ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Оценивание заданий:
№ 1 - № 12 – 1 балл
№ 13 – 2 балла
№ 14 – 2 балла
№ 15 – 2 балла
№ 16 – 3 балла
№ 17 – 3 балла
№ 18 – 4 балла
№ 19 - 4 балла

Максимальное количество баллов за работу – 32

Перевод баллов в отметки:
«2» - 0-5 баллов
«3» - 6-11 баллов
«4» - 12-17 баллов
«5» - 18-32 баллов

№ задания	Вариант 1	Вариант 2
1	93500	7
2	9	3
3	6	6
4	0,92	0,4
5	1	0,5
6	40	100
7	- 4	6
8	9	3
9	0,9	333
10	15	6
11	47088	44
12	-2	3

Ответы и решения к заданиям № 13 - № 19

Вариант 1.
№ 13

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

$$2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos^2 x(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1) = 0$$

$$(2\cos x - 1)(\cos^2 x + 1) = 0$$

а) $2\cos x - 1 = 0$ *или* $\cos^2 x + 1 = 0$

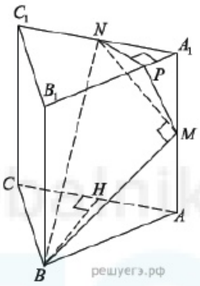
$$2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

б) Укажем корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$. Получим точку $\frac{7\pi}{3}$.

№ 14

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2



а) Пусть точка H — середина AC.

Тогда $BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63$

Вместе с тем, $BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63 = BN^2$, а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M.

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1, кроме нее $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — , проекция MN на плоскость ABB_1.

Прямая BM перпендикулярна MN, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Поэтому $\sin \angle NMP = \frac{NP}{NM} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$

Следовательно, $\angle NMP = \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$

№ 15

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

$$\frac{6}{x\sqrt{3}-3} + \frac{x\sqrt{3}-6}{x\sqrt{3}-9} \geq 2$$

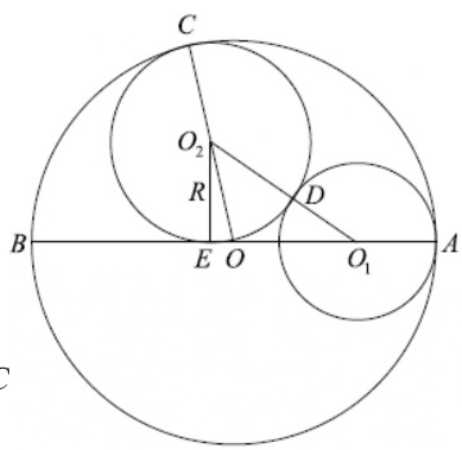
Сделаем замену переменных $x\sqrt{3} = t$.

$$\frac{6}{t-3}+\frac{t-6}{t-9}\geq 2,$$
$$\frac{6(t-9)+(t-3)(t-6)-2(t-3)(t-6)}{(t-3)(t-9)}\geq 0,$$
$$\frac{-t^2+24t-90}{(t-3)(t-9)}\geq 0,$$
$$\frac{t^2-24t+90}{(t-3)(t-9)}\leq 0,$$
$$\frac{(t-15)(t-6)}{(t-3)(t-9)}\leq 0,$$
$$\left[\begin{array}{l}3<t\leq 6,\\ 9<t\leq 15\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}<x\leq 2\sqrt{3},\\ 3\sqrt{3}<x\leq 5\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б.	3
Получен обоснованный ответ в пункте б. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а. ИЛИ При обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

а) Пусть AB — диаметр большей из трёх окружностей, O — её центр, O_1 — центр окружности радиуса r, кающийся окружности с диаметром AB в точке A, O_2 — центр окружности радиуса R, касающийся окружности с диаметром AB в точке C, окружности с центром O_1 — в точке D, отрезка AB — в точке E. Точки O, O_2 и C лежат на одной прямой, поэтому $OO_2 = OC - O_2C = OC - R$.



