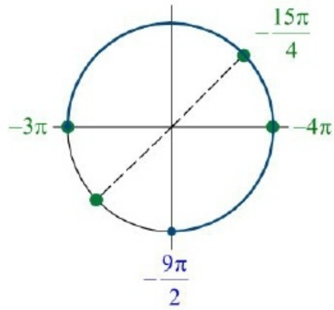
Ответы и решения для варианта реального варианта ЕГЭ 34003586

13)

а) Применим формулу приведения, разложим на множители:

$$2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin 2x \Leftrightarrow 2\sin^2 x-2\sin x\cos x \Leftrightarrow$$

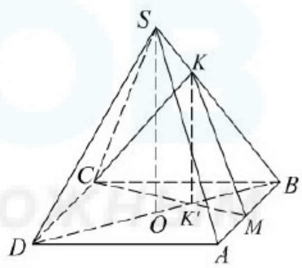
$$\Leftrightarrow 2\sin x(\sin x-\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \operatorname{tg} x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$



б) Отберем корни при помощи единичной тригонометрической окружности (см. рис.). Отрезку удовлетворяют корни: $-4\pi,\ -\frac{15\pi}{4},\ -3\pi.$

Ответ: а) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.; б) $-4\pi,\ -\frac{15\pi}{4},\ -3\pi.$

14)



а) Пусть SO — высота пирамиды $SABCD$. Из условия следует, что $BK=6$, а $BM=3$. Пусть K' — точка пересечения CM и BD. В треугольнике BCM, имеем: $BM=3$, $BC=4$, следовательно, $CM=5$. Отрезок BK' — биссектриса в этом треугольнике, значит, $\frac{MK'}{K'C}=\frac{3}{4}$, откуда $MK'=\frac{3}{7}CM=\frac{15}{7}$. Пусть $BK'=x$, применим теорему косинусов:

$$\frac{225}{49}=9+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{12\sqrt{2}}{7},\\ x=\frac{9\sqrt{2}}{7}.\end{array}\right.$$

Корень $\frac{9\sqrt{2}}{7}$ является посторонним, так как $\frac{9\sqrt{2}}{7}<\frac{12}{5}$, то есть меньше высоты треугольника BCM. Теперь заметим, что $BO=2\sqrt{2}$, откуда

$$\frac{BK}{BS}=\frac{6}{7}=\frac{BK'}{BO}.$$

Тогда треугольники BKK' и BSO подобны. Таким образом, KK' параллельна SO, а значит, плоскость CKM содержит прямую KK' перпендикулярную ABC. Следовательно, плоскости CKM и ABC перпендикулярны.

б) Так как прямая KK' перпендикулярна плоскости ABC, она является высотой пирамиды $BCKM$ с основанием BCM. Площадь треугольника BCM равна 6. Найдем KK':

$$KK'=\frac{6}{7}SO=\frac{6}{7}\sqrt{SB^2-BO^2}=\frac{6\sqrt{41}}{7}.$$

Тогда объем пирамиды $BCKM$ равен

$$V=\frac{1}{3}\cdot KK'\cdot S_{BCM}=\frac{12\sqrt{41}}{7}.$$

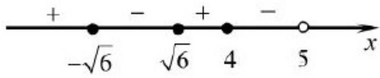
Ответ: б) $\frac{12\sqrt{41}}{7}$.

15)

Преобразуем неравенство:

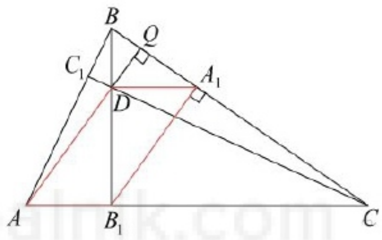
$$x^2\log_{343}(5-x)\le\log_7(x^2-10x+25)\Leftrightarrow\frac{x^2}{3}\log_7(5-x)-\log_7(x-5)^2\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{3}\log_7(5-x)-2\log_7(5-x)\le 0\Leftrightarrow(x^2-6)\log_7(5-x)\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})\log_7(5-x)\le 0.$$

Применим на ОДЗ — луче $x<5$ метод интервалов (см. рис.) и выпишем ответ: $-\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6},\ 4\le x<5.$



Ответ: $[-\sqrt{6};\sqrt{6}]\cup[4;5)$.

