Ответы и решения для варианта 34073010

1)

Больному нужно выпить $0{,}5 \cdot 3 \cdot 21 = 31{,}5$ г лекарства. В одной упаковке содержится $0{,}5 \cdot 10 = 5$ г лекарства. Разделим 31,5 на 5:

$$\frac{31,5}{5} = \frac{315}{50} = \frac{300+15}{50} = \frac{300}{50} + \frac{3}{10} = 6,3.$$

Значит, на курс лечения шести упаковок не хватит, требуется 7 упаковок.

Ответ: 7.

2)Из графика видно, что наибольшая температура воздуха 22 января составляла −10 °C (см. рисунок). Ответ: −10.

3)Радиус окружности, описанной около прямоугольника, равен половине его диагонали. Диагональ равна 5, поэтому радиус равен 2,5. Ответ: 2,5.

4)Джон промахнется, если схватит пристрелянный револьвер и промахнется из него, или если схватит непристрелянный револьвер и промахнется из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}4\cdot(1 - 0{,}9) = 0{,}04$ и $0{,}6\cdot(1 - 0{,}2) = 0{,}48$. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $0{,}04 + 0{,}48 = 0{,}52$. Ответ: 0,52.

5)

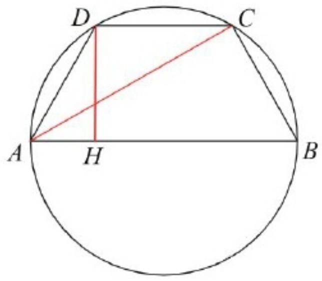
Последовательно получаем:

$$\log_5(5-x) = 2\log_5 3 \Leftrightarrow 5-x = 3^2 \Leftrightarrow 5-x = 9 \Leftrightarrow x = -4.$$

Ответ: −4.

6)

Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника ADC. Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120°, углы при основании равны 30°. Найдем его боковую сторону:



$$AD = AB - 2AH = AB - 2AD\cos 60^\circ = 12 - AD,$$

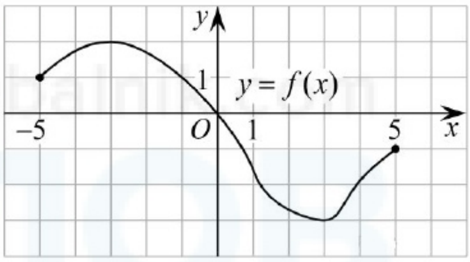
откуда $AD = 6$. Тогда по теореме синусов:

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle DCA} = \frac{6}{2\sin 30^\circ} = 6.$$

Ответ: 6.

7)

Напомним, что если функция непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, а её производная положительна (отрицательна) на интервале $(a;\ b)$, то функция возрастает (убывает) на отрезке $[a;\ b]$.



Тем самым, функция f, график производной которой дан в условии, возрастает на отрезках $[-5;\ -3]$ и $[3;\ 5]$ и убывает на отрезке $[-3;\ 3]$.

Из этого следует, что f принимает наименьшее значение на левой границе отрезка, в точке −5, или в точке минимума $x_{\min} = 3$. В силу возрастания f на отрезке $[3;\ 5]$ справедливо неравенство $f(5) > f(3)$. Поскольку по условию $f(-5)$ не меньше, чем $f(5)$, справедлива оценка $f(-5) > f(3)$.

Тем самым, наименьшего значения функция f достигает в точке 3. График одной из функций, удовлетворяющих условию, приведён на рисунке.

Ответ: 3.

8)Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия, поэтому коэффициент подобия равен 2. Площади поверхностей подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому их отношение равно 4. Ответ: 4.

9)

Выполним преобразования:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha.$$

Угол α лежит во второй четверти, поэтому $\cos\alpha < 0$. Тогда

$$-\cos\alpha = -(-\sqrt{1-(0,8)^2}) = \sqrt{0,36} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

10)

Задача сводится к решению уравнений $l=4,8$ и $l=6,4$ при заданном значении R:

$$\sqrt{\frac{6400h}{500}}=4,8 \Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{24}{5} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{h}{5}=\frac{9}{25} \Leftrightarrow h=\frac{9}{5} \Leftrightarrow h=1,8.$$
$$\sqrt{\frac{6400h}{500}}=6,4 \Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{32}{5} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{h}{5}}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{h}{5}=\frac{16}{25} \Leftrightarrow h=\frac{16}{5} \Leftrightarrow h=3,2.$$

Следовательно, чтобы видеть горизонт на более далеком расстоянии, наблюдателю нужно подняться на $3,2-1,8=1,4$ метра.

Ответ: 1,4.

11)

Каждый год прибыль компании «Альфа» составляла 200% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 300% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счёте компании «Альфа» была сумма

$$5000\cdot 3^{2006-2001}=5000\cdot 3^5=5000\cdot 243=1\,215\,000.\text{ долларов.}$$

Каждый год прибыль компании «Бета» составила 400% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 500% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счёте компании «Бета» была сумма

$$10\,000\cdot 5^{2006-2003}=10\,000\cdot 5^3=10\,000\cdot 125=1\,250\,000.$$

Таким образом, капитал компании «Бета» был на 35 000 долларов больше.

