

Ответы и решения для варианта 34072999

1) Установка счетчиков позволяет ежемесячно экономить $800 - 300 = 500$ руб. Значит, они окупятся через $3300 : 500 = 6,6$ месяца или за 7 полных месяцев.

2) Для того, чтобы крутящий момент был не меньше $120 \text{ Н} \cdot \text{м}$ число оборотов двигателя в минуту n должно быть не меньше 2000 и не больше 5000 (см. график). Поэтому искомая наименьшая скорость определяется по формуле $v = 0,036 \cdot 2000 = 72 \text{ км/ч}$. Ответ: 72.

3)

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен полуразности суммы катетов и гипотенузы. Заметим, что в треугольнике с катетами 3 и 4 гипотенуза равна 5, откуда

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{3 + 4 - 5}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

4)

Для того, чтобы поступить хоть куда-нибудь, З. нужно сдать и русский, и математику как минимум на 70 баллов, а помимо этого еще сдать иностранный язык или обществознание не менее, чем на 70 баллов. Пусть A , B , C и D — это события, в которых З. сдает соответственно математику, русский, иностранный и обществознание не менее, чем на 70 баллов. Тогда поскольку

$$P(C + D) = P(C) + P(D) - P(C \cdot D),$$

для вероятности поступления имеем:

$$\begin{aligned} P(AB(C + D)) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C + D) = P(A) \cdot P(B) \cdot (P(C) + P(D) - P(C) \cdot P(D)) \\ &= 0,6 \cdot 0,8 \cdot (0,7 + 0,5 - 0,7 \cdot 0,5) = 0,408. \end{aligned}$$

Ответ: 0,408.

5)

Решим уравнение:

$$\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \\ \frac{\pi x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 6k; \\ x = \frac{5}{2} + 6k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Значениям $k \leq -1$ соответствуют отрицательные корни.

Если $k = 0$, то $x = 0,5$ и $x = 2,5$.

Если $k = 1$, то $x = 6,5$ и $x = 8,5$.

Значениям $k \geq 2$ соответствуют большие положительные корни.

Наименьшим положительным решением является $0,5$.

Ответ: $0,5$.

6)

Треугольник ADC — равнобедренный, значит, угол DAC равен углу ACD , как углы при его основании. Треугольник ADB тоже равнобедренный, значит, угол ADB равен углу ABD , как углы при его основании, причем

$$\angle ADB = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle ACD) = 2\angle ACD.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ &\Leftrightarrow \angle BAD + \angle DAC + \angle ABD + \angle ACD = 180^\circ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5\angle ACD = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ACD = 36^\circ. \end{aligned}$$

Ответ: 36 .

7) Мгновенная скорость равна производной перемещения по времени.

Значение производной равно нулю в точках экстремума функции $s(t)$.

Точек экстремума на графике 6. Ответ: 6 .

8)

Введём обозначения углов, как показано на рисунке. Пусть R — длина половины диагонали. В силу связи основных углов в правильной пирамиде:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta / \sqrt{2} = \sqrt{7},$$

поэтому

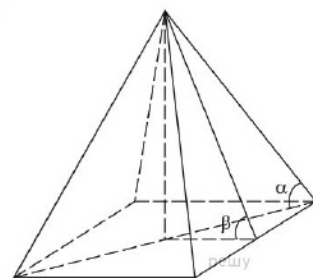
$$a = \sqrt{2}R = \sqrt{2} \cdot l \cos \alpha.$$

Вычислим $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Получаем, что

$$a = \sqrt{2} \cdot l \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot 22 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} = 11.$$



Ответ: 11.

9)

Выполним преобразования:

$$x + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = x + \sqrt{(x-2)^2} = x + |x-2|.$$

При $x \leq 2$ имеем $|x-2| = 2-x$. Тогда $x + |x-2| = x + 2 - x = 2$.

Ответ: 2.

10)

Задача сводится к решению уравнения $U_0 \sin(\omega t + \varphi) = 1$ при заданных значениях амплитуды сигнала, частоты и фазы:

$$2 \sin(120^\circ t - 30^\circ) = 1 \Leftrightarrow \sin(120^\circ t - 30^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 120^\circ t - 30^\circ = 30^\circ + 360^\circ n \\ 120^\circ t - 30^\circ = 150^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 120^\circ t = 60^\circ + 360^\circ n \\ 120^\circ t = 180^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 1 + 6n \\ 2t = 3 + 6n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

На протяжении первой секунды лампочка будет гореть $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$ с, то есть 50 % времени.

