Ответы и решения для варианта 34073002

1)В одной таблетке лекарства содержится 20 · 0,05 = 1 мг активного вещества. Суточная норма активного вещества для ребенка весом 5 кг составит: 1,4 · 5 = 7 мг. Тем самым, ребенку следует дать 7 таблеток. Ответ: 7.

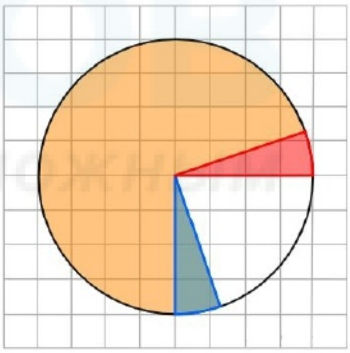
2)Из диаграммы видно, что наибольшая и наименьшая среднемесячные температуры составляли 18 °C и −20 °C соответственно (см. рисунок). Найдем их разность: 18 − (−20) = 38 °C. Ответ: 38.

3)

Отрежем от закрашенной фигуры сектор, отмеченный синим цветом, и добавим к ней сектор, выделенный красным цветом. Указанные секторы равны, поэтому площадь фигуры не изменилась. Следовательно, она равна трём четвертям площади круга, радиус которого $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ см. Поэтому

$$S = \frac{3}{4}\pi R^2 = \frac{3}{4}\pi \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 12 \text{ см}^2.$$

Ответ: 12.



4)

Команда может получить не меньше 4 очков в двух играх тремя способами: 3+1, 1+3, 3+3. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Каждое из этих событий представляет собой произведение двух независимых событий — результата в первой и во второй игре. Отсюда имеем:

$$P(N \geq 4) = P(3+1) + P(1+3) + P(3+3) = P(3) \cdot P(1) + P(1) \cdot P(3) + P(3) \cdot P(3) =$$
$$= 0,4 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,08 + 0,08 + 0,16 = 0,32.$$

Ответ: 0,32.

5)

Используем формулу $\log_{a^m} a^n = \dfrac{n}{m}$:

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \log_{2^3} 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow \frac{8x-4}{3} = 4 \Leftrightarrow 8x-4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

Приведем другое решение:

$$\log_8 2^{8x-4} = 4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 8^4 \Leftrightarrow 2^{8x-4} = 2^{12} \Leftrightarrow 8x-4 = 12 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

6)

Имеем:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = \frac{AC}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{4,8}{\sqrt{1-\frac{49}{625}}} = 4,8 \cdot \frac{25}{24} = 5.$$

Ответ: 5.

7)

Найдем формулу, задающую функцию $f(x)$, график которой изображён на рисунке.

$$f(x) = F'(x) = -3x^2 - 54x - 240 = -3(x^2+18x) - 240 = 3 - 3(x+9)^2.$$

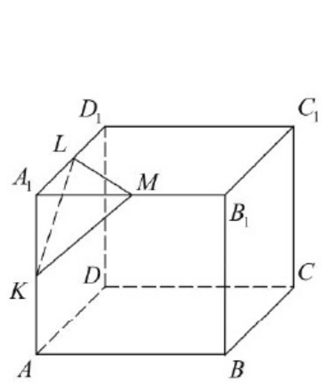
Следовательно, график функции $f(x)$ получен сдвигом графика функции $y = 3-3x^2$ на 9 единиц влево вдоль оси абсцисс. Поэтому искомая площадь фигуры равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3-3x^2$ и отрезком $[-1;\ 1]$ оси абсцисс. Имеем:

$$S = \int_{-1}^{1} (3-3x^2)dx = 2\int_{0}^{1} (3-3x^2)dx = 2(3x-x^3)\Big|_0^1 = 2(3-1) - 0 = 4.$$

Ответ: 4.

8)

Стороны сечения KM, KL, и LM равны как гипотенузы равных прямоугольных треугольников A_1KM, KLA_1, и LA_1M, которые равны друг другу по двум катетам. Таким образом, треугольник LKM является равносторонним. Поэтому угол MLK равен 60°.



Ответ: 60.

9)

Выполним преобразования:

$$(1-\log_2 12)(1-\log_6 12)=(1-\log_2 2\cdot 6)(1-\log_6 2\cdot 6)=(1-1-\log_2 6)(1-\log_6 2-1)=-\log_2 6\cdot(-\log_6 2)=1.$$

Ответ: 1.

