Ответы и решения для варианта 34072997

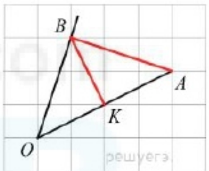
1)Поскольку на 10 человек следует взять 0,1 фунта чернослива, на одного человека следует взять 0,01 фунта чернослива. Тогда на трех человек потребуется 0,03 фунта чернослива, что составляет $0{,}03 \cdot 0{,}4 = 0{,}012$ кг или 12 граммов. Ответ: 12.

2)Из графика видно, что в начальный момент времени было 20 граммов реагента, а через три минуты его стало 8 граммов. Следовательно, прореагировало 12 граммов. Ответ: 12.

3)

Решение.

Достроим угол до треугольника OBA, $OB = BA$. BK делит основание OA пополам, значит, BK — высота. Из рисунка находим $OK = BK = \sqrt{5}$.



$$\operatorname{tg}\angle AOB = \frac{BK}{OK} = 1.$$

Примечание.

Можно заметить и доказать, что равнобедренный треугольник ABO является прямоугольным. Тогда углы AOB и OAB равны 45°, а их тангенсы равны 1. Ещё один способ: найти тангенс искомого угла по формуле разности тангенсов через углы, тангенсы которых равны 3 и $\frac{1}{2}$.

Ответ: 1.

4)

Чтобы пятирублевые монеты оказались в разных карманах, Петя должен взять из кармана одну пятирублевую и две десятирублевые монеты. Это можно сделать тремя способами: 5, 10, 10; 10, 5, 10 или 10, 10, 5. Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}.$$

Другое рассуждение.

Вероятность того, что Петя взял пятирублевую монету, затем десятирублевую, и затем еще одну десятирублевую (в указанном порядке) равна

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{5}.$$

Поскольку Петя мог достать пятирублевую монету не только первой, но и второй или третьей, вероятность достать набор из одной пятирублевой и двух десятирублевых монет в 3 раза больше. Тем самым, она равна 0,6.

Ответ: 0,6.

5)

Решим уравнение:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow x = -1 + 4k, k \in \mathbb{Z}.$$

Значению $k = 0$ соответствует $x = -1$. Положительным значениям параметра соответствуют положительные значения корней, отрицательным значениям параметра соответствуют меньшие значения корней. Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -1.

Ответ: -1.

6)

Углы A и HCB равны как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$BH = CB\sin\widehat{HCB} = CB\sin A = AB\sin^2 A = AB(1-\cos^2 A) = AB\left(1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 A}\right) = 13\left(1 - \frac{1}{26}\right) = 12,5.$$

Ответ: 12,5.

7)Промежутки возрастания данной функции f(x) соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам (−6; −5,2] и [2; 6). Данные промежутки содержат целые точки 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 14. Ответ: 14.

8)

Ребро параллелепипеда, лежащее напротив угла в 45°, равно $\sqrt{8}\sin 45^\circ = 2$, поскольку образует с заданной диагональю и диагональю одной из граней (эта грань является квадратом по условию) равнобедренный треугольник. Диагональ грани, которая является квадратом, тоже равна 2. Значит, площадь этого квадрата равна половине произведения диагоналей $S = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$. Тогда объем параллелепипеда равен $V = 2\cdot 2 = 4$.

Ответ: 4.

9)

Покажем, что числитель дроби равен знаменателю:

$$g(2-x) = \sqrt[3]{(2-x)(4-(2-x))} = \sqrt[3]{(2-x)(2+x)},$$
$$g(2+x) = \sqrt[3]{(2+x)(4-(2+x))} = \sqrt[3]{(2+x)(2-x)}.$$

Таким образом,

$$\frac{g(2-x)}{g(2+x)} = \frac{\sqrt[3]{(2-x)(2+x)}}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)}} = 1.$$

Ответ: 1.

10)

Задача сводится к решению неравенства $A \le 1,125A_0$ при известном значении резонансной частоты $\omega_p = 360\ c^{-1}$ и условии, что частота ω меньше резонансной:

$$A \le 1,125A_0 \Leftrightarrow \frac{A_0 \cdot 360^2}{360^2 - \omega^2} \le 1,125A_0 \Leftrightarrow 360^2 \le 1,125 \cdot 360^2 - 1,125\omega^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,125\omega^2 \le 0,125 \cdot 360^2 \Leftrightarrow \omega \le 120c^{-1}.$$

Ответ: 120.

11)

Обозначим первоначальную стоимость акций за 1. Пусть в понедельник акции компании подорожали на $c \cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1 + c \cdot 1$. Во вторник акции подешевели на $c \cdot 100\%$, и их стоимость стала составлять $1 + c - c(1+c)$. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник, то есть 0,96. Таким образом,

$$1 + c - c(1+c) = 0,96 \Leftrightarrow 1 - c^2 = 0,96 \Leftrightarrow c^2 = 0,04 \underset{c>0}{\Leftrightarrow} c = 0,2.$$

Ответ: 20.