Ответ: 50.

11)

Обозначим S км – расстояние от A до C , v км/ч – скорость автомобиля, t ч – время движения мотоциклиста от A до C . Тогда $\left(t + \frac{1}{2}\right)v = 90t$ и $\left(2t + \frac{1}{2}\right)v = 150$. Решим систему полученных уравнений:

$$\begin{cases} \left(t + \frac{1}{2}\right)v = 90t, \\ \left(2t + \frac{1}{2}\right)v = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right)v}{\left(2t + \frac{1}{2}\right)v} = \frac{90t}{150} \\ \left(2t + \frac{1}{2}\right)v = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2t + 1}{2t + \frac{1}{2}} = \frac{6t}{5}, \\ \left(2t + \frac{1}{2}\right)v = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ v = 60. \end{cases}$$

Тогда $S = 90t = 90$ км.

Ответ: 90.

12)

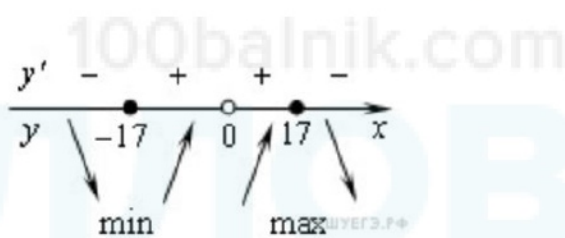
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x^2 + 289}{x}\right)' = -\left(x + \frac{289}{x}\right)' = -\left(1 - \frac{289}{x^2}\right) = \frac{289 - x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2 = 289 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17, \\ x = -17. \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 17$.

Ответ: 17.

13)

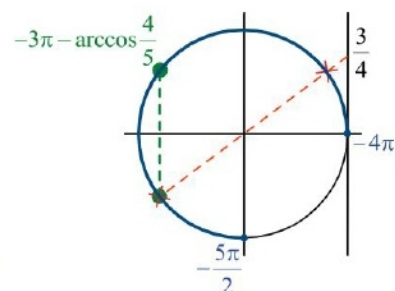
а) Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля:

$$\frac{5 \cos x + 4}{4 \operatorname{tg} x - 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{4}{5}, \\ \operatorname{tg} x \neq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Из уравнения $\cos x = -\frac{4}{5}$ получаем $x = \pm \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что если $\cos x = -\frac{4}{5}$, то $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm \frac{3}{5}$, а тогда $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \pm \frac{3}{4}$. Следовательно, условию $\operatorname{tg} x \neq \frac{3}{4}$ не удовлетворяют значения переменной, для которых $\cos x = -\frac{4}{5}$ и $\sin x = -\frac{3}{5}$ одновременно. Поэтому серия $-\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi k$ даёт посторонние корни, а серия $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi k$ даёт решения заданного уравнения (см. рис.). Тем самым,

$$x = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi k = \pi - \arccos\frac{4}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, лежащие на отрезке $\left[-4\pi, -\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим

$$x = -3\pi - \arccos\frac{4}{5}.$$

Ответ: а) $\left\{ \pi - \arccos\frac{4}{5} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-3\pi - \arccos\frac{4}{5}$.

14)

а) Проведем $CH \perp AB$ (см. рис. 1), тогда B_1H — проекция B_1C на плоскость AA_1B_1B . Полученная проекция перпендикулярна прямой BM (*), поэтому в силу теоремы о трёх перпендикулярах, прямые B_1C и BM взаимно перпендикулярны.