10)

Задача сводится к решению неравенства $f(v)-f_0\geq 10$ при известном значении постоянной $f_0=440$ Гц:

$$f(v)-f_0\geq 10\Leftrightarrow \frac{f_0}{1-\frac{v}{c}}-f_0\geq 10\Leftrightarrow \frac{440}{1-\frac{v}{315}}-440\geq 10\Leftrightarrow 1-\frac{v}{315}\leq\frac{44}{45}\Leftrightarrow v\geq\frac{315}{45}=7\text{ м/с}.$$

Ответ: 7.

11)

Пусть цена холодильника ежегодно снижалась на p процентов в год. Тогда за два года она снизилась на $(1-0,01p)^2$, откуда имеем:

$$20\,000(1-0,01p)^2=15\,842\Leftrightarrow(1-0,01p)^2=0,7921\Leftrightarrow$$
$$\underset{1-0,01p>0}{\Leftrightarrow}1-0,01p=0,89\Leftrightarrow p=11.$$

Ответ: 11.

12)

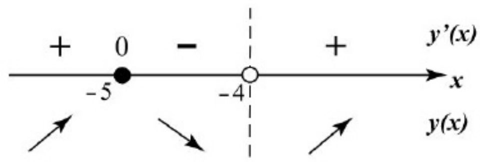
Заметим, что $\ln a^2=2\ln|a|$, а значит,

$$y=2\ln|x+4|+2x+7=\begin{cases}2\ln(x+4)+2x+7, & x>-4\\ 2\ln(-x-4)+2x+7, & x<-4.\end{cases}$$

Тогда

$$y'=\begin{cases}\dfrac{2}{x+4}+2, & x>-4,\\ \dfrac{2}{x+4}+2, & x<-4\end{cases}=\frac{2(x+5)}{x+4}.$$

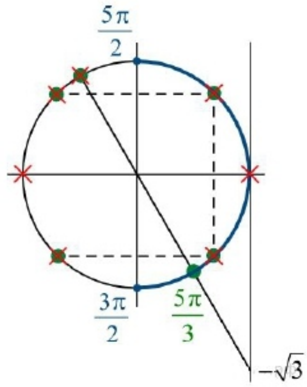
Производная обращается в нуль в точке -5, которая является точкой максимума.



Ответ: -5.

13)

а) $\dfrac{(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})\log_{13}(2\sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2}\cos x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x+\sqrt{3}=0,\\ 2\sin^2 x=1,\end{array}\right.\\ \sqrt{2}\cos x\neq 1,\\ \cos x>0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=-\sqrt{3},\\ \sin x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{array}\right.\\ \cos x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x>0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases} \Leftrightarrow$



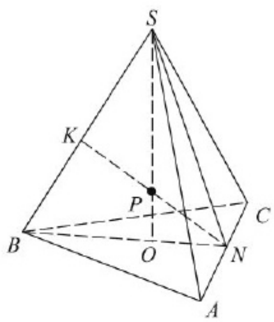
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg}x=-\sqrt{3},\\ \cos x>0.\end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

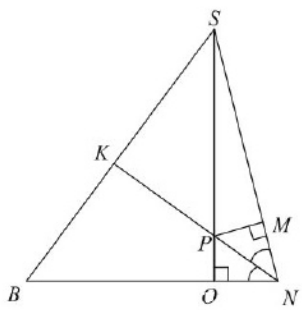
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$. Получим число $\dfrac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n;\ n\in\mathbb{Z};$ б) $\dfrac{5\pi}{3}$.

14)

а) Точка O принадлежит отрезку BN, значит, точка P, лежащая на отрезке SO, находится в плоскости SBN. Значит, прямая NP также лежит в плоскости SBN и пересекает прямую SB в точке K. Треугольник SNB равнобедренный, поскольку отрезки SN и BN — медианы одинаковых равносторонних треугольников SAC и BAC. Поэтому $SN = BN$. В точке O пересекаются медианы основания, значит, $ON=\dfrac{1}{3}BN=\dfrac{1}{3}SN$. Опустим перпендикуляр из точки P на сторону SN. Пусть он пересекает SN в точке M. Треугольники SPM и SNO подобны, поэтому $\dfrac{SP}{PM}=\dfrac{SN}{ON}=3$. Значит, $PM=\dfrac{1}{3}SP=PO$. Следовательно, треугольники NPO и NPM равны и PN — биссектриса угла SNB. В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Значит, $NK\perp BS$.





