







































Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

| Номер задания | Правильный ответ | Текстовое решение | Видео решение |
|---------------|---|---|---|
| 1 | 26950 |  |  |
| 2 | 74000 |  |  |
| 3 | 40 |  |  |
| 4 | 0,0042 |  |  |
| 5 | 20 |  |  |
| 6 | 122 |  |  |
| 7 | 3 |  |  |
| 8 | 5 |  |  |
| 9 | -0,5 |  |  |
| 10 | 6000 |  |  |
| 11 | 20 |  |  |
| 12 | -35 |  |  |
| 13 | а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}$ |  |  |
| 14 | $\sqrt{6}$ |  |  |
| 15 | $(-\infty; -1] \cup \left[2; \log_{1,5} \frac{35}{12}\right)$ |  |  |
| 16 | 2,88 |  |  |
| 17 | 3 |  |  |
| 18 | $-\frac{8}{9}$ |  |  |
| 19 | а) да б) нет в) 35 |  |  |

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

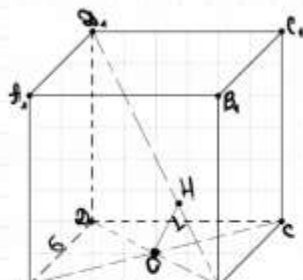
Источники:
 ФИПИ
 СтатГрад 2018

а) $\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x) = 0$ и $2 \cos x + \sqrt{3} \neq 0$
 $\log_2(\sin x) \cdot (\log_2(\sin x) + 1) = 0$
 $\log_2(\sin x) = 0$ $\log_2(\sin x) = -1$
 $\sin x = 1$ $\sin x = \frac{1}{2}$
 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Содержание критерия Баллы
 Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах 2
 Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ б 1
 Получены верные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеются верные последовательности всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б 0
 Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше 0
 Максимальный балл 2

14 В кубе $ABCD_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 6.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC и BD_1 равен 90° .
- б) Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1 .



а) BD - проекция BD_1 на $ABCD$
 $BD \perp AC$ (по св-ву квадр)
 $\Rightarrow BD_1 \perp AC$ (по ПТТ)

ОТВЕТ: $\sqrt{6}$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обосновано получен верный ответ в пункте б | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обосновано получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

ИСТОЧНИКИ:

Основная школа 2018
 Основная школа (Решар) 2018
 Гордая #14 2018

ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



Прямая, перпендикулярная плоскости и перпендикулярная прямой, лежащей на этой плоскости, перпендикулярна и самой плоскости (ПТТ)

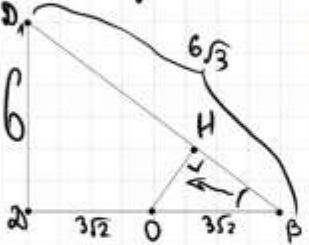
Прямая, перпендикулярная плоскости и перпендикулярная прямой, лежащей на этой плоскости, перпендикулярна и самой плоскости (Теорема, обратная ПТТ)

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Расстояние между скрещивающимися прямыми - это длина общего перпендикуляра, проведенного к этим прямым

б) Пусть O - точка пересечения диагоналей основания куба
 K - основание перпендикуляра $OK \perp BD_1$
 $\Rightarrow OK$ - искомое расстояние

Рассмотрим $\triangle BDD_1$



$$\sin B = \frac{OK}{OB} = \frac{DD_1}{BD_1}$$

$$\frac{OK}{3\sqrt{2}} = \frac{6}{6\sqrt{3}}$$

$$OK = \frac{6 \cdot 3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

15 Решите неравенство

ИСТОЧНИКИ:

Полоско 2820 (14 вер)
 Полоско 2820 (18 вер)
 Полоско 2820 (19 вер)

$$\log_2 2^{2x} \geq \log_2 \left(\frac{35}{3} \cdot 6^{x-1} - 2 \cdot 9^{-\frac{x}{2}} \right)$$

$$2x \geq \log_2 \left(\frac{35}{3} \cdot 6^{x-1} - 2 \cdot 9^{-\frac{x}{2}} \right)$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2^{2x} \geq \frac{35}{3} \cdot \frac{6^x}{6} - 2 \cdot \frac{9^x}{3} \\ \frac{35}{3} \cdot \frac{6^x}{6} - 2 \cdot \frac{9^x}{3} > 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \frac{35 \cdot 6^x}{18} - \frac{2}{3} \cdot 9^x > 0 \quad | \cdot 6^x$$