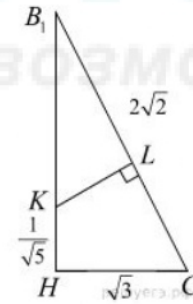
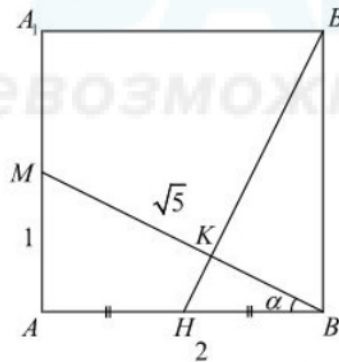
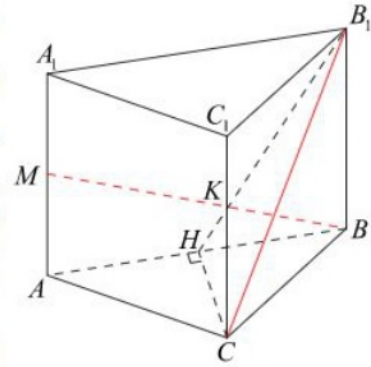
Докажем (*). Заметим (см. рис. 2), что треугольники MAB и HBB_1 равны. Повернём HBB_1 на угол 90° по часовой стрелке и совместим точку B с точкой A . Сторона AM совместится со стороной HB , а сторона AB — со стороной BB_1 . Поскольку после поворота на 90° стороны MB и HB_1 совместились, до поворота угол между ними был равен 90° .

б) Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из них. Заметим, что $MB \perp B_1H$ и $MB \perp B_1C$ (из п. а), следовательно, $(MB) \perp (B_1HC)$, а тогда K — проекция MB на плоскость B_1HC . Проекцией прямой CB_1 на плоскость B_1HC является сама прямая CB_1 . Осталось найти расстояние от K до CB_1 .

В треугольнике MAB находим $\sin \alpha = \sin HBM = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда в треугольнике HKB имеем: $HK = HB \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Треугольники B_1HC и B_1LK подобны (см. рис. 3), поэтому

$$\frac{KL}{HC} = \frac{B_1K}{B_1C} = \frac{B_1H - KH}{B_1C}, \text{ откуда}$$

$$KL = \frac{\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$



Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

15)

Областью определения неравенства являются положительные числа, отличные от 0,25 и 1. Выражение $\left| \log_x \frac{x}{4} \right|$ либо равно нулю при $x = 4$, при этом неравенство верно; либо положительно, и тогда на него можно разделить, не меняя знака неравенства. Имеем:

$$\log_{4x}(2x^2) \leq 1 \Leftrightarrow \log_{4x}(2x^2) \leq \log_{4x} 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,25, \\ (4x-1)(2x^2-4x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 0,25, \\ (4x-1)(x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \leq 2.$$

Учитывая, что $x \neq 1$, получаем ответ: $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 2] \cup \{4\}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 2] \cup \{4\}$.

16)

а) По теореме о внешнем угле треугольника,

$$\angle BOC = \angle BAO + \angle ABO = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ.$$

Поэтому

$$\angle BEC + \angle BOC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Значит, точки B, E, C, O лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы $\angle CBE$ и $\angle COE$ опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle CBE = \angle COE$.

б) По теореме косинусов,

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{40^2 + 24^2 - 2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 8\sqrt{25 + 9 + 15} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Вписанные углы $\angle BEO$ и $\angle CEO$ опираются на равные хорды BO и CO , значит, EO — биссектриса угла BEC . Пусть M — точка её пересечения со стороной BC . По формуле для биссектрисы треугольника получаем:

$$EM = \frac{2BE \cdot CE \cdot \cos \frac{\angle BEC}{2}}{BE + CE} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \cos 60^\circ}{40 + 24} = 15.$$

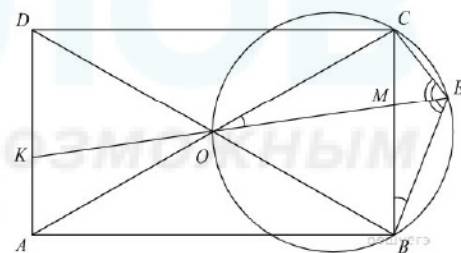
По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{BM} = \frac{CE}{BE} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$, значит, $CM = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{8} \cdot 56 = 21$, $BM = 35$.

По теореме о произведении пересекающихся хорд $EM \cdot MO = BM \cdot CM$, откуда находим, что

$$MO = \frac{BM \cdot CM}{EM} = \frac{35 \cdot 21}{15} = 49.$$

Треугольники COM и AOK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $OK = OM$. Следовательно, $EK = EM + 2OM = 15 + 98 = 113$.

Ответ: 113.