12)

Оценим логарифм, выделив полный квадрат. В силу убывания логарифмической функции с основанием меньше 1 справедлива цепочка соотношений:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 6x + 12) = \log_{\frac{1}{3}}((x+3)^2 + 3) \le \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1.$$

Поэтому в точке −3, лежащей на отрезке [−19; −1], функция достигает наибольшего значения, равного −1.

Ответ: −1.

13)

а) Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x + \sin x)^2 = 2\sin^2 2x, \\ \sin 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin 2x = 2\sin^2 2x, \\ \sin 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1; \\ \sin 2x = -\frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \sin 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) Если $k \le 0$, то $x \le \frac{\pi}{4} < 1$, поэтому при таких k решений на отрезке [3; 5] нет.

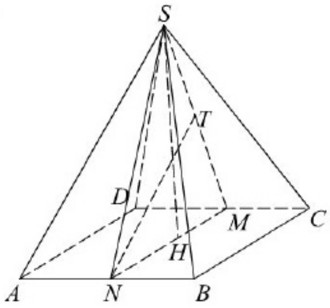
Если $k = 1$, то $x = \frac{5\pi}{4}$. Заметим, что $3 = \frac{12}{4} < \frac{5\pi}{4} < \frac{20}{4} = 5$, поэтому корень $\frac{5\pi}{4}$ лежит на отрезке [3; 5].

Если $k \ge 2$, то $x \ge \frac{9\pi}{4} > 6$, поэтому при таких k решений на отрезке [3; 5] нет.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\frac{5\pi}{4}$.

14)

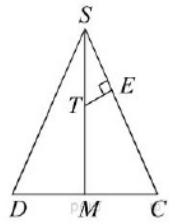
а) Точка H лежит на отрезке MN. Так как $NC = ND$, то $TC = TD$. Это означает, что точка T лежит на SM. Таким образом, точки T и H лежат в плоскости SNM, перпендикулярной плоскости ABC.



$$AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{6},$$
$$AS = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{15},$$
$$MN = AD = 2\sqrt{3},$$
$$SM = SN = \sqrt{SA^2 - AN^2} = 2\sqrt{3}.$$

Значит, треугольник SNM равносторонний, а NT — его высота и, следовательно, медиана, T — середина SM.

б) Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки T на прямую SC. Прямые NT и TE перпендикулярны, так как NT — высота пирамиды $NSCD$. Поскольку отрезок TE перпендикулярен как прямой SC, так и прямой NT, его длина и есть искомое расстояние.



Прямоугольные треугольники SET и SMC подобны, следовательно, $\frac{ET}{MC} = \frac{ST}{SC}$, откуда

$$ET = \frac{ST \cdot CM}{SC} = \frac{SM \cdot CD}{4SC} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{4 \cdot \sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

15)

Сделаем замену: $a = \frac{x-1}{x+2}$, $b = \frac{x+1}{x-3}$. Тогда

$$a + b = \frac{(x-1)(x-3) + (x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{2x^2 - x + 5}{(x+2)(x-3)}.$$

Неравенство принимает вид: $a^2 + b^2 \le \frac{(a+b)^2}{2}$, откуда

$$a^2 + b^2 - 2ab \le 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \le 0.$$

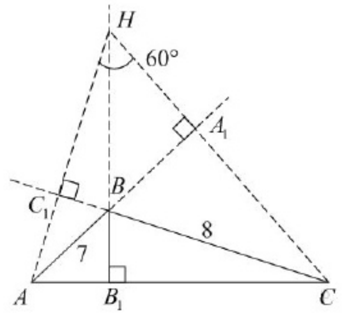
Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $a = b$. Получаем:

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{x-3} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{7}$.

16)

а) Рассмотрим треугольник AHC. В нем AA_1 и CC_1 — высоты. Тупой угол между высотами дополняет угол между сторонами, к которым они проведены, до 180°. Поэтому $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{AHC} = 120^\circ$.



б) Рассмотрим треугольник AHC, в нем $BH = AC\operatorname{ctg}\widehat{AHC} = \dfrac{AC}{\sqrt{3}}$. Сторону AC найдём по теореме косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\widehat{ABC} = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 113 + 56 = 169.$$

Тем самым, $AC = 13$, $BH = \dfrac{13}{\sqrt{3}}$.

Ответ: б) $\dfrac{13}{\sqrt{3}}$.

17)

Ежемесячное увеличение валютной массы, находящейся в обращении, составляет $100 - 50 = 50$ тыс. долларов, поэтому через n месяцев в стране будет $(1000 + 50n)$ тыс. долларов.

Количество фальшивых долларов ежемесячно уменьшается на $50 \cdot 0,3 - 100 \cdot 0,1 = 15 - 10 = 5$ тыс. долларов. Изначально их было $1\,000\,000 \cdot 0,2 = 200\,000$, поэтому через n месяцев в стране будет $(200 - 5n)$ тыс. фальшивых долларов.