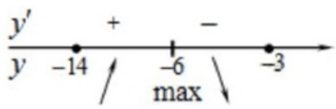
Ответ: 35 000.

12)

Найдем производную заданной функции:

$$y'=2(x+6)(x-10)+(x+6)^2\cdot 1=(x+6)(2x-20+x+6)=(x+6)(3x-14).$$

Производная обращается в нуль в точках -6 и $\frac{14}{3}$, заданному отрезку принадлежит число -6. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



В точке -6 функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-6)=(-6+6)^2(-6-10)+8=8.$$

Ответ: 8.

13)

а) Заметим, что: $\dfrac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}} = \dfrac{3^{\cos x}}{3^{2\cos^2 x}} = 3^{\cos x - 2\cos^2 x}$. Далее имеем:

$$3^{\cos x-2\cos^2 x}=4^{2\cos^2 x-\cos x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cos^2 x-\cos x}=4^{2\cos^2 x-\cos x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{12}\right)^{2\cos^2 x-\cos x}=1\Leftrightarrow$$

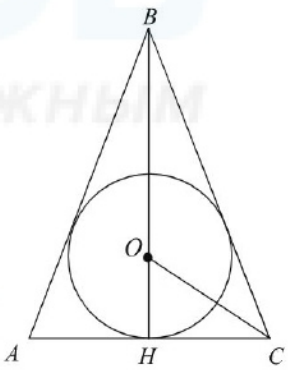
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Решая двойное неравенство $-\dfrac{3\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{6}$ для каждой из полученных серий корней находим, что заданному промежутку принадлежат числа $-\dfrac{3\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{3}$ и только они.

Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-\dfrac{3\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{3}$.

14)

а) Осевым сечением является равнобедренный треугольник ABC, боковые стороны которого являются образующими конуса, а основанием — его диаметр, и вписанная в треугольник окружность, радиус которой равен радиусу шара (см. рис.).



б) Введём обозначения, как показано на рисунке. Пусть O — центр вписанной окружности, отрезок CO — биссектриса угла ACB и пусть $\widehat{HCO}=\alpha$, имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{OH}{HC}=\frac{1}{2},\quad \operatorname{tg}\widehat{HCB}=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}.$$

Тогда $BH=HC\operatorname{tg}\widehat{HCB}=4$, $BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Для площадей поверхностей конуса и шара имеем: $S_{\text{кон}}=\pi R^2+\pi Rl=9\pi+15\pi=24\pi, S_{\text{ш}}=4\pi r^2=4\pi(1,5)^2=9\pi$. Тем самым, искомое отношение равно $\dfrac{24}{9}$ или 8:3.

Ответ: 8:3.

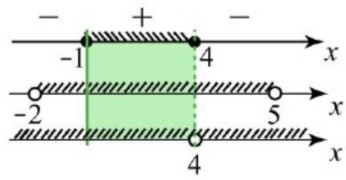
15)

Заметим, что $-2 < x < 5$ и $x \neq 4$. Для таких значений переменной числитель и знаменатель аргумента логарифма положительны, поэтому, учитывая равенство $(x-5)^2 = (5-x)^2$, имеем:

$$\log_{5-x}\frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) - \log_{5-x}(x-5)^4 \geq -4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) - 4\log_{5-x}(5-x) \geq -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) - 4 \geq -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2) \geq 0.$$

Решим полученное неравенство, применяя метод рационализации:

$$\begin{cases}(5-x-1)(x+2-1) \geq 0,\\ -2 < x < 5,\\ x \neq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4-x)(x+1) \geq 0,\\ -2 < x < 5,\\ x \neq 4\end{cases} \underset{\text{см.рис.}}{\Leftrightarrow} -1 \leq x < 4.$$



Ответ: $[-1;\ 4)$.

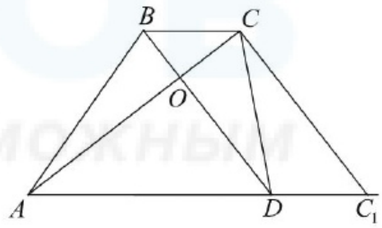
16)

а) Проведем через точку C прямую параллельную BD. На пересечении этой прямой и прямой AD отметим точку C_1, BCC_1D — параллелограмм.

В треугольнике ACC_1: $AC = 15$, $CC_1 = BD = 8$, $AC_1 = AD + DC_1 = 17$.

Заметим, что $AC^2 + CC_1^2 = AC_1^2$, поскольку $289 = 225 + 64$, тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ACC_1 — прямоугольный, угол ACC_1 прямой. Тогда угол COD прямой, что и требовалось доказать.

б) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2}\cdot 8 \cdot 15 = 60.$



Ответ: б) 60.

17)

Если первый платеж банку Аркадия составил x рублей, то второй составит $2x$ рублей, а третий — $3x$ рублей, всего $6x$ рублей, что равно 2 395 800, то есть x = 2 395 800 : 6 = 399 300. Отсюда: $2x$ = 798 600, $3x$ = 1 197 900.

