Ответы и решения для варианта 34073009

1)

Заметим, что $\frac{700}{16}=\frac{175}{4}=43\frac{3}{4}$, поэтому Лизе хватит денег на 43 полных дня. Вечером сорок третьего дня после снятия 16 рублей на счету будет меньше 16 рублей и утром 44 дня номер заблокируют.

Ответ: 43.

2)Из диаграммы видно, что наибольшая среднемесячная температура во второй половине года (то есть с 7 по 12 месяц) составляла 16 °C (см. рисунок). Ответ: 16.

3)Изображенная на рисунке окружность вписана в квадрат со стороной 5, поэтому радиус этой окружности равен 2,5. Но причём тут вписанный треугольник? Ответ: 2,5.

4)У Вити в копилке лежит 12 + 6 + 4 + 3 = 25 монет на сумму 12 + 12 + 20 + 30 = 74 рубля. Больше 70 рублей останется, если достать из копилки либо рублёвую, либо двухрублёвую монету. Искомая вероятность равна 18 : 25 = 0,72. Ответ: 0,72.

5)

Извлекая кубический корень из обеих частей уравнения, получаем $x-1=2$, откуда $x=3$.

Ответ: 3.

6)

Для нахождения площади треугольника ABC, воспользуемся формулой Герона:

$$S=\sqrt{p(p-AC)(p-AB)(p-BC)}.$$

Далее по формуле $R=\frac{abc}{4S}$:

$$R=\frac{40\cdot 40\cdot 48}{4\cdot\sqrt{64\cdot 24\cdot 24\cdot 16}}=\frac{10\cdot 40\cdot 48}{24\cdot 8\cdot 4}=25.$$

Ответ: 25.

7)Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает. Если сторону клетки принять за единицу, то функция убывает на интервалах (−4,4; −0,7) и (2,6; +∞). В них содержатся точки x4, x5, x9. Их 3 штуки. Ответ: 3.

8)

Площадь поверхности получившегося многогранника равна сумме площадей поверхностей куба с ребром 1 и четырех граней параллелепипеда с ребрами 1, 0,5, 0,5, уменьшенной на две площади основания вырезанной призмы:

$$S = 6 + 4\cdot 0,5\cdot 1 - 2\cdot 0,5\cdot 0,5 = 7,5.$$

Ответ: 7,5.

9)

Выполним преобразования:

$$4x + y + 12z + y = 5 + 7 \Leftrightarrow 4x + 2y + 12z = 12 \Leftrightarrow 2x + y + 6z = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6.$$

Ответ: 6.

10)

Задача сводится к решению уравнений $l = 4,8$ и $l = 6,4$ при заданном значении R:

$$\sqrt{\frac{6400h}{500}} = 4,8 \Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}} = \frac{24}{5} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{h}{5}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{h}{5} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow h = \frac{9}{5} \Leftrightarrow h = 1,8 \text{ м}.$$
$$\sqrt{\frac{6400h}{500}} = 6,4 \Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}} = \frac{32}{5} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{h}{5}} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{h}{5} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow h = \frac{16}{5} \Leftrightarrow h = 3,2 \text{ м}.$$

Следовательно, чтобы видеть горизонт на более далеком расстоянии, наблюдателю нужно подняться на $3,2 - 1,8 = 1,4$ метра. Для этого ему необходимо подняться на $1,4 : 0,2 = 14 : 2 = 7$ ступенек.

Ответ: 7.

11)

Первый обогнал второго на 3 км за четверть часа, это значит, что скорость удаления (сближения) гонщиков равна $3:\frac{1}{4}=12$ км/ч. Обозначим скорость второго гонщика x км/ч, тогда скорость первого $(x+12)$ км/ч. Составим и решим уравнение:

$$\frac{180}{x}-\frac{180}{x+12}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{180x+180\cdot12-180x}{x(x+12)}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow x^2+12x=180\cdot12\cdot6$$

$$\Leftrightarrow x^2+12x-108\cdot120=0\Leftrightarrow x^2-(108-120)x+108\cdot(-120)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-120,\\ x=108.\end{array}\right.$$

Таким образом, скорость второго гонщика равна 108 км/ч.

Ответ: 108.

12)

Выделим полный квадрат:

$$y=\sqrt{5-4x-x^2}=\sqrt{9-(x+2)^2}.$$

Отсюда имеем:

$$y=\sqrt{9-(x+2)^2}\leq\sqrt{9}=3.$$

Поэтому наибольшее значние функции достигается в точке -2, и оно равно 3.

Ответ: 3.

