# Ответы и решения для варианта 34073008

1)

Цена чайника после повышения стала составлять 116% от начальной цены. Разделим 3480 на 1,16:

$$\frac{3480}{1,16} = 3000.$$

Значит, цена чайника до повышения составляла 3000 рублей.

Ответ: 3000.

2)Из диаграммы видно, что наименьшая среднемесячная температура во второй половине года составляла −2 °С (см. рисунок).



3)

радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине его стороны.



$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4+4}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

4)

Анализ пациента может быть положительным по двум причинам: А) пациент болеет гепатитом, его анализ верен; В) пациент не болеет гепатитом, его анализ ложен. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем:

$$P(A) = 0,9 \cdot 0,05 = 0,045,$$
$$P(B) = 0,01 \cdot 0,95 = 0,0095,$$
$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,045 + 0,0095 = 0,0545.$$

Ответ: 0,0545.

5)

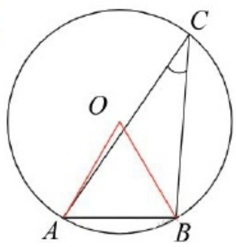
Последовательно получаем:

$$\log_{\frac{1}{7}}(7-x) = -2 \Leftrightarrow 7 - x = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} \Leftrightarrow 7 - x = 49 \Leftrightarrow x = -42.$$

Ответ: −42.

6)

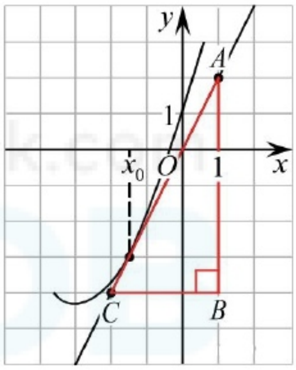
Рассмотрим треугольник $AOB$. Он равносторонний, так как $AO = OB = AB = R$. Поэтому угол $AOB = 60$. Вписанный угол $ACB$ равен половине дуги, на которую он опирается. Тем самым, он равен 30°.




Ответ: 30.

7)

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (1; 2), B (1; −4), C(−2; −4). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу $ACB$:



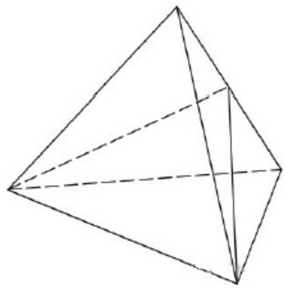

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2.



8)

При одинаковой площади основания большим объемом будет обладать та часть, высота которой больше, то есть нижняя. Объем данной пирамиды относится к объему исходной как 2/3, поэтому равен 10.



Ответ: 10.

9)

Выполним преобразования:

$$\left(\sqrt{3\frac{6}{7}} - \sqrt{1\frac{5}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{28}} = \left(\sqrt{\frac{27}{7}} - \sqrt{\frac{12}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{28}} = \frac{(3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}} = 2.$$

Ответ: 2.

## 10)

Поскольку произведение давления на степень объёма постоянно, а давление равно $3,2 \cdot 10^6$ Па, при заданных значениях параметров $k = \frac{5}{3}$ и $\text{const} = 10^5$ Па $\cdot$ м$^5$ имеем равенство:

$$3,2 \cdot 10^6 V^{\frac{5}{3}} = 10^5 \Leftrightarrow V^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow V = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow V = \frac{1}{8} \text{ м}^3.$$

Ответ: 0,125.

## 11)

Обозначим $v_1$ и $v_2$ — объёмы работ, которые выполняют за день первый и второй рабочий, соответственно, полный объём работ примем за 1. Тогда по условию задачи $12(v_1+v_2)=1$ и $2v_1=3v_2$. Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 12(v_1+v_2)=1, \\ 2v_1=3v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\left(v_1+\frac{2}{3}v_1\right)=1, \\ v_2=\frac{2}{3}v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1=\frac{1}{20}, \\ v_2=\frac{1}{30}. \end{cases}$$

Тем самым, первый рабочий за день выполняет одну двадцатую всей работы, значит, работая отдельно, он справится с ней за 20 дней.

Ответ: 20.

## 12)

Квадратный трехчлен $y = ax^2+bx+c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{max} = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 1. Поскольку функция $y=\log_2 x$ возрастает, и функция $y=\log_2(2+2x-x^2)-2$ определена в точке 1, она также достигает в ней максимума.

Ответ: 1.