Аналогично $OO_1=OA - O_1A=OA - r$, $O_1O_2 = O_1D + O_2D = r + R$.
Следовательно, периметр треугольника OO_1O_2 равен
$$OO_1+OO_2+O_1O_2=OA-r+OC-R+r+R=OA+OC$$

б) Пусть $OA = 6$, $r = 2$. Тогда

$O_2E = R,$

$O_1O_2 = 2 + R,$

$OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4,$

$OO_2 = OC - O_2C = 6 - R.$

Из прямоугольных треугольников O_1O_2E и OO_2E находим, что

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(2+R)^2 - R^2} = \sqrt{4+4R},$$

$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6-R)^2 - R^2} = \sqrt{36-12R}.$$

Возможны два случая: $O_1E = OO_1 + OE$ (O лежит между E и O_1) и $O_1E = OO_1 - OE$ (E лежит между O и O_1). Это дает нам два уравнения $\sqrt{4+4R} = 4 + \sqrt{36-12R}$ и $\sqrt{4+4R} = 4 - \sqrt{36-12R}$, которые имеют общее решение $R = 3$, это означает, что диаметр искомой окружности равен радиусу наибольшей из трёх окружностей, что точка E совпадает с O.

Ответ: 3.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$9, \frac{9(n-1)}{n}, \ldots, \frac{9\cdot 2}{n}, \frac{9}{n}, 0$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 10%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$\frac{99}{10}, \frac{99(n-1)}{10n}, \ldots, \frac{99\cdot 2}{10n}, \frac{99}{10n}$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$0{,}9 + \frac{9}{n}, \frac{0{,}9(n-1)+9}{n}, \ldots, \frac{0{,}9n+9}{n}, \frac{0{,}9+9}{n}$$

Получаем: $0{,}9 + \frac{9}{n} = 1{,}5$, откуда $n = 15$. Значит, всего следует выплатить

$$9 + 0{,}9(1 + \frac{14}{15} + \ldots + \frac{2}{15} + \frac{1}{15}) = 9 + 0{,}9\cdot\frac{16}{2} = 16{,}2 \text{ (млн. рублей).}$$

Ответ: 16,2.

18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Задача верно сведена к исследованию линейного уравнения с параметром относительно новой переменной ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Если x_o является корнем исходного уравнения, то и - x_o является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если x_o= - x_o то есть $x_o = 0$. Подставим значение $x = 0$ в исходное уравнение:

$$(a+3)^2 = 2|a+3|$$

$$|a+3|(|a+3|-2) = 0$$

$$|a+3| = 0,$$

$$a = -3, или$$

$$|a+3| = 2$$

$$a = -5 или$$

$$a = -1$$

При $a = -3$ исходное уравнение принимает вид: $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа – *2,0* и *2,* то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a = -5$ и при $a = -1$ уравнение принимает вид: $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$

При $x < 2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$ которое не имеет корней.

При $-2 \le x \le 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $a = -5$ и при $a = -1$ исходное уравнение имеет единственный корень.

19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно выполнены все 3 пункта: а), б) и в)	4
Выполнены все три пункта, однако в одном из пунктов ответ недостаточно обоснован или неверен вследствие арифметической ошибки	3
Верно выполнены пункты а) и б), либо верно выполнен пункт в)	2
Верно выполнен один из 2-х пунктов: а) или б)	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

а) Да, можно. Это верно, например, для чисел 2007 и 9, их сумма равна 2016, а сумма цифр в каждом числе равна 9.

б) Да, можно. Это верно, например, для чисел 139 и 58, их сумма равна 197, а сумма цифр в каждом числе равна 13. Другие примеры: 139+58 или 148 + 49.

в) Наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы четырёх различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр, равно сумме четырёх наименьших чисел с этой суммой цифр.

Для сумм 1, 2, 3 и 4 имеем соответственно:

$$1+10+100+1000=1111$$

$$2+11+20+101=134$$

$$3+12+21+30=66$$

$$4+13+22+31=70$$

Если сумма цифр равна 5 или больше, обозначим её через a. Тогда наименьшее из таких чисел − как минимум a. Числа с одинаковой суммой цифр дают одинаковые остатки при делении на 9, поэтому идут минимум через 9. Значит, их сумма не меньше чем

$$a+(a+9)+(a+18)+(a+27)=4a+54\geq 74$$

Получаем, что искомое число равно 66.

Ответ: а) да; б) да; в) 66.

Вариант 2.