б) Так как BS перпендикулярно NK, то искомое расстояние равно длине отрезка BK. Так как NK является медианой треугольника SNB, то $BK=\dfrac{1}{2}BS=2$.

Ответ: 2.

15)

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} \log_3(4(x^2-x-3)(2x^2+x-3)) \geq \log_3(3x^2-6)^2, \\ x^2-x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2-x-3)(2x^2+x-3) \geq (3x^2-6)^2, \\ x^2-x-3>0, \\ 3x^2-6 \neq 0. \end{cases}$$

Заметим, что $3x^2-6=(x^2-x-3)+(2x^2+x-3)$. Пусть $x^2-x-3=a$, $2x^2+x-3=b$. Тогда неравенство системы принимает вид:

$$4ab \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \leq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 0.$$

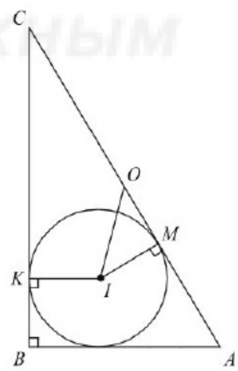
Данное неравенство выполняется только при $a=b$. Значит,

$$x^2-x-3=2x^2+x-3 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

С учётом ограничений из первой системы получаем, что $x=-2$

Ответ: -2.

16)



а) Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке K. Обозначим $BK=x$. Пусть S — площадь треугольника, p — полупериметр. Тогда

$$p=2R+3R+x=5R+x, \qquad S=pR=R(5R+x).$$

С другой стороны, по формуле Герона

$$S=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}=\sqrt{(5R+x)\cdot 2R\cdot 3R\cdot x}=R\sqrt{6x(5R+x)}.$$

Из уравнения $R(5R+x)=R\sqrt{6x(5R+x)}$ получаем, что $R=x$. Стороны треугольника ABC равны $5R$, $4R$ и $3R$, следовательно, этот треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине B.

б) Пусть I и O — центры соответственно вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Точка O — середина гипотенузы $AC=5R=10$, и $OM=AO-AM=5-2R=1$.

Тогда

$$IO=\sqrt{OM^2+MI^2}=\sqrt{1^2+R^2}=\sqrt{5}.$$

Ответ: б) $\sqrt{5}$.

17)

Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце кода k, то в конце двадцать пятого года на его счёте будет $S(k)=k^2(1+r)^{25-k}$ тыс. рублей.

Найдем производную полученного выражения:

$$S'(k)=2k(1+r)^{25-k}-k^2(1+r)^{25-k}\ln(1+r)=k(1+r)^{25-k}(2-k\ln(1+r)).$$

Заметим, что найденная производная равна нулю в единственной точке $k_{\max}=\dfrac{2}{\ln(1+r)}$, положительна при $k<k_{\max}$ и отрицательна при $k>k_{\max}$. Следовательно, $S(k)$ возрастает на $[1;\,k_{\max}]$ и убывает на $[k_{\max};\,25]$. Из условия известно, что продавать бумаги необходимо в конце 21 года, следовательно, доход, полученный при продаже бумаг в конце 21 года, больше, чем доход, который мог бы получить фонд при продаже бумаг в конце 20-го года и в конце 22 года. Из выясненного выше характера монотонности функции $S(k)$ можно заключить, что выполнение неравенств $S(21)>S(20)$ и $S(21)>S(22)$ гарантирует, что $S(21)>S(k)$ для всех значений k, отличных от 21. А значит, необходимо и достаточно найти решения системы неравенств:

$$\begin{cases}S(21)>S(20),\\ S(21)>S(22)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}441(1+r)^4>400(1+r)^5,\\ 441(1+r)^4>484(1+r)^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+r<\dfrac{441}{400},\\ 1+r>\dfrac{484}{441}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{43}{441}<r<\dfrac{41}{400}.\quad (*)$$

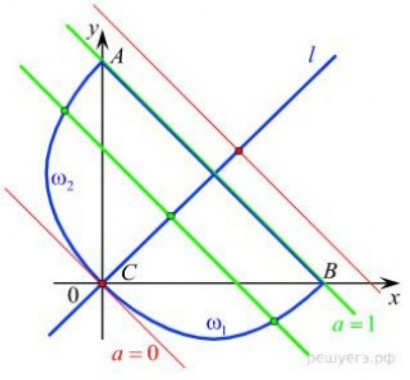
18)

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы. Рассмотрим четыре случая:

1) Если $x^2-2x\le 0$ и $y^2-2y\le 0$, то получаем уравнение

$$-x^2+2x-x^2=-y^2+2y-y^2 \Leftrightarrow y^2-x^2-y+x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-x)(x+y-1)=0.$$



Полученное уравнение задаёт пару прямых $y=x$ и $x+y=1$. Случаю удовлетворяют отрезки внутри квадрата 2×2 с вершиной в начале координат.