13)

а) В силу нечетности и периодичности синуса имеем:

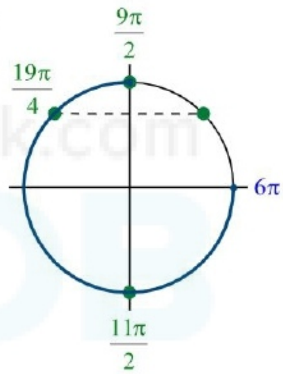
$$-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\cos x.$$

Далее имеем:

$$\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x=\cos x\Leftrightarrow\cos x(\sqrt{2}\cdot\sin x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи числовой прямой или тригонометрической окружности (см. рис.) для каждой из задающих решения серий отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $[4,5\pi;6\pi]$.

Находим три решения: $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{19\pi}{4}$; $6\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{11\pi}{2}$.





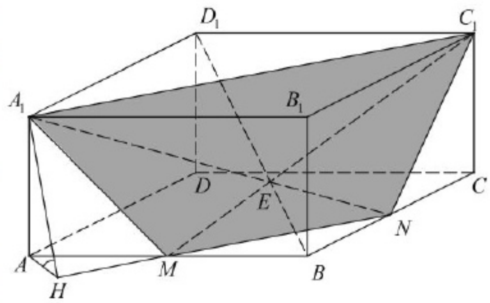

Ответ:

а) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{\pi}{4}+2\pi k,\frac{3\pi}{4}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$;

б) $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{19\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{2}$.

14)

а) Рассмотрим сечение призмы плоскостью $ABC_1D_1$. Точка $E$ лежит в этой плоскости вместе с прямой $BD_1$. Следовательно, прямые $AB$ и $C_1E$ также лежат в этой плоскости. Пусть они пересекаются в точке $M$, таким образом, точка $M$ также лежит в искомом сечении. Аналогично, $BC$ и $A_1E$ лежат в сечении $BCA_1D_1$ и пересекаются в точке $N$. Трапеция $A_1C_1NM$ — искомое сечение.




б) $BD_1=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$, а $BE=1$. Поэтому $\frac{BE}{ED_1}=\frac{1}{2}$. Из подобия треугольников $D_1C_1E$ и $BME$ находим, что $\frac{BM}{D_1C_1}=\frac{1}{2}$, откуда $BM=MA=1$. Аналогично, $BN=1$, треугольник $BMN$ — равнобедренный. Опустим перпендикуляр $AH$ на прямую $MN$. По теореме о трёх перпендикулярах $A_1H\perp MN$, и, значит, $\angle A_1HA$ — искомый угол.

Из треугольника $AHM$, подобного $BMN$, находим, что $AH=\frac{AM}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда $\operatorname{tg}\angle A_1HA=\frac{AA_1}{AH}=\sqrt{2}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

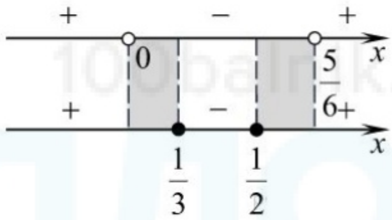
15)

Пусть $a=\sqrt{6x^2-5x+1}$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2-1}\ge\dfrac{1}{a-1},\\ a\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{a^2-1}\le 0,\\ a\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le a<1.$$

Следовательно:

$$\begin{cases}6x^2-5x+1<1,\\ 6x^2-5x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(6x-5)<0,\\ (2x-1)(3x-1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x\le\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{5}{6}.\end{array}\right.$$

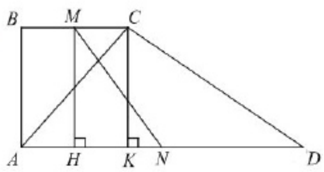





Таким образом, решением исходного неравенства является множество $\left(0;\ \dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{5}{6}\right)$.

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{5}{6}\right)$.

16)




Прямые $AD$ и $BC$ параллельны, поэтому $\angle ACB=\angle CAD$.

Предположим, что $\angle BAC=\angle ACD$, тогда получаем, что прямые $AB$ и $CD$ параллельны и $ABCD$ — параллелограмм. Значит, предположение неверно и $\angle ABC=\angle ACD$.

б) Треугольники $ABC$ и $DCA$ подобны. Следовательно, $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{AC}{AD}$, откуда

$$AC=\sqrt{BC\cdot AD}=30.$$

Опустим из вершины $C$ перпендикуляр $CK$ на основание $AD$. Тогда $AK=AC\cdot\cos\angle CAD=18=BC$. Значит, $ABCK$ — прямоугольник.