13)

а) Решим уравнение:

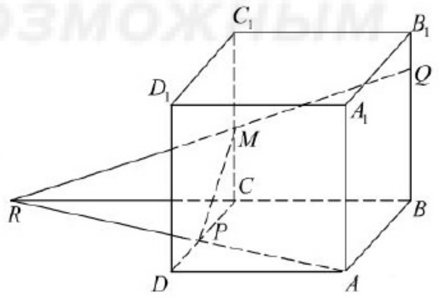
$$\sqrt{x^3-4x^2-10x+29}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases}3-x\ge 0,\\ x^3-4x^2-10x+29=(3-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3,\\ x^3-5x^2-4x+20=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3,\\ x^2(x-5)-4(x-5)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 3,\\ (x-5)(x^2-4)=0\end{cases} \begin{cases}x\le 3,\\ \left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-2,\\ x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=2\end{array}\right.$$

б) Поскольку $-2<-\sqrt{3}<2<\sqrt{30}$, отрезку $[-\sqrt{3};\sqrt{30}]$ принадлежит только число 2.

Ответ: а) $\{-2;2\}$; б) 2.

14)



а) Пусть прямые AP и BC пересекаются в точке R (см. рисунок). Тогда точка M — точка пересечения прямых QR и CC_1.

Треугольники ARB и PRC подобны, откуда $\frac{RC}{RB}=\frac{PC}{AB}=\frac{2}{3}$, $RC=2BC=24$.

Треугольники QRB и MRC подобны, откуда $\frac{MC}{QB}=\frac{RC}{RB}$, следовательно, $MC=\frac{2}{3}QB=6$. Значит, M — середина CC_1.

б) Расстояние от точки C до плоскости APQ равно высоте h пирамиды $CPRM$, опущенной из вершины C. Объём пирамиды $CPRM$, с одной стороны

$$V_{CPRM}=\frac{1}{3}\cdot RC\cdot S_{MPC}=\frac{1}{3}\cdot RC\cdot\frac{1}{2}PC\cdot CM=192.$$

С другой стороны $V_{CPRM}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{RPM}$. Значит,

$$h=\frac{3\cdot 192}{S_{RPM}}.$$

В треугольнике RPM находим стороны: $RP=8\sqrt{10}$, $RM=6\sqrt{17}$, $MP=10$.
По теореме косинусов

$$\cos\angle MRP=\frac{MR^2+RP^2-MP^2}{2MR\cdot PR}=\frac{12}{\sqrt{170}},$$

откуда $\sin\angle MRP=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{170}}$.

Площадь треугольника RPM равна $S_{RPM}=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{17}\cdot 8\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{170}}=24\sqrt{26}$.

Следовательно, $h=\frac{3\cdot 192}{24\sqrt{26}}=\frac{12\sqrt{26}}{13}$.

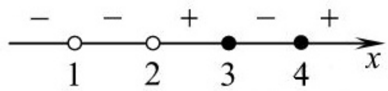
Ответ: б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$.

15)

Перепишем неравенство в виде:

$$\frac{x^2-6x+8}{x-1}-\frac{x-4}{x^2-3x+2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-2)}{x-1}-\frac{x-4}{(x-2)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2(x-4)-(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{((x-2)^2-1)(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x-4)}{x-2}\le 0, \\ x\ne 1. \end{cases}$$



Множество решений исходного неравенства: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup[3;\ 4]$.

Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup[3;\ 4]$.

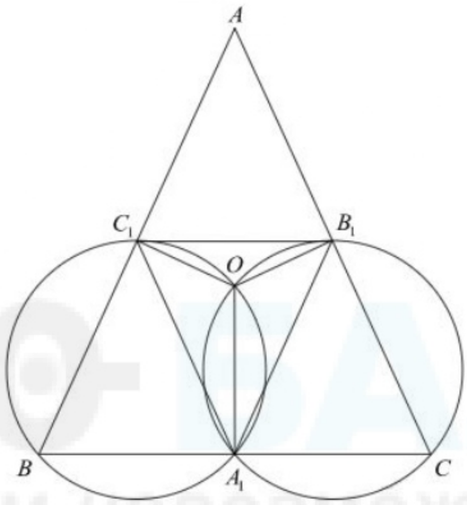
16)

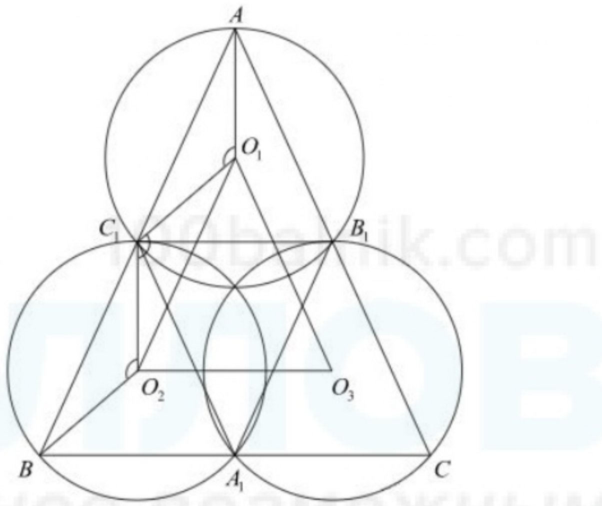
а) Пусть O — отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1 (рис. 1). Тогда

$$\angle A_1OB_1 = 180^\circ - \angle A_1CB_1,$$
$$\angle A_1OC_1 = 180^\circ - \angle A_1BC_1,$$

