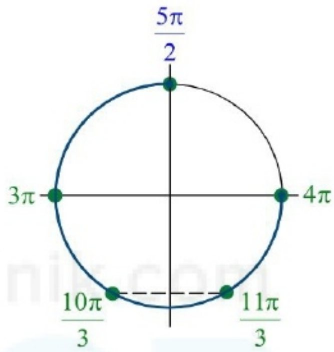
Ответы и решения для варианта реального варианта ЕГЭ 34002262

13)

а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow$$

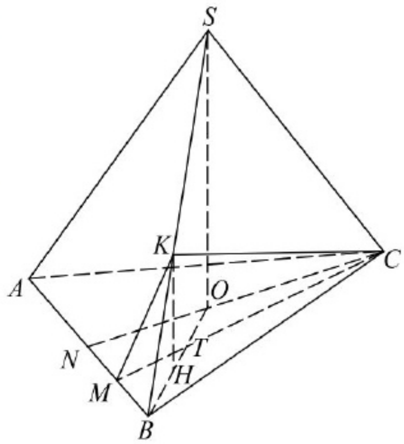
$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x+\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$



б) Отберем корни при помощи единичной тригонометрической окружности (см. рис.). На заданном отрезке лежат корни $3\pi,\ 4\pi,\ \frac{10\pi}{3},\ \frac{11\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $3\pi,\ \frac{10\pi}{3},\ \frac{11\pi}{3},\ 4\pi$.

14)



а) Пусть SO высота пирамиды, а KH — перпендикуляр, проведенный из K к плоскости ABC. Докажем, что M, H и C лежат на одной прямой. Пусть MC пересекает BO в точке T, и пусть N — середина AB. Запишем теорему Менелая для треугольника BNO и прямой CM: $\frac{BM}{MN}\cdot\frac{NC}{CO}\cdot\frac{OT}{TB}=1$, тогда $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{OT}{TB}=1$. Из последнего соотношения получаем: $OT : TB = 7 : 3$. Но $OH : HB = SK : KB = 7 : 3$. Значит, точки H и T совпадают. Следовательно, CM пересекает BO в точке H. Плоскость KMC содержит KH, которая перпендикулярна ABC, таким образом, плоскости KMC и ABC перпендикулярны. Поэтому плоскость α проходит через точку C.

б) Заметим, что

$$KH=\frac{3}{10}SO=\frac{3}{10}\sqrt{SA^2-AO^2}=\frac{6}{5}.$$

Вычислим CM при помощи теоремы косинусов:

$$CM^2=9^2+1^2-2\cdot 9\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=73.$$

Поэтому площадь треугольника CKM равна

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\sqrt{73}=\frac{6\sqrt{73}}{10}.$$

Ответ: б) $\frac{6\sqrt{73}}{10}$.

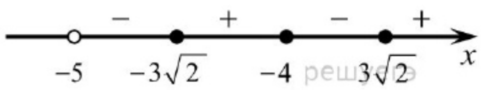
15)

Преобразуем неравенство:

$$x^2\log_{512}(x+5)\le\log_2(x^2+10x+25)\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}\log_2(x+5)\le\log_2(x+5)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}\log_2(x+5)-2\log_2(x+5)\le0\Leftrightarrow(x^2-18)\log_2(x+5)\le0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-3\sqrt{2})(x+3\sqrt{2})\log_2(x+5)\le0.$$



Заметим, что логарифм обращается в нуль при $x=-4$, применим на ОДЗ — луче $x>-5$ метод интервалов и выпишем ответ: $-5<x\le-3\sqrt{2},\ -4\le x\le3\sqrt{2}$.

Ответ: $(-5;-3\sqrt{2}]\cup[-4;3\sqrt{2}]$.

16)

Дан прямоугольный треугольник ABC. На катете AC отмечена точка M, а на продолжении катета BC за точку C — точка N так, что $CM=CB$ и $CA=CN$.

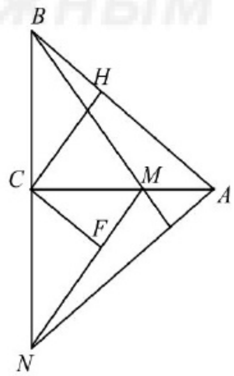
а) Пусть CH и CF — высоты треугольников ABC и NMC соответственно. Докажите, что CF и CH перпендикулярны.

б) Пусть L — это точка пересечения BM и AN, $BC=2$, $AC=5$. Найдите ML.

Решение.

а) Треугольники ABC и NMC равны по двум катетам, следовательно,

$$\angle MCF=\angle MNC=\angle BAC=90^\circ-HCA.$$



Таким образом, $\angle HCF=90^\circ$.

б) Катеты AC и CN равны, поэтому угол CAN равен 45°. Катеты BC и CM также равны, поэтому угол BMC равен 45°. Углы AML и BMC равны как вертикальные, следовательно,

$$MLA=180^\circ-45^\circ-45^\circ=90^\circ.$$

Таким образом,

$$ML=\frac{AM}{\sqrt{2}}=\frac{AC-MC}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

17)

Обозначим сумму кредита за $S=220$, выплату в первые три года за a, а выплату в последние два года за b. Тогда, если $k=1+\frac{r}{100}$, то $kS-a=S$ — так выглядит выплата в каждый из первых трех годов. Условие выплаты кредита двумя равными платежами в последние два года дается формулой $k(kS-b)-b=0$. Тогда $a=S(k-1)$, $b=\frac{k^2S}{k+1}$.

