

Задания 13. Логические задачи повышенной сложности

1. На доске написано число. Олег играет в арифметическую игру: он может либо стереть последнюю цифру написанного числа, либо прибавить к написанному числу число 2018 и записать полученный результат, стерев предыдущее число. Может ли Олег, действуя таким образом, в конце концов получить число 1? Если да, покажите как; если нет, объясните почему.

2. Друзья Алеша, Боря и Витя учатся в одном классе. Один из них ездит домой от школы на автобусе, другой — на трамвае, а третий — на троллейбусе. Однажды после уроков Алёша пошёл проводить своего друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадку!» Кто на чем ездит домой?

3. На одном заводе работают три друга: слесарь, токарь и сварщик. Их фамилии: Борисов, Иванов и Семёнов. У слесаря нет ни братьев, ни сестёр, он самый младший из друзей. Семёнов старше токаря и женат на сестре Борисова. Назовите фамилии слесаря, токаря и сварщика.

4. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода, причём вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

5. На даче поселились пятеро мальчиков: Андрюша, Боря, Володя, Гена и Дима. Все были разного возраста: одному был 1 год, другому — 2 года, остальным 3, 4 и 5 лет. Володя был самым маленьким, Диме было столько лет, сколько Андрюше и Гене вместе. Сколько лет Боре? Возраст кого еще из мальчиков можно определить?

6. Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы рады бы отпустить тебя, но по нашему закону ты должен сказать какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы съедем тебя. Если оно окажется ложным, тебя съест наш ручной лев.» Что сказать Робинзону, чтобы людоеды его отпустили?

7. В Стране Чудес проводилось следствие по делу об украденной муке. На суде Мартовский Заяц заявил, что муку украл Болванщик. В свою очередь Болванщик и Соня дали показания, которые по каким-то причинам не были записаны. В ходе судебного заседания выяснилось, что муку украл лишь один из трёх подсудимых и что только он дал правдивые показания. Кто украл муку?

8. На суде каждый из троих подсудимых обвинял одного из двух других. Оказалось, что первый был единственным, кто говорил правду. Если бы каждый стал обвинять другого из них (но не себя), то второй был бы единственным, кто сказал правду. Кто виновен?

9. Как, имея лишь два сосуда ёмкостью 5 и 7 л, налить из крана 6 л воды?

10. В первый сосуд входит 9 л, во второй — 5 л, а в третий — 3 л. Первый сосуд наполнен водой, а остальные два пусты. Как с помощью этих сосудов отмерить 1 л воды? Как отмерить 4 л воды?

11. В бочке находится не менее 13 вёдер бензина. Как отлить из неё 8 вёдер с помощью 9-ведёрной и 5-ведёрной бочек?

12. 12-ведёрная бочка наполнена керосином. Как разлить его на две равные части, пользуясь пятиведёрной и восьмиведёрной бочками?

13. Как взвесить груз на чашечных весах с гириями, если гири правильные, а весы неправильные?

14. Есть четыре камня, разной массы. За какое наименьшее число взвешиваний на весах без гирь можно найти самый тяжёлый и лёгкий камни?

15. Докажите что, среди любых $n + 1$ натуральных чисел найдутся хотя бы два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки.

16. Среди любых $n + 1$ натуральных чисел найдутся два числа таких, что их разность делится на n .

17. Доказать, что из любых трёх целых чисел можно найти два, сумма которых чётна.

18. Можно ли 25 рублей разменять десятью купюрами по 1, 3 и 5 рублей?
19. Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум из них прибавлять 1. Можно ли все числа сделать равными?
20. На столе семь перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?
21. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать банан и ананас, то вырастет банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если неизвестно, сколько бананов и ананасов росло вначале?
22. Иван-царевич имеет два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу 21 голову, а второй — 4 головы, но тогда у Змея Горыныча отрастает 2020 голов. (Однако если, например, у Змея Горыныча осталось лишь 3 головы, то рубить их ни тем, ни другим мечом нельзя.) Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов?
23. За один ход число, написанное на доске, разрешается либо заменить на удвоенное, либо стереть у него последнюю цифру. Вначале на доске написано число 456. Можно ли из него получить число 14?
24. Двое играют в следующую игру. Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет?
25. Двое по очереди ломают шоколадку 6×8 . За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, тот, кто делает первый ход, или второй?
26. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход можно стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать 2, а если разными — 1. Если последняя оставшаяся на доске цифра — 1, то выиграл первый игрок, если 2 — то второй. Кто при правильной игре выиграет?
27. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били Друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выиграет?
28. Двое игроков по очереди расставляют между числами от 1 до 20, выписанными в строчку, «+» и «-». После того, как все места заполнены считается результат. Если он чётен, то выигрывает первый игрок, если нечётен, то — второй. Кто из игроков выиграет?
29. В строчку написаны 10 единиц. Лёша и Витя по очереди ставят между какими-нибудь соседними числами знак: «+» или «-». Когда между всеми соседними числами поставлен какой-нибудь знак, вычисляется результат. Если полученное число чётное, то выигрывает Лёша, а если нечётное, то — Витя. Кто из ребят выиграл?
30. Вася и Петя выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Петя всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 4.
31. Двое выписывают шестизначное число, выставляя по очереди по одной цифре, начиная со старшего разряда. Если получившееся число разделится нацело на 7, то выигрывает сделавший последний ход, иначе — начинающий. Кто выиграет в такой игре?
32. Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.
33. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится на 30.
34. Коля и Петя купили одинаковые беговые лыжи. Сколько стоит одна пара лыж, если Петя уплатил стоимость лыж трёхрублёвыми купюрами, Коля — пятирублёвыми, а всего они дали в кассу меньше 10 купюр?
35. Найти такие четыре натуральных числа, что произведение любых трёх из них, сложенное с единицей, делится на четвёртое.