откуда $\angle B_1OC_1 = 360^\circ - \angle A_1OB_1 - \angle A_1OC_1 = \angle ABC + \angle ACB.$

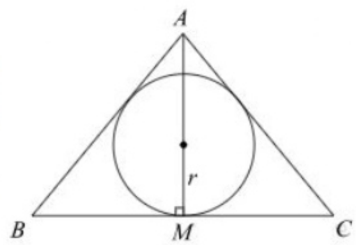
Значит, $\angle B_1OC_1 + \angle B_1AC_1 = 180^\circ$, следовательно, точки A, B_1, O и C_1 лежат на одной окружности.





б) Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей, описанных около треугольников B_1AC_1, A_1BC_1 и A_1CB_1 соответственно (рис. 2). Заметим, что $AO_1 = C_1O_2 = C_1O_1 = BO_2$ как радиусы описанных окружностей около равных треугольников. Значит, треугольники AO_1C_1 и C_1O_2B равны. Кроме того, треугольник $O_2C_1O_1$ также равен этим треугольникам, поскольку

$$\angle AO_1C_1 = \angle C_1O_2B = \angle O_2C_1O_1.$$



Таким образом, $O_1O_2 = AC_1 = \dfrac{AB}{2}$. Аналогично, $O_1O_3 = \dfrac{AC}{2}$, $O_2O_3 = \dfrac{BC}{2}$, поэтому треугольник $O_1O_2O_3$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$ и радиус вписанной в него окружности равен половине радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.

Пусть M — середина BC, а радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен r (рис. 3). Тогда площадь треугольника ABC

$$S_{ABC} = \frac{AB+BC+AC}{2} \cdot r = 16r.$$

С другой стороны, высота равнобедренного треугольника ABC равна $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 8$, поэтому $S_{ABC} = 48$. Значит, $r = 3$. Искомый радиус равен $\dfrac{r}{2} = 1,5$.

Ответ: 1,5.

17)

Пусть акции проданы в конце года t за t^2 тыс. руб., и полученная сумма положена в банк на оставшиеся $20-t$ лет под 25% годовых. Тогда цена акций на конец срока составит $s(t)=t^2\cdot 1,25^{20-t}$ тыс. руб. Найдём наибольшее значение полученной функции на множестве натуральных t, не превосходящих 20. Имеем:

$$s'(t)=2t\cdot 1,25^{20-t}+t^2\cdot 1,25^{20-t}\ln 1,25\cdot(-1)=1,25^{20-t}t(2-t\ln 1,25).$$

Найденная производная обращается в нуль в точке $\dfrac{2}{\ln 1,25}=2\log_{1,25}e$ и меняет в ней знак с плюса на минус. Следовательно, это точка максимума. Заметим, что

$$\left(\frac{5}{4}\right)^4<e<\left(\frac{5}{4}\right)^5\Leftrightarrow \log_{1,25}\left(\frac{5}{4}\right)^4<\log_{1,25}e<\log_{1,25}\left(\frac{5}{4}\right)^5\Leftrightarrow 4<\log_{1,25}e<5\Leftrightarrow 8<2\log_{1,25}e<10.$$

Из полученной оценки следует, что точка максимума лежит на интервале (8; 10). Сравним значения функции в точках 8, 9 и 10. Поскольку

$$\frac{s(9)}{s(8)}=\frac{81\cdot 1,25^{11}}{64\cdot 1,25^{12}}=\frac{81\cdot 4}{64\cdot 5}=\frac{324}{320}>1,$$
$$\frac{s(9)}{s(10)}=\frac{81\cdot 1,25^{11}}{100\cdot 1,25^{10}}=\frac{81\cdot 5}{100\cdot 4}=\frac{405}{400}>1,$$

наибольшее значением функции на множестве натуральных аргументов достигается в точке 9. Продавать акции необходимо в конце девятого года.

Ответ: в конце девятого года.