Пусть в банке Аркадий взял в кредит S рублей.

Тогда его долг 01.03.2011 составил $1{,}1S$ рублей. После первого перечисления Аркадия долг снизился до $(1{,}1S - 399\,300)$ руб.

01.03.2012 банк начислил проценты на долг Аркадия. Долг Аркадия стал $(1{,}1S - 399\,300)\cdot 1{,}1 = 1{,}21S - 439\,230$ (руб.)

Аркадий перевел в банк 798 600 руб. Долг снизился до $1{,}21S - 439230 - 798600 = 1{,}21S - 1237830$ (руб.)

01.03.2013 банк начислил проценты на оставшийся долг Аркадия. Долг Аркадия стал $(1{,}21S - 1237830)\cdot 1{,}1 = 1{,}331S - 1\,361\,613$ (руб.)

Аркадий перевел в банк 1 197 900 руб. Кредит погашен полностью, долга у Аркадия нет.

Значит, $1{,}331S - 1\,361\,613 - 1\,197\,900 = 0 \Leftrightarrow 1{,}331S = 2\,559\,513 \Leftrightarrow S = 1\,923\,000$.

Ответ: 1 923 000 рублей.

18)

Чтобы наибольшее значение данной функции было не меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы она в какой-то точке приняла значение 1. В самом деле, $f(a) = -a^2 < 1$. Если наибольшее значение ее не меньше единицы, то по непрерывности в какой-то точке будет значение единица. Если же наибольшее значение меньше единицы, то значение единица приниматься не может. Итак, задача свелась к такой — при каких a есть корни у уравнения $|x-a| = x^2+1$. Поскольку $x^2+1>0$, это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x-a = x^2+1, \\ a-x = x^2+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+1+a = 0, \\ x^2+x+1-a = 0. \end{array}\right.$$

Эта совокупность имеет решения если $1-4(1+a) \geq 0$ или если $1-4(1-a) \geq 0$, то есть при $a \leq -\dfrac{3}{4}$ или $a \geq \dfrac{3}{4}$.

Ответ: $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{3}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3}{4};\ \infty\right)$.

19)

Пусть исходные числа равны $10a_1+b_1,\ 10a_2+b_2, \ldots,\ 10a_n+b_n$, и пусть суммы цифр, стоящих в разряде единиц и десятков, соответственно $A = a_1+\ldots+a_n$, и $B = b_1+\ldots+b_n$.

а) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 10A+B = 2970, \\ 10B+A = 990 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B = 360, \\ A-B = 220 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 290, \\ B = 70. \end{cases}$$

Примером исходного набора чисел может быть 70 двузначных чисел, заканчивающихся единицей, сумма десятков которых дает 290. Например, это 68 чисел 41 и два числа 91 или 50 чисел 51 и 20 чисел 21. Ещё пример (его можно построить, обратив внимание, что сумма десятков примерно в 4 раза больше суммы единиц): 32 раза число 92 и число 26.

б) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 10A+B = 2970, \\ 10B+A = 594 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B = 324, \\ A-B = 264. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 294, \\ B = 30. \end{cases}$$

Поскольку нулей в записи чисел нет, сумма цифр, стоящих в разряде единиц, не меньше количества чисел. Тем самым, чисел не больше 30. Но тогда сумма цифр, стоящих в разряде десятков, не может быть больше 270. Противоречие.

Иначе: поскольку в записи нет нулей, а цифры в разряде десятков не превышают 9, справедливы соотношения: $n \leq B,\ A \leq 9n$, то есть $A/9 \leq n \leq B$, что противоречит полученной системе, в которой $5A = 49B$.

в) Требуется определить, для какого наименьшего S имеет решения система уравнений

$$\begin{cases} 10A+B = 2970, \\ 10B+A = S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B = \dfrac{S+2970}{11}, \\ A-B = \dfrac{2970-S}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B = \dfrac{S}{11}+270, \\ A-B = 330-\dfrac{S}{9}. \end{cases}$$

Из полученной системы следует, что величина S кратна 9 и 11 то есть кратна 99. Тогда $S = 99k,\ k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{cases} A+B = 9k+270, \\ A-B = 330-11k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 300-k, \\ B = 10k-30. \end{cases}$$

Наименьшему значению S соответствует наименьшее значение k. причем из второго уравнения системы ясно, что $k>3$. Улучшим оценку: заметим, что $n \leq B,\ A \leq 9n$, откуда $A/9 \leq n \leq B$, тогда

$$\frac{300-k}{9} \leq 10k-30 \Leftrightarrow 300-k \leq 90k-270 \Leftrightarrow k \geq 6\frac{24}{91},$$

и, тем самым, $k \geq 7$.

Если $k=7$, то: $A = 293,\ B = 40$, заданным набором чисел, например, являются 30 чисел 91, 9 чисел 21 и число 51, сумма чисел в наборе равна $99 \cdot 7 = 693$.

Ответ: а) например, 32 раза число 92 и число 26, б) нет, в) 693.