16)



а) По теореме Менелая $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BD}{DB_1}\cdot\frac{B_1C}{CA}=1$, откуда $\frac{BD}{DB_1}=\frac{1}{2}$. Имеем: $\frac{BD}{BB_1}=\frac{BA_1}{BC}=\frac{1}{3}$, следовательно, треугольники DBA_1 и B_1BC подобны по второму признаку, откуда $DA_1\parallel B_1C$ и $DA_1=\frac{B_1C}{3}$. Но по условию $AB_1=\frac{B_1C}{3}$, поэтому отрезки DA_1 и AB_1 равны и параллельны, а значит, ADA_1B_1 — параллелограмм по признаку.

б) Пусть Q — точка пересечения прямых AD и BC. По теореме Чевы $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$, откуда $\frac{BQ}{QC}=\frac{1}{8}$, а тогда $QC=16$. По теореме Пифагора в треугольнике AQC имеем: $AQ=\sqrt{28^2-16^2}=\sqrt{528}$. По теореме Менелая $\frac{QD}{DA}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BC}{CQ}=1$, откуда $\frac{QD}{DA}=\frac{1}{3}$. Тогда $QD=\frac{AQ}{4}=\frac{\sqrt{528}}{4}=\sqrt{33}$, и по теореме Пифагора для треугольника DQC находим $CD=\sqrt{33+256}=17$.

Ответ: б) 17.

17)

Заметим, что в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг перед банком не меняется, а ежегодные выплаты составляют $0{,}2S$ тыс. руб. В январе 2030 года долг (в тыс. руб.) равен $1{,}2S$, а в июле он равен $1{,}2S-360$. В январе 2031 года долг равен $1{,}44S-432$, а в июле этого года он равен $1{,}44S-792$. По условию, долг будет выплачен полностью, значит, $1{,}44S-792=0$, откуда $S=550$.

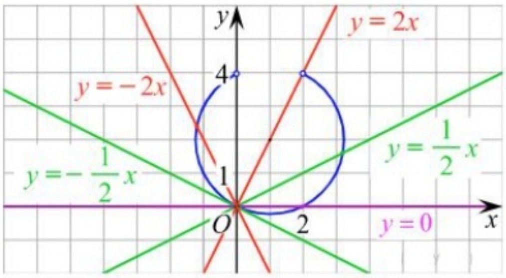
Таким образом, первые три выплаты составляют по 110 тыс. руб., а последние две — по 360 тыс. руб. Общая сумма выплат составляет: $3\cdot 110+2\cdot 360=1050$ (тыс. руб.)

Ответ: 1050 тыс. рублей.

18)

$$\begin{cases} \log_{11}(16-y^2)=\log_{11}(16-a^2x^2), \\ x^2+y^2=2x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-y^2=16-a^2x^2, \\ 16-y^2>0, \\ x^2-2x+y^2-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=(ax)^2, \\ 16-y^2>0, \\ x^2-2x+1+y^2-4y+4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm ax, \\ -4<y<4, \\ (x-1)^2+(y-2)^2=5. \end{cases}$$



Изобразим линии, соответствующие уравнениям и неравенству системы, в плоскости xOy. Каждое из двух уравнений $y=\pm ax$ задаёт пучок прямых, проходящих через начало координат, симметричных друг другу относительно оси ординат и совпадающих при $a=0$ (см. рис., выделено красным). Двойное неравенство $-4<y<4$ задает внутреннюю часть горизонтальной полосы, ограниченной прямыми $y=-4$ и $y=4$. Уравнение $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ задает окружность с центром в точке $(1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$. Дуга окружности, лежащая в указанной полосе, выделена на рисунке синим. Определим, при каком значении параметра a прямые, задаваемые уравнениями $y=\pm ax$, имеют с этой дугой окружности ровно две общие точки.

Заметим, что число решений системы при $a=a_0$ и $a=-a_0$ одинаково. Искомые значения параметра симметричны относительно нуля. Рассмотрим подробно случай $a\geq 0$.

Точка $(0;0)$ является решением при любом значении параметра a. Вторая точка пересечения соответствует следующим трем случаям.

— Пересечению с дугой окружности прямой $y=-ax$, если при этом прямая $y=ax$, не пересекает дугу в точке, отличной от точки $(0;0)$. Этот случай реализуется при $a\geq 2$.

— Пересечению совпадающих при $a=0$ прямых $y=\pm ax$ с дугой окружности в точке $(2;0)$ — см. рис., выделено пурпурным.