$$35 - 12 \left(\frac{9}{2} \right)^x > 0$$

$$35 - 12t > 0$$

$$35 > 12t$$

$$t < \frac{35}{12}$$

ОТВЕТ: $(-\infty; -1] \cup [2; \log_{\frac{35}{12}} 2)$

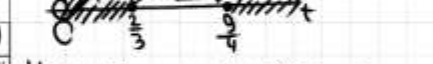
| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обосновано получен верный ответ | 2 |
| Обосновано получен ответ, отличающийся от верного исключением выделением граничных точек | 1 |
| ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 2 |

При этом в первом случае выставляются 1 балл, если выделены только граничные значения неравенства \geq и $<$ вместо \leq или наоборот. Если в ответе выделены значения неравенств, при которых одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».

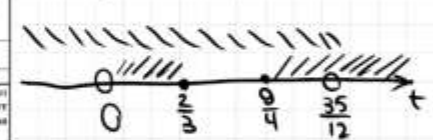
ОСНОВНОЕ ПОСЛАНИЕ НЕРАВЕНСТВА

$$\frac{35}{12} > \log_{\frac{35}{12}} 2$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 4^x - \frac{35}{18} \cdot 6^x + \frac{2}{3} \cdot 9^x \geq 0 \\ 18 \cdot 4^x - 35 \cdot 6^x + 12 \cdot 9^x \geq 0 \\ 18 - 35 \cdot \frac{6^x}{4^x} + 12 \cdot \frac{9^x}{4^x} \geq 0 \\ 12 \cdot \left(\frac{9}{4} \right)^x - 35 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^x + 18 \geq 0 \\ \text{Пусть } \left(\frac{3}{2} \right)^x = t \quad t > 0 \\ 12t^2 - 35t + 18 \geq 0 \\ D = 1225 - 864 = 19^2 \\ t = \frac{35 \pm 19}{24} \end{cases}$$



Найдем пересечение:



$$\textcircled{3} \begin{cases} x \leq 2 \\ \frac{9}{4} \leq t < \frac{35}{12} \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} 0 < \left(\frac{9}{2} \right)^x \leq \frac{2}{3} \\ \left(\frac{9}{2} \right)^x \leq \left(\frac{9}{2} \right)^{-1} \\ x < -1 \end{cases}$$

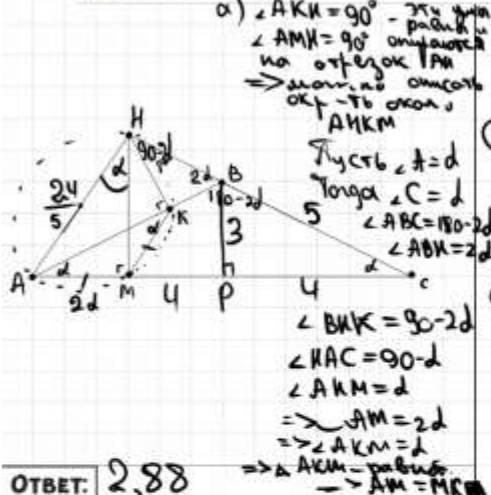
$$\textcircled{5} \frac{9}{4} \leq \left(\frac{9}{2} \right)^x < \frac{35}{12}$$

$$\left(\frac{9}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{9}{2} \right)^x < \frac{3}{2} \log_{\frac{35}{12}} \left(\frac{35}{12} \right)$$

$$2 \leq x < \log_{\frac{35}{12}} \left(\frac{35}{12} \right)$$

16 В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжении боковой стороны BC опущена высота AH . Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

- а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.
 б) Найдите MK , если $AB = 5$, $AC = 8$.



ОТВЕТ: 2,88

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обосновано получен верный ответ в пункте б. | 3 |
| Обосновано получен верный ответ в пункте б. ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. | 1 |
| Обосновано получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен. | 0 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

Источники:

ГПР
 ЕГЭ
ПРИЗНАК ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА
 Если для четырех углов сформировано на одной стороне, то такое четырехугольника можно считать вписанным.



