

Ответы и решения для варианта 34073001

1) Найдем стоимость покупки: $4 \text{ кг } 400 \text{ г орехов стоит } 4,4 \cdot 75 = 330 \text{ рублей.}$

Значит, с 350 рублей Маша получит сдачи $350 - 330 = 20 \text{ рублей. Ответ: 20.}$

2) Чтобы найти среднюю скорость, необходимо пройденное расстояние разделить на время прохождения: $100 : 2 = 50 \text{ км/ч Ответ: 50.}$

3) Радиус окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника, равен двум третьим его высоты. Поэтому он равен 2. Ответ: 2.

4)

Пусть завод произвел n тарелок. В продажу поступят все качественные тарелки и 20% невыявленных дефектных тарелок: $0,9n + 0,2 \cdot 0,1n = 0,92n$ тарелок. Поскольку качественных из них $0,9n$, вероятность купить качественную тарелку равна

$$\frac{0,9n}{0,92n} = \frac{90}{92} = 0,978\dots$$

Округляя результат до сотых, получаем 0,98.
Ответ: 0,98.

5)

На ОДЗ перейдем к уравнению на основание логарифма:

$$\log_{x-5} 49 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 = 49, \\ x-5 > 0, \\ x-5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = \pm 7, \\ x-5 > 0, \\ x-5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x-5 = 7 \Leftrightarrow x = 12.$$

Итак, на ОДЗ уравнение имеет только один корень.

Ответ: 12.

6)

Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен половине разности суммы катетов и гипотенузы:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{2a-a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2} = \frac{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

7)

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна оси абсцисс или совпадает с ней, она имеет вид $y = b$, и её угловой коэффициент равен 0. Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент, равен нулю, а значит, и производная равна нулю. Производная равна нулю в той точке, в которой её график пересекает ось абсцисс. Поэтому искомая точка $x = -3$.

Ответ: -3 .

8)

Поскольку боковые грани SAB , SDC и SBC наклонены к основанию под углом 60° , углы A и D в треугольнике ASD и угол G в треугольнике SGH равны 60° .

Поэтому треугольник ASD — равносторонний, а его сторона связана с высотой формулой $AD = \frac{2}{\sqrt{3}}SH$, откуда $AD = 4\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника SHG находим:

$$HG = SH \operatorname{ctg} \angle SGH = 6 \operatorname{ctg} 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

Поскольку $ABCD$ — прямоугольник, его площадь равна произведения сторон:

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB = AD \cdot HG = 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24.$$

Осталось найти объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6 = 48.$$

Ответ: 48 .

9)

Заметим, что $p(2x) = 2x - 10$, а $p(x+5) = (x+5) - 10 = x - 5$. Следовательно,

$$p(2x) - 2p(x+5) = (2x - 10) - 2(x - 5) = 0,$$

поэтому $5(p(2x) - 2p(x+5)) = 0$.

Ответ: 0 .

10)

Поскольку $f = 30$ имеем:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}.$$

Наименьшему возможному d_1 значению соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства, и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2 . Поэтому $d_2 = 180$, откуда

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{5}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow d_1 = 36 \text{ см.}$$

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение удовлетворяет условию.

Ответ: 36.

11)

К моменту первого обгона мотоциклист за 10 минут проехал столько же, сколько велосипедист за 40 минут, следовательно, его скорость в 4 раза больше. Поэтому, если скорость велосипедиста принять за x км/час, то скорость мотоциклиста будет равна $4x$, а скорость их сближения — $3x$ км/час.

С другой стороны, второй раз мотоциклист догнал велосипедиста за 30 минут, за это время он проехал на 30 км больше. Следовательно, скорость их сближения составляют 60 км/час.

Итак, $3x = 60$ км/час, откуда скорость велосипедиста равна 20 км/час, а скорость мотоциклиста равна 80 км/час.

Ответ: 80.

12)

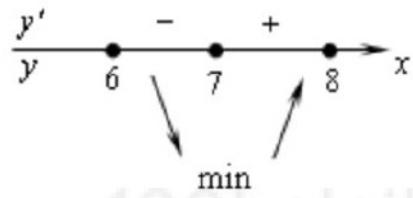
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x-8)' e^{x-7} + (x-8)(e^{x-7})' = e^{x-7} + (x-8)e^{x-7} = (x-7)e^{x-7}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} y' = 0, \\ 6 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)e^{x-7} = 0, \\ 6 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 0, \\ 6 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Наименьшим значением заданной функции на отрезке $[6; 8]$ будет $y(7) = -1$.