— Пересечению с дугой окружности прямой $y=ax$, в том случае, когда прямая $y=-ax$, является касательной, проходящей через точку $(0;0)$. Найдем уравнение такой касательной. Прямая, проходящая через начало координат, задается уравнением $y=kx$. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то есть перпендикулярна прямой $y=2x$, содержащий этот радиус (см. рис.). Две прямые на плоскости, отличные от координатных осей, перпендикулярны тогда и только тогда, когда произведение их угловых коэффициентов равно -1. Тем самым $k\cdot 2=-1$, откуда $k=-\frac{1}{2}$. Следовательно, искомое уравнение касательной есть $y=-\frac{1}{2}x$, что соответствует значениям $a=\frac{1}{2}$. При этом вторая прямая $y=\frac{1}{2}x$ пересекает дугу в точке, отличной от начала координат, а значит, найденное значение параметра является искомым.

Объединяя полученные значения параметра с соответствующими отрицательными значениями, получаем, что система имеет ровно два различных решения при $a\leq -2$, $a=-\frac{1}{2}$, $a=0$, $a=\frac{1}{2}$, $a\geq 2$.

Ответ: $(-\infty;-2]\cup\left\{-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right\}\cup[2;+\infty)$.

19)

Пусть сумма всех чисел в первой группе равна A, во второй — B, в третьей — C, и пусть количества чисел равны соответственно x, y и z. Приписывание цифры к числу увеличивает его в 10 раз и прибавляет эту цифру.

а) Да, это возможно. Например, можно из чисел 2, 7, 3 сделать числа 26, 79, 3.

б) Нет. Учитывая замечание, сделанное в начале решения, получим уравнение $10A+6x+10B+9y+C=19(A+B+C)$ или $6x+9y=9A+9B+18C$, что невозможно, поскольку сумма чисел всегда не меньше их количества, а следовательно, $9A \geq 9x > 6x$, откуда $9B \geq 9y$, то есть $18C<0$. Противоречие.

в) Рассмотрим частное новой суммы и старой:

$$\frac{10A+6x+10B+9y+C}{A+B+C}=1+\frac{6x+9y+9A+9B}{A+B+C}.$$

Видно, что C должно быть сделано как можно меньше, поэтому можно считать, что в третьей группе лишь одно число (иначе перенесем одно из чисел из третьей группы во вторую). Аналогично при переносе числа из первой группы во вторую числитель дроби увеличится, а знаменатель не изменится. Значит, и в первой группе должно быть лишь одно число. Далее, если число в третьей группе не минимальное изо всех, то его выгодно обменять местами с минимальным — это не повлияет на знаменатель, но увеличит числитель — а затем заменить на единицу — это уменьшит знаменатель и не изменит числитель. Имеем:

$$1+\frac{6x+9y+9A+9B}{A+B+C}=1+\frac{6+9y+9A+9B}{A+B+1}=10+\frac{9y-3}{A+B+1}.$$

При фиксированном y следует сделать знаменатель дроби как можно меньше. Для этого на роль чисел, составляющих A и B, следует взять наименьшие возможные, то есть $2,\ 3,\ \ldots,\ y+2$. Получим:

$$10+\frac{9y-3}{A+B+1}=10+\frac{9y-3}{1+2+3+\ldots+(y+2)}=10+\frac{18y-6}{(y+3)(y+2)}.$$

Найдем значения полученного выражения при различных y:

$$y=1:\ \ 10+\frac{12}{12}=11$$
$$y=2:\ \ 10+\frac{30}{20}=11,5,$$
$$y=3:\ \ 10+\frac{48}{30}=11,6,$$
$$y=4:\ \ 10+\frac{66}{42}=11\frac{4}{7}<11,6.$$

Докажем, что при прочих y ответ тоже будет меньше, чем 11,6. Для этого изучим поведение второго слагаемого. Пусть $f(y)=\dfrac{18y-6}{(y+3)(y+2)}$. Найдем производную:

$$f'(y)=\frac{6(23+2y-3y^2)}{(2+y)^2(3+y)^2}.$$

При $y \geq 4$ найденная производная отрицательна, функция f убывает, а потому при $y \geq 4$ ее значения меньше, чем значение при $y=4$.

Итак, наибольшее возможное увеличение суммы составляет 11,6 исходной величины и достигается, например, для чисел, 1, 2, 3, 4, 5, которые превращаются в 1, 26, 39, 49, 59 с суммой $174=11,6\cdot 15$.

Ответ: а) да, б) нет, в) в 11,6 раза.