По условию, сумма всех выплат составляет $420=3a+2b$. Подставляя выражения a и b, выраженные через k, получаем уравнение:

$$3S(k-1)+\frac{2k^2S}{k+1}=420.$$

Подставим $S=220$, имеем:

$$3(k-1)+\frac{2k^2}{k+1}=\frac{420}{220}\Leftrightarrow\frac{5k^2-3}{k+1}=\frac{21}{11},$$

откуда получаем квадратное уравнение: $55k^2-21k-54=0$. В силу теоремы Виета, сумма корней полученного уравнения равна $\frac{21}{55}$, а их произведение равно $-\frac{54}{55}$. Нетрудно подобрать числа (см. комментарий ниже), удовлетворяющие этим равенствам: это числа $-\frac{9}{11}$ и $\frac{6}{5}$. По теореме, обратной теореме Виета, найденные числа являются корнями этого квадратного уравнения. Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Тем самым $k=\frac{6}{5}$, откуда $r=20$.

Комментарий. Исходя из произведения, разумно искать корни в виде $\frac{x}{11}$ и $\frac{y}{5}$, где $xy=-54=-2\cdot3\cdot3\cdot3$. Кроме того, из суммы корней находим, что $5x+11y=21$. Теперь подбираем удовлетворяющие системе целые числа: $x=-9$, $y=6$.

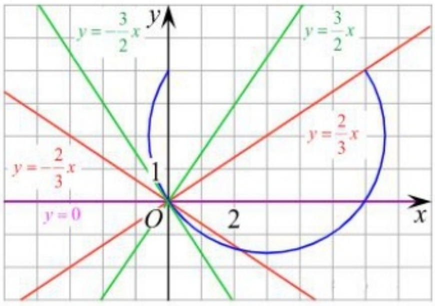
Ответ: $r=20$.

18)

Преобразуем систему:

$$\begin{cases}\sqrt{16-y^2}=\sqrt{16-a^2x^2},\\ x^2+y^2=6x+4y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16-y^2\geq 0,\\ 16-y^2=16-a^2x^2,\\ x^2-6x+y^2-4y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4\leq y\leq 4,\\ y=\pm ax,\\ (x-3)^2+(y-2)^2=13.\end{cases}$$

Изобразим линии, соответствующие предложениям системы, в плоскости xOy. Каждое из двух уравнений $y=\pm ax$ задаёт пучок прямых, проходящих через начало координат, симметричных друг другу относительно оси ординат и совпадающих при $a=0$. Двойное неравенство $-4\leq y\leq 4$ задает горизонтальную полосу, ограниченную прямыми $y=-4$ и $y=4$, включая границы. Уравнение $(x-3)^2+(y-2)^2=13$ задает окружность с центром в точке $(3;2)$ и радиусом $\sqrt{13}$. Дуга окружности, лежащая в указанной полосе, выделена на рисунке синим. Определим, при каком значении параметра a прямые, задаваемые уравнениями $y=\pm ax$, имеют с этой дугой окружности ровно две общие точки.



Точка $(0;0)$ является решением при любом значении параметра a. Вторая точка пересечения соответствует следующим трем случаям.

— Пересечению совпадающих при $a=0$ прямых $y=\pm ax$ с дугой окружности в точке $(6;0)$ — см. рис., выделено пурпурным.

— Пересечению с дугой окружности одной из прямых в том случае, когда другая прямая является касательной, проходящей через точку $(0;0)$. Найдем уравнение такой касательной. Прямая, проходящая через начало координат, задается уравнением $y=kx$. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то есть перпендикулярна прямой $y=\frac{2}{3}x$, содержащий этот радиус (см. рис.). Две прямые на плоскости, отличные от координатных осей, перпендикулярны тогда и только тогда, когда произведение их угловых коэффициентов равно -1. Тем самым $k\cdot\frac{2}{3}=-1$, откуда $k=-\frac{3}{2}$. Следовательно, искомое уравнение касательной есть $y=-\frac{3}{2}x$, что соответствует значениям $a=\pm\frac{3}{2}$. При этом вторая прямая $y=\frac{3}{2}x$ не пересекает дугу окружности в точке, отличной от начала координат, а значит, найденные значения параметра не являются искомыми.

— Пересечению с дугой окружности одной из прямых, если при этом вторая прямая не пересекает дугу в точке, отличной от точки $(0;0)$. Этот случай реализуется при $a>-\frac{2}{3}$ или при $a<\frac{2}{3}$, за исключением ранее отброшенных точек $a=\pm\frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)\cup\{0\}\cup\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

19)

а) Пусть на доске написаны числа 24, 54 и 204. Тогда их сумма равна 282.

б) Каждое из написанных чисел оканчивается на 4, поэтому если их сумма оканчивается на 0, то их количество должно делиться на 5. Сумма пяти наименьших чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 4, равна 24 + 54 + 84 +114 + 144 = 420. Значит, получить сумму 390 невозможно.

в) Пусть на доске написано n чисел. Заметим, что любое число, которое оканчивается на 4, представимо в виде $5k+4$. Значит, сумма чисел, написанных на доске, равна $2226=5m+4n$. Следовательно, $4n$ даёт остаток 1 при делении на 5, откуда получаем, что n даёт остаток 4 при делении на 5.

Предположим, что $n\geq 14$. Сумма четырнадцати наименьших чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 4, равна

$$24+54+84+\ldots+384+414=\frac{14\cdot(24+414)}{2}=3066>2226.$$

Значит, $n<14$, следовательно, $n\leq 9$.

Покажем, что могло быть написано девять чисел. Например, сумма девяти чисел 24, 54, 84, 114, 144, 174, 204, 234, 1194 равна 2226.

Ответ: а) да, б) нет, в) 9.