перчатка окажется чёрной,
то получится, что белых перчаток осталось 0. Это невозможно. Значит, останется белая перчатка.

Ответ: Белая перчатка.

58. В мешке находится 33 белые перчатки и 30 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

Решение.

На каждом шаге число белых перчаток либо не меняется, либо уменьшается на два. Так как число белых перчаток вначале было нечётным, после каждого шага их число также нечётно. Если последняя перчатка окажется чёрной,
то получится, что белых перчаток осталось 0. Это невозможно. Значит, останется белая перчатка.

Ответ: Белая перчатка.

59. В мешке находится 28 белых перчаток и 31 чёрная перчатка. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

Решение.

На каждом шаге число белых перчаток либо не меняется, либо уменьшается на два. Так как число белых перчаток вначале было чётным, после каждого шага их число также чётно. Поэтому одна белая перчатка остаться в мешке не может. Значит, последней окажется чёрная перчатка.

Ответ: Черная перчатка.

60. В мешке находится 30 белых перчаток и 34 чёрные перчатки. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

Решение.

На каждом шаге число белых перчаток либо не меняется, либо уменьшается на два. Так как число белых перчаток вначале было чётным, после каждого шага их число также чётно. Поэтому одна белая перчатка остаться в мешке не может. Значит, последней окажется чёрная перчатка.

Ответ: Черная перчатка.

61. В мешке находится 32 белые перчатки и 28 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

Решение.

На каждом шаге число белых перчаток либо не меняется, либо уменьшается на два. Так как число белых перчаток вначале было чётным, после каждого шага их число также чётно. Поэтому одна белая перчатка остаться в мешке не может. Значит, последней окажется чёрная перчатка.

Ответ: Черная перчатка.

62. В мешке находится 29 белых перчаток и 31 чёрная перчатка. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

Решение.

На каждом шаге число белых перчаток либо не меняется, либо уменьшается на два. Так как число белых перчаток вначале было нечётным, после каждого шага их число также нечётно. Если последняя перчатка окажется чёрной,
то получится, что белых перчаток осталось 0. Это невозможно. Значит, останется белая перчатка.

Ответ: Белая перчатка.

63. Саша, Петя и Вася играли в снежки. Первым кинул снежок Саша и попал в Петю. Каждый мальчик в ответ на каждый попавший в него снежок кидает два снежка (не обязательно в того, кто в него попал). Некоторые снежки ни в кого не попали. Всего было четыре попадания. Сколько снежков ни в кого не попало?

Решение.

Всего было брошено $1 + 4 \cdot 2 = 9$ снежков.

Значит, ни в кого не попало $9 - 4 = 5$ снежков.

Ответ: 5 снежков.

64. Катя, Вова и Женя играли в снежки. Первым кинул снежок Вова и попал в Женю. Каждый ребёнок в ответ на каждый попавший в него снежок кидает три снежка (не обязательно в того, кто в него попал). Некоторые снежки ни в кого не попали. Всего было четыре попадания. Сколько снежков ни в кого не попало?

Решение.

Всего было брошено $1 + 4 \cdot 3 = 13$ снежков.

Значит, ни в кого не попало $13 - 4 = 9$ снежков.

Ответ: 9 снежков.

65. Петя, Даша и Маша играли в снежки. Первым кинул снежок Петя и попал в Дашу. Каждый ребёнок в ответ на каждый попавший в него снежок кидает два снежка (не обязательно в того, кто в него попал). Некоторые снежки ни в кого не попали. Всего было пять попаданий. Сколько снежков ни в кого не попало?

Решение.

Всего было брошено $1 + 5 \cdot 2 = 11$ снежков.

Значит, ни в кого не попало $11 - 5 = 6$ снежков.

Ответ: 6 снежков.

66. Саша, Света и Юра играли в снежки. Первым кинул снежок Юра и попал в Сашу. Каждый ребёнок в ответ на каждый попавший в него снежок кидает три снежка (не обязательно в того, кто в него попал). Некоторые снежки ни в кого не попали. Всего было три попадания. Сколько снежков ни в кого не попало?

Решение.

Всего было брошено $1 + 3 \cdot 3 = 10$ снежков.

Значит, ни в кого не попало $10 - 3 = 7$ снежков.

Ответ: 7 снежков.

67. Маша, Вера и Егор играли в снежки. Первым кинул снежок Егор и попал в Машу. Каждый ребёнок в ответ на каждый попавший в него снежок кидает три снежка (не обязательно в того, кто в него попал). Некоторые снежки ни в кого не попали. Всего было пять попаданий. Сколько снежков ни в кого не попало?

Решение.

Всего было брошено $1 + 5 \cdot 3 = 16$ снежков.

Значит, ни в кого не попало $16 - 5 = 11$ снежков.

Ответ: 11 снежков.