Следовательно,

$$AB=CK=AC\cdot\sin\angle CAD=24.$$

Пусть $N$ и $M$ — середины оснований $AD$ и $BC$ соответственно, $MH$ — перпендикуляр к $AD$. Тогда $ABMH$ — прямоугольник. Получаем, что

$$MH=AB=24,\ NH=AN-AH=AN-BM=16.$$

В прямоугольном треугольнике $MNH$ имеем:

$$MN=\sqrt{MH^2+NH^2}=8\sqrt{13}.$$

Ответ: $8\sqrt{13}$.

17)

Пусть в регионе $B$ проживало $n$ человек.
Составим таблицу изменения среднемесячного дохода на душу населения по данным задачи.

| | **2014** | **2015** | **2016** | **2017** |
|---|---|---|---|---|
| **Регион *A*** | | | | |
| Среднемесячный доход на душу населения | 43740 | $43740 \cdot 1{,}25$ | $43740 \cdot 1{,}25^2$ | $43740 \cdot 1{,}25^3$ |
| **Регион *B*** | | | | |
| Суммарный доход жителей | $60\,000\,n$ | $60\,000\,n \cdot 1{,}17$ | $60\,000\,n \cdot 1{,}17^2$ | $60\,000\,n \cdot 1{,}17^3$ |
| Число жителей | $n$ | $n \cdot (1+\frac{m}{100})$ | $n \cdot (1+\frac{m}{100})^2$ | $n \cdot (1+\frac{m}{100})^3$ |
| Среднемесячный доход на душу населения | 60 000 | $\frac{60000 \cdot 1,17}{1+\frac{m}{100}}$ | $\frac{60000 \cdot 1,17^2}{(1+\frac{m}{100})^2}$ | $\frac{60000 \cdot 1,17^3}{(1+\frac{m}{100})^3}$ |

По условию $43740 \cdot 1,25^3 = 60000 \cdot \frac{1,17^3}{(1+\frac{m}{100})^3}$, откуда

$$\left(1+\frac{m}{100}\right)^3 = \frac{60000 \cdot 1,17^3}{43740 \cdot 1,25^3} = \frac{1000 \cdot 1,17^3}{729 \cdot 1,25^3} = \left(\frac{10 \cdot 1,17}{9 \cdot 1,25}\right)^3 = \left(\frac{1170}{1125}\right)^3 = \left(\frac{26}{25}\right)^3.$$

Следовательно, $1+\frac{m}{100} = \frac{26}{25}$, откуда $m = 4$. Тем самым, население региона В росло на 4% в год.

Ответ: 4.

18)

Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Уравнение $\frac{x^2-2x+a}{6+x^2} = 1$ при любом $a$ имеет решение $x = \frac{a-6}{2}$. Значит, при любом $a$ одно из значений функции равно 1.

Поскольку функция непрерывна, множество её значений образует промежуток, включающий число 1. Других целых значений функции нет, если для всех $x$:

$$0 < \frac{x^2-2x+a}{6+x^2} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+a > 0, \\ x^2+2x+12-a > 0. \end{cases}$$

Чтобы неравенства выполнялись для всех $x$, дискриминанты обоих трёхчленов должны быть отрицательны:

$$\begin{cases} 4-4a < 0, \\ 4-4(12-a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < 11. \end{cases}$$

Таким образом, подходящие значения параметра $1 < a < 11$.

Ответ: (1; 11).

19)

а) При любой расстановке разность числа 11 и любого соседнего с ним числа меньше 11. Значит, всегда найдутся хотя бы две разности меньше 11.

б) Например, для расстановки 1, 12, 2, 13, 3, 14, 4, 15, 5, 16, 6, 17, 7, 18, 8, 19, 9, 20, 10, 21, 11 все разности не меньше 10.

в) Оценим значение $k$. Рассмотрим числа от 1 до 7. Если какие-то два из них стоят рядом или через одно, то найдется разность меньше 7. Иначе они стоят через два, поскольку всего чисел 21. В этом случае число 8 стоит рядом или через одно с каким-то числом от 2 до 7 и найдется разность меньше 7.

Таким образом, всегда найдется разность меньше 7. Все разности могут быть не меньше 6. Например, для расстановки 1, 8, 15, 2, 9, 16, 3, 10, 17, 4, 11, 18, 5, 12, 19, 6, 13, 20, 7, 14, 21 все разности не меньше 6.

Ответ: а) нет; б) да; в) 6.