Через n месяцев фальшивые доллары составили 5% от общего количества долларов. Имеем:

$$(1000 + 50n) \cdot 0,05 = 200 - 5n \Leftrightarrow 50 + 2,5n = 200 - 5n \Leftrightarrow 7,5n = 150 \Leftrightarrow n = 20.$$

Ответ: через 20 месяцев.

18)

Введём обозначения: $a - 3 = b$, $f(x) = x^4 + b^2$, $g(x) = |x - b| + |x + b|$.
В этих обозначениях исходное уравнение принимает вид $f(x) = g(x)$.

Если некоторое число x_0 является решением этого уравнения, то и число $-x_0$ также является его решением, поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ — чётные. Значит, если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение, то это решение $x = 0$.

Решим уравнение $f(0) = g(0)$ относительно b:

$$b^2 = 2|b| \Leftrightarrow |b| \cdot (|b| - 2) = 0,$$

значит, $x = 0$ является решением уравнения $f(x) = g(x)$ при $b = 0$ или $|b| = 2$.

При $b = 0$ уравнение принимает вид $x^4 = 2|x|$ и имеет три различных решения: $x = -\sqrt[3]{2}, x = 0, x = \sqrt[3]{2}$.

Заметим, что $g(x) = 2|x|$ при $|x| \geq |b|$, $g(x) = 2|b|$ при $|x| < |b|$.

Рассмотрим случай $|b| = 2$.
Если $|x| \geq |b| = 2$, то $f(x) = x^4 + b^2 \geq x^4 \geq |x| \cdot x^2 \cdot |x| \geq 2x^2 \cdot |b| > 2|x| = g(x)$, то есть уравнение решений не имеет.
Если $|x| < |b| = 2$, то $f(x) = x^4 + b^2 \geq b^2 = 2|b| = g(x)$, причём равенство возможно только при $x = 0$.
Значит, при $|b| = 2$ уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $|b| > 2$.
Если $|x| \geq |b| > 2$, то $f(x) = x^4 + b^2 \geq x^4 \geq |x| \cdot x^2 \cdot |x| \geq 2x^2 \cdot |b| > 2|x| = g(x)$, то есть уравнение решений не имеет.
Если $|x| < |b|$, то $f(x) = x^4 + b^2 \geq b^2 > 2|b| = g(x)$, то есть уравнение решений не имеет.

Рассмотрим случай $0 < |b| < 2$.
В этом случае верны неравенства $f(0) < g(0)$ и $f(2) > g(2)$, так как $b^2 < 2|b|$ и $16 + b^2 > 4$. Значит, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет решения отличные от нуля, а значит решений больше одного.

Таким образом, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение или не имеет решений при $b \leq -2$ и $b \geq 2$, то есть при $a \leq 1$ и $a \geq 5$.
Ответ: $a \leq 1, a \geq 5$.

19)

а) Пусть число a_i уменьшили на 2. Тогда его уменьшили на $\frac{2}{a_i}\cdot 100=\frac{200}{a_i}\%$. Следовательно, $r_i=\frac{200}{a_i}$. Так как $a_i\geq 50$ для всех i, то $r_i\leq 4$ и их среднее арифметическое также не превосходит 4. Поэтому оно не может равняться 5.

б) Рассмотрим два числа: 50 и 150. Если число 50 уменьшить на 2 (т. е. на 4%), а число 150 уменьшить на 2% (то есть на 3), то $r_1=4$ и $r_2=2$. Их среднее арифметическое равно 3, что больше 2. При этом сумма чисел уменьшилась на 5, что больше, чем $2n=4$.

в) Пусть k чисел из 30 уменьшили на 2, а остальные $30-k$ уменьшили на 2%. Так как каждое число не меньше 50, каждое из чисел уменьшили по крайней мере на 1 (2% от 50 равно 1). Таким образом, сумму всех 30-и чисел уменьшили по крайней мере на $2k+30-k=k+30$. По условию, сумму уменьшили ровно на 40. Следовательно, $k+30\leq 40$, откуда $k\leq 10$.

Напомним, что если число a_i уменьшили на 2, то его уменьшили на $r_i=\frac{200}{a_i}\%$; и так как $a_i\geq 50$, то $r_i\leq 4$. Значит,

$$\frac{r_1+\cdots+r_{30}}{30}\leq\frac{4k+2(30-k)}{30}=\frac{2k+60}{30}\leq\frac{2\cdot 10+60}{30}=\frac{8}{3}.$$

Приведём пример набора из 30 чисел, для которого среднее арифметическое чисел $r_1,\ldots,r_{30}$ равно $\frac{8}{3}$. Пусть все числа равны 50, и пусть 10 из этих чисел уменьшили на 2 (т. е. на 4%), а каждое из оставшихся 20-ти чисел уменьшили на 2%. Тогда

$$\frac{r_1+\cdots+r_{30}}{30}=\frac{10\cdot 4+20\cdot 2}{30}=\frac{8}{3}.$$

Ответ: а) нет; б) да; в) $\frac{8}{3}$.