2) Если $x^2-2x\le 0$ и $y^2-2y>0$, то получаем уравнение

$$-x^2+2x-x^2=y^2-2y-y^2 \Leftrightarrow y=x^2-x.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $y=x^2-x$. Случаю удовлетворяет только дуга ниже оси Ox.

3) Если $x^2-2x>0$ и $y^2-2y\le 0$, то получаем уравнение

$$x^2-2x-x^2=-y^2+2y-y^2 \Leftrightarrow x=y^2-y.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $x=y^2-y$. Случаю удовлетворяет только дуга левее оси Oy.

4) Если $x^2-2x>0$ и $y^2-2y>0$, то получаем уравнение

$$x^2-2x-x^2=y^2-2y-y^2 \Leftrightarrow y=x.$$

Полученное уравнение задаёт прямую $y=x$. Случаю удовлетворяют лучи вне квадрата 2×2 с вершиной в начале координат.

Точки $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ 0)$ являются точками пересечения полученных парабол с полученными прямыми и лежат на прямых $x=0$ и/или $y=0$, поэтому искомое множество состоит из прямой l, задаваемой уравнением $y=x$, отрезка AB прямой $x+y=1$, дуги ω_1 параболы $y=x^2-x$ с концами в точках B и C и дуги ω_2 параболы $x=y^2-y$ с концами в точках A и C (см. рис.)

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, параллельную прямую AB или совпадающую с ней.

Заметим, что при $a=0$ прямая m касается парабол $x=y^2-y$ и $y=x^2-x$ в точке C.

При $a=1$ прямая m содержит отрезок AB, то есть исходная система имеет бесконечное число решений.

При $a=0$ прямая m касается дуг ω_1 и ω_2 в точке C, пересекает прямую l в точке C и не пересекает отрезок AB, то есть исходная система имеет одно решение.

При $0<a<1$ прямая m не пересекает отрезок AB, пересекает прямую l в точке, отличной от точки C, и пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в одной точке, отличной от точки C, то есть исходная система имеет три решения.

При $a<0$ или $a>1$ прямая m пересекает прямую l в одной точке и не пересекает дуги ω_1 и ω_2 и отрезок AB, то есть исходная система имеет одно решение.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $0<a\le 1$.

Ответ: $0<a\le 1$.

19)

а) Если числа равны 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и 128, то никакие три из них не образуют хорошую тройку.

Другой пример — последовательность чисел Фибоначчи без первой единицы: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

б) Если одно из чисел является длиной гипотенузы для двух треугольников, какое-то из оставшихся трёх чисел является длиной катета для этих двух треугольников, а тогда треугольники окажутся равными по гипотенузе и катету. Значит, каждое число может быть длиной гипотенузы не более чем одного треугольника. При этом два самых маленьких числа не могут являться длиной гипотенузы треугольника. Значит, среди четырёх чисел можно найти не более двух отличных троек.

Другое рассуждение для п. б). Расположим числа в порядке возрастания: $a < b < c < d$ и отметим, что гипотенузой могут быть только два больших числа. Запишем три равенства на гипотенузу треугольника: $a^2+b^2=c^2$, $b^2+c^2=d^2$, $a^2+c^2=d^2$, и заметим, что из последних двух равенств следует равенство чисел $a=b$, противоречащее условию.

в) Упорядочим числа по возрастанию. Самое большое из них может быть длиной гипотенузы не более чем в пяти треугольниках (в противном случае одно из оставшихся 11 чисел будет длиной катета в двух треугольниках с данной гипотенузой, а тогда эти треугольники будут равны по гипотенузе и катету). Аналогично, второе по величине число может быть длиной гипотенузы не более чем в пяти треугольниках, третье и четвёртое — в четырёх, пятое и шестое — в трёх, седьмое и восьмое — в двух, девятое и десятое — в одном. Итого, отличных троек может получиться не более 30. Тридцать отличных троек найдётся, например, для следующего набора чисел: $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \ldots\ \sqrt{12}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 30.