68. Вася и Маша не умеют сокращать дроби. Они делают это неправильно. Вася думает, что нужно от числителя отнять 3, а от знаменателя отнять 2. Вася делает так: $\frac{6}{4} = \frac{6-3}{4-2} = \frac{3}{2}$. Маша считает, что нужно от числителя отнять 2, а от знаменателя отнять 1. Маша делает так: $\frac{4}{2} = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1}$. Вася и Маша (не обязательно по очереди) двадцать раз «сократили» дробь $\frac{2018}{2019}$ по своим правилам и получили дробь со знаменателем 1995. Найдите числитель получившейся дроби. Запишите решение и ответ.

Решение.

После каждого «сокращения» данной дроби разность между знаменателем и числителем увеличивается на 1. Значит, после двадцати преобразований эта разность равна $2019 - 2018 + 20 = 21$, поэтому числитель равен $1995 - 21 = 1974$.

Ответ: 1974.

69. Коля и Ира не умеют сокращать дроби. Они делают это неправильно. Коля думает, что нужно от числителя отнять 2, а от знаменателя отнять 1. Коля делает так: $\frac{4}{2}=\frac{4-2}{2-1}=\frac{2}{1}$. Ира считает, что нужно от числителя отнять 4, а от знаменателя отнять 3. Ира делает так: $\frac{8}{6}=\frac{8-4}{6-3}=\frac{4}{3}$. Коля и Ира (не обязательно по очереди) двадцать раз «сократили» дробь $\frac{2018}{2019}$ по своим правилам и получили дробь с числителем 1966. Найдите знаменатель получившейся дроби. Запишите решение и ответ.

Решение.

После каждого «сокращения» данной дроби разность между знаменателем и числителем увеличивается на 1. Значит, после двадцати преобразований эта разность равна $2019-2018+20=21$, поэтому знаменатель равен $1966+21=1987$.

Ответ: 1987.

70. Олег и Аня не умеют сокращать дроби. Они делают это неправильно. Олег думает, что нужно от числителя отнять 4, а от знаменателя отнять 3. Олег делает так: $\frac{8}{6}=\frac{8-4}{6-3}=\frac{4}{3}$. Аня считает, что нужно от числителя отнять 3, а от знаменателя отнять 2. Аня делает так: $\frac{6}{4}=\frac{6-3}{4-2}=\frac{3}{2}$. Олег и Аня (не обязательно по очереди) тридцать раз «сократили» дробь $\frac{2018}{2019}$ по своим правилам и получили дробь со знаменателем 1952. Найдите числитель получившейся дроби. Запишите решение и ответ.

Решение.

После каждого «сокращения» данной дроби разность между знаменателем и числителем увеличивается на 1. Значит, после тридцати преобразований эта разность равна $2019-2018+30=31$, поэтому числитель равен $1952-31=1921$.

Ответ: 1921.

71. Ваня и Аня не умеют сокращать дроби. Они делают это неправильно. Ваня думает, что нужно от числителя отнять 2, а от знаменателя отнять 3. Ваня делает так: $\frac{4}{6}=\frac{4-2}{6-3}=\frac{2}{3}$. Аня считает, что нужно от числителя отнять 1, а от знаменателя отнять 2. Аня делает так: $\frac{2}{4}=\frac{2-1}{4-2}=\frac{1}{2}$. Ваня и Аня (не обязательно по очереди) двадцать раз «сократили» дробь $\frac{2019}{2018}$ по своим правилам и получили дробь с числителем 1992. Найдите знаменатель получившейся дроби. Запишите решение и ответ.

Решение.

После каждого «сокращения» данной дроби разность между знаменателем и числителем увеличивается на 1. Значит, после двадцати преобразований эта разность равна $2019-2018+20=21$, поэтому знаменатель равен $1992-21=1971$.

Ответ: 1971.

72. Коля и Оля не умеют сокращать дроби. Они делают это неправильно. Коля думает,что нужно от числителя отнять 3, а от знаменателя отнять 4. Коля делает так: $\frac{6}{8}=\frac{6-3}{8-4}=\frac{3}{4}$. Оля считает, что нужно от числителя отнять 2, а от знаменателя отнять 3. Оля делает так: $\frac{4}{6}=\frac{4-2}{6-3}=\frac{2}{3}$. Коля и Оля (не обязательно по очереди) пятнадцать раз «сократили» дробь $\frac{2019}{2018}$ по своим правилам и получили дробь со знаменателем 1968. Найдите числитель получившейся дроби. Запишите решение и ответ.

Решение.

После каждого «сокращения» данной дроби разность между знаменателем и числителем увеличивается на 1. Значит, после пятнадцати преобразований эта разность равна $2019-2018+15=16$, поэтому числитель равен $1968+16=1984$.

Ответ: 1984.

73. В мешке находятся 29 белых перчаток и 31 чёрная перчатка. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней? Запишите решение и ответ.

Решение.

После каждого «сокращения» данной дроби разность между знаменателем и числителем увеличивается на 1. Значит, после пятнадцати преобразований эта разность равна $2019-2018+15=16$, поэтому числитель равен $1968+16=1984$.

Ответ: белая перчатка.

74. В мешке находятся 32 белые перчатки и 28 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней? Запишите решение и ответ.

Решение.

В мешке находятся 32 белые перчатки и 28 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней? Запишите решение и ответ.

Ответ: чёрная перчатка.