Ответ: -1 .

13)

а) Преобразуем уравнение:

$$7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0 \Leftrightarrow 7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 12 \cdot 4^{x^2-3x+1} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7 \left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+1} + 5 \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0 \Leftrightarrow 7 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}\right)^2 + 5 \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = 1, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1} = -\frac{12}{7}. \end{cases}$$

У второго уравнения решений нет.

Преобразуем первое уравнение: $x^2 - 3x + 1 = 0$, откуда $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

б) Оценим $\sqrt{5}$ целыми числами: $2 < \sqrt{5} < 3$. Тогда

$$\frac{5}{2} < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 3 \text{ и } 0 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}.$$

Значит, отрезку $[-1; 2]$ принадлежит только $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

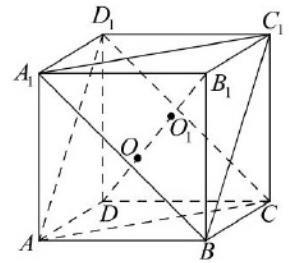
Ответ: а) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

14)

а) Прямые BC_1 и AD_1 параллельны, поэтому угол между прямыми AC и BC_1 равен углу CAD_1 . Треугольник CAD_1 равносторонний, поэтому все его углы равны 60° .

б) Заметим, что прямые AC и BC_1 содержатся в параллельных плоскостях ACD_1 и BC_1A_1 . Значит, искомое расстояние равно расстоянию между этими плоскостями.

Обозначим центры треугольников ACD_1 и BC_1A_1 через точки O и O_1 соответственно. Точка D равноудалена от вершин треугольника ACD_1 , поэтому проекция точки D на плоскость ACD_1 совпадает с O . Аналогично проекция точки D на плоскость BC_1A_1 совпадает с O_1 , а проекции точки B_1 на плоскости ACD_1 и BC_1A_1 также совпадают с точками O и O_1 соответственно. Значит, прямая DB_1 перпендикулярна плоскостям ACD_1 и BC_1A_1 и содержит точки O и O_1 .



Объем тетраэдра $DACD_1$ равен 36, а площадь его основания $S_{ACD_1} = AC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$. Значит, высота $DO = 2\sqrt{3}$.

Аналогично $B_1O_1 = 2\sqrt{3}$. Кроме того, $DB_1 = AB\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$. Значит, $OO_1 = DB_1 - B_1O_1 - DO = 2\sqrt{3}$.

Ответ: б) $2\sqrt{3}$.

15)

Пусть $t = 7^{-x^2}$, $0 < t \leq 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_2((t-3)(7^{16}t-1)) + \log_2 \frac{t-3}{7^{16}t-1} > \log_2(7^7t-2)^2.$$

Так как $t-3 < 0$, имеем $7^{16}t-1 < 0$, а значит, $0 < t < \frac{1}{7^{16}} < \frac{2}{7^7}$.

Получаем:

$$\begin{cases} \log_2(t-3)^2 > \log_2(7^7t-2)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-3| > |7^7t-2|, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t > 2-7^7t, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^{16}}.$$

Поясним: неравенство $3-t > 2-7^7t$ эквивалентно неравенству $(7^7-1)t > -1$ и выполнено для всех значений переменной. Итак,

$$7^{-x^2} < 7^{-16} \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x < -4. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

16)

а) Угол BTC вписан в окружность, а угол BOC — соответствующий ему центральный угол. Следовательно, $\angle BOC = 2\angle BTC$.

б) Из условия касания окружности и стороны AD следует, что прямые OT и AD перпендикулярны. Пусть окружность вторично пересекает прямую AB в точке L и сторону CD — в точке M . Тогда диаметр окружности, перпендикулярный стороне AB , делит каждую из хорд BL и CM пополам. Обозначим $OT = r$, тогда

$$AL = 2r - AB = 2r - 4, \quad DM = 2r - DC = 2r - 9.$$

По теореме Пифагора $TB^2 = AT^2 + AB^2$. По теореме о касательной и секущей $AT^2 = AB \cdot AL = 4(2r - 4)$. Следовательно, $TB^2 = 4(2r - 4) + 4^2 = 8r$.

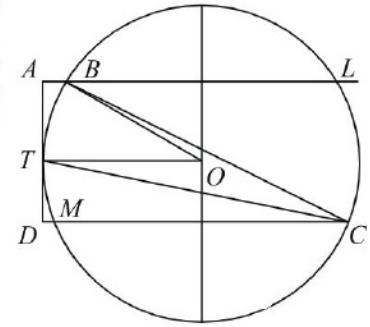
Аналогично $TC^2 = 18r$.