36. Чтобы узнать, является ли число 1601 простым, его стали последовательно делить на 2, 3, 5 и т. д. На каком простом числе можно прекратить испытания?

37. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причём одинаковые цифры — на одинаковые буквы, а разные — на разные. В итоге у него получилось $AB \cdot BG = ДДЕЕ$. Докажите, что он где-то ошибся.

38. Сколько имеется четырёхзначных чисел, которые делятся на 45, а две средние цифры у них 97?

39. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

40. Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого встречаются все 10 цифр.

41. Тренер купил несколько мячей, скакалок, обручей и заплатил за все покупки 1690 рублей. Скакалка стоит 260 рублей, обруч — 130 рублей, мяч — 100 рублей. Сколько мячей, скакалок и обручей купил тренер? Ответ поясните.

42. Тренер купил несколько мячей, скакалок, обручей и заплатил за все покупки 1540 рублей. Скакалка стоит 330 рублей, обруч — 220 рублей, мяч — 90 рублей. Сколько мячей, скакалок и обручей купил тренер? Ответ поясните.

43. Задумали двузначное число. Когда это число умножили на произведение его цифр, получили 255. Какое число задумали? Напишите свое решение.

44. Задумали двузначное число. Когда это число умножили на произведение его цифр, получили 744. Какое число задумали. Напишите свое решение.

45. Задумали двузначное число. Когда это число умножили на произведение его цифр, получили 819. Какое число задумали. Напишите свое решение.

46. Задумали двузначное число. Когда это число умножили на произведение его цифр, получили 312. Какое число задумали. Напишите свое решение.

47. Задумали двузначное число. Когда это число умножили на произведение его цифр, получилось 912. Какое число задумали? Напишите своё решение.

48. Задумали двузначное число, которое делится на 15. Когда к этому числу приписали справа его последнюю цифру, получилось трёхзначное число, которое при делении на 9 даёт остаток 3. Какое число задумали? Напишите своё решение.

49. Задумали двузначное число, которое делится на 15. Когда к этому числу приписали справа его последнюю цифру, получилось трёхзначное число, которое при делении на 9 даёт остаток 6. Какое число задумали? Напишите своё решение.

50. Задумано двузначное число, которое делится на 5. К нему справа приписали это же число еще раз. Оказалось, что получившееся четырехзначное число делится на 11. Какое число задумали? Напишите свое решение.

51. Саша и Костя по очереди вычеркивают по одной цифре из числа 456127, пока не останется трехзначное число. Саша начинает, и его задача — сделать трехзначное число как можно меньше, а Костя хочет, чтобы трехзначное число было как можно больше. Может ли Саша получить число меньше 445, как бы не действовал Костя? Напишите свое решение.

52. Саша и Костя по очереди вычеркивают по одной цифре из числа 179284, пока не останется трехзначное число. Саша начинает, и его задача — сделать трехзначное число как можно меньше, а Костя хочет, чтобы трехзначное число было как можно больше. Может ли Саша получить число меньше 295, как бы не действовал Костя? Напишите свое решение.

53. В мешке находится 31 белая перчатка и 32 чёрные перчатки. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

54. В мешке находится 21 белая перчатка и 26 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

55. В мешке находится 22 белые перчатки и 25 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

56. В мешке находится 24 белые перчатки и 20 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

57. В мешке находится 27 белых перчаток и 29 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

58. В мешке находится 33 белые перчатки и 30 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

59. В мешке находится 28 белых перчаток и 31 чёрная перчатка. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

60. В мешке находится 30 белых перчаток и 34 чёрные перчатки. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

61. В мешке находится 32 белые перчатки и 28 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

62. В мешке находится 29 белых перчаток и 31 чёрная перчатка. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней?

63. Саша, Петя и Вася играли в снежки. Первым кинул снежок Саша и попал в Петю. Каждый мальчик в ответ на каждый попавший в него снежок кидает два снежка (не обязательно в того, кто в него попал). Некоторые снежки ни в кого не попали. Всего было четыре попадания. Сколько снежков ни в кого не попало?

