Ответы и решения для варианта 34073011

1)

Из девятисот грамм риса можно приготовить $\frac{900}{40} = 22,5$ порций каши.

Из трех литров молока можно приготовить $\frac{3}{0,12} = 25$ порций каши.

Следовательно, продуктов достаточно только на 22 порции каши.

Ответ: 22.

2)Из графика видно, что сила натяжения достигает 150 кгс при угле наклона 45 градусов. Ответ: 45.

3)Угол ABC опирается на четверть окружности, то есть на дугу 90°. Вписанный угол равен половине дуги, поэтому он равен 45°. Ответ: 45.

4)

Пусть первой за стол сядет девочка, рядом с ней есть два места, на каждое из которых может сесть 8 человек, из которых только одна девочка. Таким образом вероятность, что девочки будут сидеть рядом равна $\frac{2}{8} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

5)

Возведём в квадрат обе части уравнения. Получим $x - 2 = 36$, откуда $x = 38$.

Ответ: 38.

6)

Радиус вписанной в многоугольник окружности равен отношению его площади к полупериметру. Пусть площадь равна S, полупериметр равен p, радиус окружности равен R. Тогда

$$S = Rp = 3 \cdot \frac{20}{2} = 30.$$

Ответ: 30.

7)

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2 = 3, \\ ax_0^2 + 2x_0 + 3 = 3x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = 0,5, \\ 0,5x_0 - x_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,125, \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

Искомое значение a равно 0,125.

Ответ: 0,125.

8)Высота и рёбра такого параллелепипеда равны диаметру сферы, поэтому это куб с ребром 2. Площадь его поверхности равна 6 · 4 = 24. Ответ: 24.

9)

Выполним преобразования:

$$\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ} = \frac{24(-\cos 34^\circ)}{\cos 34^\circ} = -24.$$

Ответ: −24.

10)

Обозначим совпадающую оценку по разным показателям x. Поскольку все показатели равны друг другу, все они равны x. Подставим значения в формулу, учитывая, что рейтинг равен x:

$$x = \frac{5x + x + 3x + x}{A} \Leftrightarrow A = 10.$$

Ответ: 10.

11)

Пусть бригада в первый день покрасила a_1 метров забора, во второй — a_2, ... , в последний — a_n метров забора. Тогда $a_1 + a_n = 60$ м, а за n дней было покрашено

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 30n \text{ метров забора.}$$

Поскольку всего было покрашено 240 метров забора, имеем: $30n = 240 \Leftrightarrow n = 8$. Таким образом, бригада красила забор в течение 8 дней.

Ответ: 8.

12)

Найдем производную заданной функции: $y' = 15 - 3\cos x$. Уравнение $y' = 0$ не имеет решений, производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей. Следовательно, наибольшим значением функции на заданном отрезке является

$$y(0) = 15 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Ответ: 5.

13)

а) Заметим, что $9^{\left(x-\frac{1}{2}\right)}=9^{\left(x-1+\frac{1}{2}\right)}=9^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{(x-1)}=3\cdot 9^{(x-1)}$, преобразуем исходное уравнение:

$$9^{x-\frac{1}{2}}-8\cdot 3^{x-1}+5=0 \Leftrightarrow 3\cdot 9^{x-1}-8\cdot 3^{x-1}+5=0.$$

Пусть $t=3^{x-1}$, тогда уравнение запишется в виде $3t^2-8t+5=0$, откуда $t=1$ или $t=\frac{5}{3}$.

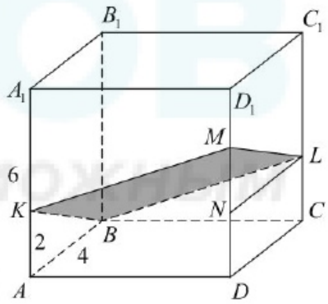
При $t=1$ получим: $3^{x-1}=1$ откуда $x=1$.

При $t=\frac{5}{3}$ получим: $3^{x-1}=\frac{5}{3}$ откуда $x=\log_3 5$.