17)

Решение 1. Вместо суммарного процента будем считать суммарную долю девочек — очевидно, эти числа отличаются в 100 раз и достигают своего максимума одновременно. Каждая девочка в классе из 22 человек составляет $\frac{1}{22}$ от общего числа учащихся в этом классе, а в классе из 23 человек — $\frac{1}{23}$ от общего числа учащихся. Значит, если поменять местами девочку из большего класса и мальчика из меньшего, суммарный процент девочек вырастет. Таким образом, максимум достигается, когда все подобные перестановки сделаны, то есть, когда меньший класс полностью состоит из девочек, а в большем классе — 3 девочки и 20 мальчиков.

Решение 2. Пусть в меньший класс распределено x девочек (где $2 \leq x \leq 22$), тогда в больший класс попало $(25 - x)$ девочек. Значит, суммарная доля девочек в двух классах равна $\frac{x}{22} + \frac{25-x}{23} = \frac{x}{506} + \frac{25}{23}$ и представляет собой линейную функцию с положительным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на правом конце промежутка $[2; 22]$, то есть при $x = 22$. Таким образом, меньший класс полностью должен состоять из девочек, а в большем классе должно быть 3 девочки и 20 мальчиков.

Ответ: В одном классе — 22 девочки, в другом — 3 девочки и 20 мальчиков.

18)

Ясно, что при $b = 0$ система имеет единственное решение

$$\begin{cases} y = ac^2, \\ x = ac + 1, \end{cases}$$

которое выражается через a и c однозначно, то есть существует для любых a и c .

При $b \neq 0$ если умножить второе уравнение на b и из полученного уравнения вычесть первое уравнение системы, получим

$$(b^2 - 1)y = abc + b - ac^2.$$

Если же умножить на b первое уравнение и из полученного уравнения вычесть второе уравнение системы, то получим

$$(b^2 - 1)x = abc^2 - ac - 1.$$

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = ac^2 - bx, \\ (b^2 - 1)x = abc^2 - ac - 1. \end{cases}$$

Первое уравнение полученной системы позволяет получить y по x . Следовательно, система имеет решения тогда и только тогда, когда имеет решения второе уравнение.

Уравнение $(b^2 - 1)y = abc + b - ac^2$ имеет единственное решение при любом $b \neq \pm 1$. Если $b = -1$ или $b = 1$, то уравнение принимает вид $ac^2 + ac + 1 = 0$ и $ac^2 - ac - 1 = 0$ соответственно. Исходная система будет иметь решения если существуют a и c , удовлетворяющие полученным соотношениям. При $a = 0$ они не выполняются ни при каких значениях параметров. При $a \neq 0$ рассмотрим их как квадратные уравнения относительно параметра c . Дискриминанты уравнений должны быть неотрицательны: $a^2 - 4a \geq 0$ и $a^2 + 4a \geq 0$. Решая неравенства, находим $a \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$ и $a \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty)$. Система должна иметь решения для любых значений b , поэтому найденные множества значений параметра a следует пересечь, получаем: $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

19)

а) Пусть $a = 10$, $b = 20$, $c = 11$ и $d = 37$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{21}{57} = \frac{7}{19}$.

б) Предположим, что $11 \cdot \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Тогда:

$$11(a+c)bd = (b+d)(ad+bc) \Leftrightarrow 11abd + 11bcd = abd + bcd + ad^2 + b^2c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10abd - ad^2 = b^2c - 10bcd \Leftrightarrow ad(10b-d) = bc(b-10d).$$

С другой стороны имеем: $10b-d \geq 10 \cdot 10 - 99 > 0 > 99 - 10 \cdot 10 \geq b-10d$. Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ разные знаки и, значит, левая и правая часть в последнем равенстве не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99 > a > 3b+1$ и $c \geq 6d+1$. Значит, $b \leq \frac{98}{3} < 33$. Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b \leq 32$. Используя неравенства $a \geq 3b+1$, $c \geq 6d+1$, $b \leq 32$ и $d \geq 10$, получаем:

$$\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{3b+6d+2}{b+d} = 3 + \frac{3d+2}{b+d} \geq 3 + \frac{3d+2}{d+32} = 6 - \frac{94}{d+32} \geq 6 - \frac{94}{42} = \frac{79}{21}.$$

Пусть $a = 97$, $b = 32$, $c = 61$ и $d = 10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d} = \frac{158}{42} = \frac{79}{21}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{79}{21}$.

Ответ: а) Да, например, если $a = 10$, $b = 20$, $c = 11$ и $d = 37$; б) нет; в) $\frac{79}{21}$.