Из теоремы синусов следует, что $BC = 2r \cdot \sin \angle BTC$. Пусть h — искомое расстояние от точки T до прямой BC . Выразим площадь треугольника BTC двумя способами:

$$S_{BTC} = \frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{1}{2}TB \cdot TC \cdot \sin \angle BTC.$$

Отсюда получаем, что $h \cdot 2r \cdot \sin \angle BTC = \sqrt{8r} \cdot \sqrt{18r} \cdot \sin \angle BTC$. Следовательно, $h = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$.

Ответ: 6.



17)

Пусть на первый объект будет направлено x рабочих, суточная зарплата которых составит $f_1(x) = 4x^2$. Тогда на второй объект будет направлено $(24 - x)$ рабочих — суточная заработка плата составит $f_2(x) = (24 - x)^2 = 576 - 48x + x^2$. В день начальник будет должен платить рабочим $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 5x^2 - 48x + 576$ у. е.

Рассмотрим функцию $f(x)$ при $0 < x < 24$, $x \in \mathbb{N}$. Это квадратичная функция, старший коэффициент положителен, следовательно, она имеет наименьшее значение при $x_0 = 4,8$. Заметим, что точка минимума не является натуральным числом, поэтому исследуемая функция достигает наименьшего значения в точке 4 или в точке 5. Найдем и сравним эти значения:

$$f(4) = 5 \cdot 16 - 48 \cdot 4 + 576 = 16(5 - 12 + 36) = 16 \cdot 29 = 16 \cdot 30 - 16 = 464,$$

$$f(5) = 125 - 240 + 576 = 461.$$

Тем самым, на множестве натуральных значений аргумента наименьшее значение функции достигается в точке 5. Поэтому необходимо направить 5 рабочих на первый объект, 19 рабочих — на второй объект. Зарплата рабочих составит 461 у. е.

Ответ: 5 рабочих на 1-й объект, 19 рабочих на 2-й объект; 461 у.е.

18)

Заметим, что вместе с каждым решением $(x; y)$ система имеет также решения $(y; x); (-x; -y); (-y; -x)$. Поскольку решений должно быть два, полученные пары должны совпадать.

1. Если $(x; y) = (y; x)$, то $x = y$. Тогда $2x^2 = a^2, x^2 = a^2 - 3a$, откуда

$$2a^2 - 6a = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 6. \end{cases}$$

Проверка показывает, что при $a = 6$ система $x^2 + y^2 = 36, xy = 18$, имеет два решения. При $a = 0$, получаем $x^2 + y^2 = 0, xy = 0$. Эта система имеет только одно решение.

2. Если $(x; y) = (-x; -y)$, то $x = y = 0$. Тогда $a = 0$, этот случай исследован выше.

3. Если $(x; y) = (-y; -x)$, то $x = -y$: Тогда: $2x^2 = a^2, -x^2 = a^2 - 3a$, откуда

$$3a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 2. \end{cases}$$

Проверка показывает, что при $a = 2$ система $x^2 + y^2 = 4, xy = -2$, имеет два решения.

4. Если $(y; x) = (-x; -y)$, то $x = -y$ — см. случай 3.

5. Если $(y; x) = (-y; -x)$, то $x = y = 0$ — см. случай 2.

6. Если $(-x; -y) = (-y; -x)$, то $x = y$ — см. случай 1.

19)

а) Для чисел $x = 17$ и $y = 10$ выполняется условие $3x = 8y - 29, q = 170, d = 1, \frac{q}{d} = 170$.

б) и в) При $x = 1$ и $y = 4$ выполняется равенство $3x = 8y - 29$ и $\frac{q}{d} = 4$. Покажем, что никакое значение $\frac{q}{d} < 4$ не реализуется.

Если $x = y$, то $x = y = \frac{29}{5}$, что невозможно, поскольку числа x и y — натуральные. Пусть для определённости $x < y$ и $x = ad, a$ и $y = bd$. Тогда натуральные числа a и b взаимно просты и $a < b$. Получаем $q = \frac{xy}{d} = abd$, откуда $\frac{q}{d} = ab$.

Если $\frac{q}{d} = 1$, то $a = b$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d} = 2$, то $a = 1, b = 2$ и, значит, $y = 2x$, откуда $x = \frac{29}{13}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d} = 3$, то $a = 1, b = 3$ и, значит, $y = 3x$, откуда $x = \frac{29}{21}$, что невозможно.

Ответ: а) да; б) нет) в) 4.