б) Корень $x=1$ не принадлежит промежутку $\left(1,\frac{7}{3}\right)$. Поскольку $1<\log_3 5$ и $\log_3 5<\log_3 9=2<\frac{7}{3}$, корень $x=\log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1,\frac{7}{3}\right)$.

Ответ: а) $1, \log_3 5$; б) $\log_3 5$.

14)



а) Проведём в прямоугольнике AA_1C_1C отрезок KL параллельно AC. Заметим, что плоскость KBL параллельна прямой AC по признаку параллельности прямой и плоскости. Поэтому KBL — плоскость сечения. Плоскость сечения пересекает параллельные грани призмы по параллельным отрезкам. Проведём отрезок LM параллельно BK, проведем отрезок KM. Полученный четырёхугольник $BLMK$ — искомое сечение. (См. *Правила* в конце пояснения.)

Из равенства $AK = LC$ следует, что $CL : LC_1 = 1 : 2$. В силу параллельности прямых KB и ML получаем, что $DM = 2LC$, а тогда $DM : MD_1 = 2 : 1$. Это и требовалось доказать.

б) Заметим, что по теореме о трех перпендикулярах прямые BM и AC перпендикулярны, а значит, прямые BM и KL перпендикулярны. Площадь четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, равна половине произведения диагоналей. Найдем их: $KL=AC=4\sqrt{2}$ как диагональ квадрата, лежащего в основании призмы, $BM=\sqrt{BD^2+DM^2}=\sqrt{32+16}=\sqrt{48}$ по теореме Пифагора. Тогда

$$S_{BKML}=\frac{1}{2}BM\cdot KL=\frac{1}{2}\sqrt{48}\cdot 4\sqrt{2}=2\sqrt{96}=8\sqrt{6}.$$

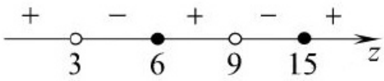
Ответ: б) $8\sqrt{6}$.

15)

Пусть $z = x\sqrt{3}$, получаем:

$$\frac{6}{z-3}+\frac{z-6}{z-9}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{6(z-9)+(z-6)(z-3)-2(z-3)(z-9)}{(z-3)(z-9)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

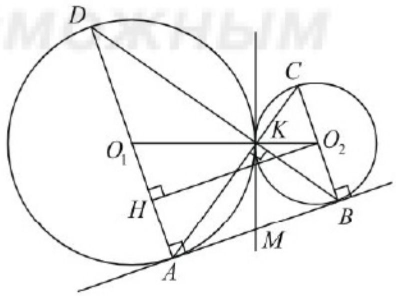
$$\Leftrightarrow \frac{z^2-21z+90}{(z-3)(z-9)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(z-6)(z-15)}{(z-3)(z-9)}\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3<z\leq 6,\\ 9<z\leq 15.\end{array}\right.$$



Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\sqrt{3}<x\leq 2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{3}<x\leq 5\sqrt{3}$.

Ответ: $(\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}]\cup(3\sqrt{3};\ 5\sqrt{3}]$.

16)



а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Таким образом, в треугольнике AKB медиана равна половине стороны, к которой она проведена, значит, он прямоугольный.

Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) В прямоугольной трапеции ABO_2O_1 построим высоту O_2H и найдём ее из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда $AB = O_2H = 4$. Из прямоугольного треугольника BAD получаем: $BD = \sqrt{8^2+4^2} = 4\sqrt{5}$.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{DK}{KB}=\frac{AD}{BC}=4$, поэтому $KB=\frac{1}{5}BD=\frac{4}{\sqrt{5}}$, а $DK = 4KB = \frac{16}{\sqrt{5}}$.

Из прямоугольного треугольника CKB находим $KC = \sqrt{CB^2-KB^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тогда $\sin\angle CBK = \frac{KC}{CB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Из прямоугольного треугольника CKD находим $CD = \sqrt{DK^2+KC^2} = 2\sqrt{13}$.