64. Катя, Вова и Женя играли в снежки. Первым кинул снежок Вова и попал в Женю. Каждый ребёнок в ответ на каждый попавший в него снежок кидает три снежка (не обязательно в того, кто в него попал). Некоторые снежки ни в кого не попали. Всего было четыре попадания. Сколько снежков ни в кого не попало?

65. Петя, Даша и Маша играли в снежки. Первым кинул снежок Петя и попал в Дашу. Каждый ребёнок в ответ на каждый попавший в него снежок кидает два снежка (не обязательно в того, кто в него попал). Некоторые снежки ни в кого не попали. Всего было пять попаданий. Сколько снежков ни в кого не попало?

66. Саша, Света и Юра играли в снежки. Первым кинул снежок Юра и попал в Сашу. Каждый ребёнок в ответ на каждый попавший в него снежок кидает три снежка (не обязательно в того, кто в него попал). Некоторые снежки ни в кого не попали. Всего было три попадания. Сколько снежков ни в кого не попало?

67. Маша, Вера и Егор играли в снежки. Первым кинул снежок Егор и попал в Машу. Каждый ребёнок в ответ на каждый попавший в него снежок кидает три снежка (не обязательно в того, кто в него попал). Некоторые снежки ни в кого не попали. Всего было пять попаданий. Сколько снежков ни в кого не попало?

68. Вася и Маша не умеют сокращать дроби. Они делают это неправильно. Вася думает, что нужно от числителя отнять 3, а от знаменателя отнять 2. Вася делает так: $\frac{6}{4} = \frac{6-3}{4-2} = \frac{3}{2}$. Маша считает, что нужно от числителя отнять 2, а от знаменателя отнять 1. Маша делает так: $\frac{4}{2} = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1}$. Вася и Маша (не обязательно по очереди) двадцать раз «сократили» дробь $\frac{2018}{2019}$ по своим правилам и получили дробь со знаменателем 1995. Найдите числитель получившейся дроби. Запишите решение и ответ.

69. Коля и Ира не умеют сокращать дроби. Они делают это неправильно. Коля думает, что нужно от числителя отнять 2, а от знаменателя отнять 1. Коля делает так: $\frac{4}{2} = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1}$. Ира считает, что нужно от числителя отнять 4, а от знаменателя отнять 3. Ира делает так: $\frac{8}{6} = \frac{8-4}{6-3} = \frac{4}{3}$. Коля и Ира (не обязательно по очереди) двадцать раз «сократили» дробь $\frac{2018}{2019}$ по своим правилам и получили дробь с числителем 1966. Найдите знаменатель получившейся дроби. Запишите решение и ответ.

70. Олег и Аня не умеют сокращать дроби. Они делают это неправильно. Олег думает, что нужно от числителя отнять 4, а от знаменателя отнять 3. Олег делает так: $\frac{8}{6} = \frac{8-4}{6-3} = \frac{4}{3}$. Аня считает, что нужно от числителя отнять 3, а от знаменателя отнять 2. Аня делает так: $\frac{6}{4} = \frac{6-3}{4-2} = \frac{3}{2}$. Олег и Аня (не обязательно по очереди) тридцать раз «сократили» дробь $\frac{2018}{2019}$ по своим правилам и получили дробь со знаменателем 1952. Найдите числитель получившейся дроби. Запишите решение и ответ.

71. Ваня и Аня не умеют сокращать дроби. Они делают это неправильно. Ваня думает, что нужно от числителя отнять 2, а от знаменателя отнять 3. Ваня делает так: $\frac{4}{6} = \frac{4-2}{6-3} = \frac{2}{3}$. Аня считает, что нужно от числителя отнять 1, а от знаменателя отнять 2. Аня делает так: $\frac{2}{4} = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$. Ваня и Аня (не обязательно по очереди) двадцать раз «сократили» дробь $\frac{2019}{2018}$ по своим правилам и получили дробь с числителем 1992. Найдите знаменатель получившейся дроби. Запишите решение и ответ.

72. Коля и Оля не умеют сокращать дроби. Они делают это неправильно. Коля думает, что нужно от числителя отнять 3, а от знаменателя отнять 4. Коля делает так: $\frac{6}{8} = \frac{6-3}{8-4} = \frac{3}{4}$. Оля считает, что нужно от числителя отнять 2, а от знаменателя отнять 3. Оля делает так: $\frac{4}{6} = \frac{4-2}{6-3} = \frac{2}{3}$. Коля и Оля (не обязательно по очереди) пятнадцать раз «сократили» дробь $\frac{2019}{2018}$ по своим правилам и получили дробь со знаменателем 1968. Найдите числитель получившейся дроби. Запишите решение и ответ.

73. В мешке находятся 29 белых перчаток и 31 чёрная перчатка. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней? Запишите решение и ответ.

74. В мешке находятся 32 белые перчатки и 28 чёрных перчаток. Перчатки достают из мешка парами. Если достали пару перчаток одного цвета, то в мешок кладут чёрную перчатку. Если достали пару перчаток разного цвета, то в мешок кладут белую перчатку. Какого цвета окажется перчатка, которая останется в мешке последней? Запишите решение и ответ.