18)

На координатной плоскости xOy множество точек $(x;\ y)$, удовлетворяющих любому из уравнений системы — прямые. А тогда решением системы будут точки пересечения этих прямых. Поэтому исходная система будет иметь бесконечное множество решений в том и только в том случае, когда эти прямые совпадают. Заметим при этом, что вне зависимости от значений параметров первое уравнение системы задаёт не горизонтальную прямую (коэффициент перед x не равен нулю), а второе – не вертикальную (коэффициент перед y не равен нулю), значит, оба уравнения в системе можно привести к виду $y=kx+b$. В общем случае две прямые, заданные уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ совпадают, если, $k_1=k_2$ и $b_1=b_2$ (при $k_1\neq k_2$ они имеют одну точку пересечения, при $k_1=k_2$ и $b_1\neq b_2$ точек пересечения у них нет). Следовательно, система будет иметь бесконечно много решений в том случае, когда совместна система

$$\begin{cases}\dfrac{a-b}{8}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{26}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

где $a\neq 0$ и $b\neq 0$.

Решая систему, получаем $\begin{cases}a=-2,\\ b=-6\end{cases}$ или $\begin{cases}a=6,\\ b=2.\end{cases}$

Ответ: $(-2;\ -6)$, $(6;\ 2)$.

19)

а) Посмотрим на сумму нескольких зелёных чисел. Так как сумма будет минимальной тогда, когда числа минимальны, они должны составлять арифметическую прогрессию, с первым членом $a_1 = 5$ и разностью $d = 5$ (то есть ряд 5, 10, 15 ...). В случае, если на доске записано 30 зеленых чисел их сумма равна:

$$S_{30} = \frac{2 \cdot a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{10 + 29 \cdot 5}{2} \cdot 30 = 2325.$$

Теперь заменим зеленое число 40 на красное число 35. Сумма 29 оставшихся зелёных чисел и красного числа 35 будет равна

$$2325 - 40 + 35 = 2320 < 2325.$$

При этом на доске написаны только кратные 5 числа.

б) Как было показано в в пункте а) минимально возможная сумма 30 зеленых чисел — 2325. Чтобы получить минимально возможную сумму 29 зелёных чисел, вычтем из суммы 30 чисел самое большое из написанных — 150: $2325 - 150 = 2175$.

Теперь, чтобы получить минимально возможную сумму 29 зелёных и 1 красного чисел, прибавим наименьшее красное число, то есть 7: $2175 + 7 = 2182 > 1467$.

Минимально возможная сумма 29 зелёных и 1 красного чисел больше 1467, тогда любая сумма 29 зелёных и 1 красного чисел больше 1467. Значит, если на доске написано только одно красное число, сумма чисел не может быть равна 1467.

в) Пусть n - число красных чисел, тогда число зелёных составит (30-n). Как было показано выше, при одном, самом маленьком, красном числе сумма всех чисел больше, чем 1467. Это означает, что нам необходимо заменять зеленые числа на красные, причем, поскольку нам надо, чтобы красных чисел было минимальное число, то необходимо заменить минимальное возможное количество зеленых чисел, то есть наибольшие зеленые числа заменять на наименьшие красные. Тогда суммы красных $S_{\text{кр}}$ и зелёных $S_{\text{зел}}$ чисел, аналогично с предыдущими пунктами будут суммами арифметических прогрессий:

$$S_{\text{кр}} = \frac{7 + 7 + 7(n-1)}{2} \cdot n = \frac{7 + 7n}{2} \cdot n, \ \ S_{\text{зел}} = \frac{5 + 5 + 5(30 - n - 1)}{2} \cdot (30 - n) = \frac{5 + 5(30 - n)}{2} \cdot (30 - n).$$

Сумма всех чисел S должна быть по крайней мере меньше или равна 1467, тогда:

$$S = S_{\text{кр}} + S_{\text{зел}} = \frac{7 + 7n}{2} \cdot n + \frac{5 + 5(30 - n)}{2} \cdot (30 - n) \le 1467; \ 6n^2 - 149n + 858 \le 0 \underset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} 10 \le n \le 15.$$

Значит, необходимо заменить не менее 10 зеленых чисел. В ряду из 30 зелёных чисел заменим зеленые числа на красные: 150 на 7, 145 на 14, 140, на 21, 135 на 28, 130 на 35, 125 на 42, 120 на 49, 115 на 56, 110 на 63. Таким образом, сумма чисел, записанных на доске, составит:

$$S = S_{9\text{кр}} + S_{21\text{зел}} = \frac{5 + 105}{2} \cdot 21 + \frac{7 + 63}{2} \cdot 9 = 1155 + 315 = 1470.$$

Заменим теперь 80 на 77:

$$S = (S_{9\text{кр}} + 77) + (S_{21\text{зел}} - 80) = 315 + 77 + 1155 - 80 = 1467.$$

Таким образом, получается, что наименьшее количество красных чисел при сумме всех чисел 1467 равно 10.

Ответ: а) Да; б) Нет; в) 10.