По теореме синусов для треугольника BCD находим искомый радиус описанной окружности:

$$R = \frac{CD}{2\sin\angle CBK} = \frac{2\sqrt{13}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{65}.$$

Ответ: $\sqrt{65}$.

17)

Долг на конец месяца:

$$2,4;\ 2,3;\ 2,2;\ \dots;\ 0,1;\ 0.$$

Долг с учетом процентов:

$$2,4\cdot\frac{103}{100};\ 2,3\cdot\frac{103}{100};\ \dots;\ 0,1\cdot\frac{103}{100}.$$

Выплаты за первые 12 месяцев:

$$2,4\cdot\frac{103}{100}-2,3;\ 2,3\cdot\frac{103}{100}-2,2;\ \dots;\ 1,3\cdot\frac{103}{100}-1,2.$$

Их сумма равна:

$$\frac{1}{100}(2,4\cdot103-2,3\cdot100+2,3\cdot103-2,2\cdot100+\dots+1,3\cdot103-1,2\cdot100)=$$

$$=\frac{1}{100}(2,4\cdot103+3\cdot2,3+3\cdot2,2+\dots+3\cdot1,3-1,2\cdot100)=\frac{1}{100}(2,4\cdot103+3(2,3+2,2+\dots+1,3)-1,2\cdot100)=$$

$$=\frac{1}{100}(2,4\cdot103+3\cdot19,8-1,2\cdot100)=\frac{186,6}{100}=1,866\ \text{млн руб.}$$

Ответ: 1 866 000 рублей.

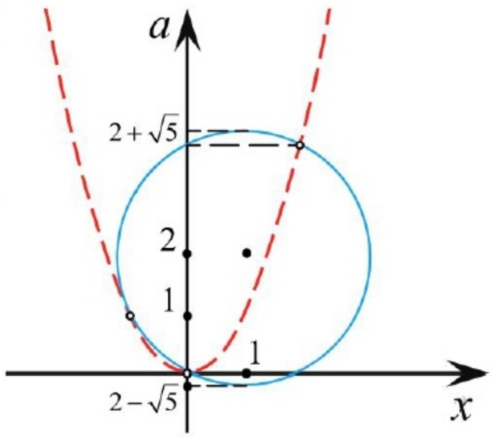
18)

В системе координат xOa изобразим окружность, задаваемую уравнением $(x-1)^2+(a-2)^2=5$, все точки которой обращают числитель дроби в нуль, и параболу $a=x^2$, точки которой соответствуют нулям знаменателя.

Подставим второе уравнение в первое и решим полученное уравнение на x. Тем самым, найдем точки пересечения окружности и параболы: $(0;0)$, $(2;4)$ и $(-1;1)$ — точка касания.

Итак, заданное уравнение имеет ровно два решения, когда $2-\sqrt{5}<a<2+\sqrt{5}$, $a\neq0$, $a\neq1$, $a\neq4$.

Ответ: $a\in(2-\sqrt{5};\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 4)\cup(4;\ 2+\sqrt{5})$.



19)

а) Нет. Итоговый балл по старой системе не больше $\frac{5+6+7+8+9+10}{6}=\frac{15}{2}$, а итоговый балл по новой системе не меньше $\frac{0+1+2+3}{4}=\frac{3}{2}$. Поэтому разность итоговых баллов не может быть больше 6.

б) Нет. Упорядочим оценки судей: пусть $a<b<c<d<e<f$. Тогда разность итоговых баллов равна

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6}-\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{2(e+f)-(a+b+c+d)}{12}. \qquad (*)$$

При умножении разности на 12 должно получаться целое число, но число $12\cdot\frac{1}{2019}$ нецелое.

в) Покажем, что числитель дроби (*) не меньше 12. Действительно, уменьшаемое $2(e+f)\geq 2(e+e+1)=4e+2$, а вычитаемое $a+b+c+d\leq(e-4)+(e-3)+(e-2)+(e-1)=4e-10$. Следовательно, разность итоговых баллов не меньше 1. Значение 1 достигается, например, при оценках 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 1.