17 Задача с развернутым ответом

1500 руб. планируется вложить в банк на сумму 10000 рублей на $(n+1)$ мес. Условия его возврата таковы:
 — 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ (в конце года)
 — с 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплачивать часть долга.
 — 15-го числа каждого месяца долг должен быть на 40% больше суммы займа до 14-го числа предыдущего месяца.
 — 15-го числа n -го месяца долг составляет 200 тысяч рублей.
 — к 15-му числу $(n+1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.
 Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

Вариант 1197 *

| Дата | Сумма долга | Дата | Сумма долга |
|-------|--------------|-------|-----------------------|
| 15.06 | 10000 руб. | 19.06 | 15700 |
| 1.07 | 4000 руб. | 1.07 | 10000 - 19400 |
| 15.07 | 10000 - 1400 | 15.07 | 10000 - 1400 = 8600 |
| 1.08 | 10000 - 2400 | 1.08 | 10000 - 19400 = -9400 |
| 15.08 | 10000 - 3400 | 15.08 | 10000 - 19400 = -9400 |
| 1.09 | 10000 - 3400 | 1.09 | 10000 - 19400 = -9400 |
| 15.09 | 10000 - 3400 | 15.09 | 10000 - 19400 = -9400 |

О.С.В. = 1378

$10000 - 10000 + 4000 + 10000 - 19400 - 2000 = 1378$

ОТВЕТ: 3

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обосновано получен верный ответ | 3 |
| Верно построена математическая модель, решение связано с исследованием этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за арифметической ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано | 2 |
| Верно построена математическая модель, решение связано с исследованием этой модели, при этом решение может быть не завершено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

Несколько подробит: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сложное условие задачи верно связано с решением математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Иными к решению, а не в отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, заданной функции и т.п. Грубо говоря, предлагаемый текст должен включать написание, «приближенное» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условия выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершённое, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне выделен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее точно и объективно и достаточно ясно для того, чтобы попытка отсылать ему адекватную замку. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно описан в различных математических моделях и доведен до верного ответа. По этой причине в критерии проверки не указано упоминание о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и такой, приближенный к высшей математике, и данный подход, инновационный арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфическую для математической экономики понятие (линейная функция, симплекс-метод и т.п.).

18 Найдите все значения параметра a , для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + 4y = 1, \\ x^2 + 20xy + 100y^2 - 8ax - 80ay + 97a^2 + 144a + 64 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$(x + 10y)^2 - 80 \cdot (x + 10y) + 97a^2 + 144a + 64 = 0$$

Пусть $(x + 10y) = t$

$$t^2 - 80a \cdot t + 97a^2 + 144a + 64 = 0$$

$$D = 0$$

$$64a^2 - 388a^2 - 576a - 256 = 0$$

$$-324a^2 - 576a - 256 = 0 \quad | : (-4)$$

$$81a^2 + 144a + 64 = 0$$

$$(9a + 8)^2 = 0$$

$$9a + 8 = 0$$

$$a = -\frac{8}{9}$$

Источники:

Васильев 2013

| | |
|--|----------------|
| ОТВЕТ: | $-\frac{8}{9}$ |
| Содержание критерия | Баллы |
| Обосновано получены правильные ответы | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отвечающих условиям задачи | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a | 2 |
| Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 4 |

19

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

- Может ли на доске быть 5 чисел?
- Может ли на доске быть 6 чисел?
- Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

а) $\underline{6} \quad \underline{7} \quad \underline{8} \quad \underline{9} \quad \underline{10} \quad \checkmark$
 б) $\underline{\quad} \quad \underline{\geq 7} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\leq 9} \quad \underline{\quad}$
 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$

$$a_2 \geq 7$$

$$a_5 \leq 9$$

Для $a_3 = a_4$ нет двух подходящих чисел есть только 8
 \Rightarrow не может

в) $\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$
 $a_1 = 6$

Рассмотрим все комбинации
 $\begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 11 \\ 6 & 7 & 8 & 12 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 8 & 9 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{matrix}$
 $\underline{\underline{35}}$

~~6 7 8 9~~
 $\begin{matrix} 6 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 9 & 11 \\ 6 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 9 & 11 \end{matrix}$

ОТВЕТ:
 а) $\underline{6} \quad \underline{7} \quad \underline{8} \quad \underline{9} \quad \underline{10}$
 б) нет
 в) $\underline{35}$

| | |
|--|-------|
| Содержание критерия | Баллы |
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – всякая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обоснованной точностью примерный ответ | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 4 |

Источники:

Григорьев 2017
 Дворкина 2017