№ 13

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

а) Преобразуем уравнение и разложим левую часть на множители:

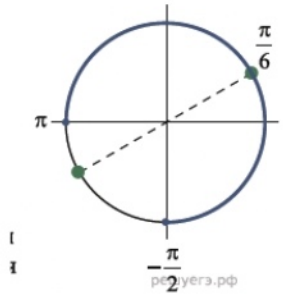
$$2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\sin^2 x+4\cos x-4\sqrt{3}\sin x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos x(\sin x+2)-\sqrt{3}\sin x(\sin x+2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+2)\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)=0.$$

Уравнение $\sin x + 2 = 0,$ не имеет корней. Уравнение $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0.$ является однородным тригонометрическим уравнением первой степени. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3}\cos x.$ Получаем:

$$\operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

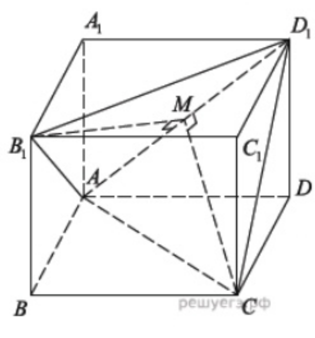


б) Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right].$ принадлежит только корень $\frac{\pi}{6}$

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{\pi}{6}.$

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2



Пусть точка M — середина отрезка AD_1. Примем длины ребер куба за a. Из прямоугольного треугольника ABB_1 по теореме Пифагора найдём AB_1:

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = a\sqrt{2}.$$

Аналогично, $B_1D_1 = CD_1 = AD_1 = AC = B_1C = a\sqrt{2}.$ Опустим перпендикуляры B_1H и CK на сторону AD_1. Треугольники AB_1D_1 и ACD_1 равносторонние, поэтому перпендикуляры B_1H и CK также являются биссектрисами и медианами, поэтому точки H, K и M совпадают. Угол B_1MC — искомый. Из прямоугольного треугольника AB_1M:

$$B_1M=\sqrt{AB_1^2-AM^2}=\sqrt{AB_1^2-\left(\frac{AD_1}{2}\right)^2}=\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

По теореме косинусов из треугольника B_1MC:

$$\cos\angle B_1MC=\frac{B_1M^2+MC^2-B_1C^2}{2B_1M\cdot MC}=\frac{\frac{3a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}-2a^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, угол между плоскостями равен $\arccos\frac{1}{3}.$

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Пусть $z=0,5x\sqrt{5}$, тогда:

$$\frac{2}{z-1}+\frac{z-2}{z-3}\geq 2\Leftrightarrow\frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<z\leq 2,\\3<z\leq 5.\end{array}\right.$$

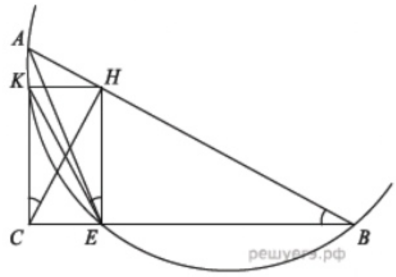
Возвращаясь к исходной переменной, получаем

$\frac{2}{\sqrt{5}}<x\leq\frac{4}{\sqrt{5}}$ или $\frac{6}{\sqrt{5}}<x\leq 2\sqrt{5}.$

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б.	3
Получен обоснованный ответ в пункте б. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а. ИЛИ При обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической	1

ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен.	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0



а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K — на катете AC. Проведём отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, равного треугольнику CHE, подобного треугольнику BCA.

Рассмотрим углы четырёхугольника $ABEK$. Если $\angle ABE = \alpha$, то

$$\angle BEK = \angle BEH + \angle HEK = 90^\circ + \alpha \text{, а } \angle KAB = 90^\circ - \alpha.$$

Значит,

$$\angle BEK + \angle KAB = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ.$$

Сумма двух противоположных углов в четырёхугольнике 180°, следовательно, четырёхугольник вписан в окружность.

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, равен $\dfrac{AB}{2\sin\angle BEA} = \dfrac{AB}{2\sin\angle AEC}$.

Из подобия треугольников CEH и ABC находим

$$\frac{CE}{CH} = \frac{AC}{AB}, \text{ откуда } CE = \frac{CH \cdot AC}{AB}.$$

Тогда

$$AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = AC \cdot \sqrt{\frac{CH^2 + AB^2}{AB^2}} = \frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2 + AB^2}.$$

Поэтому

$$\sin\angle AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}}.$$

Следовательно, искомый радиус равен

$$AB : \frac{2AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{CH^2 + AB^2} = \frac{25}{2}.$$

№ 17

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

В январе 2017 года долг будет составлять 1,3S млн рублей, а в июле 2017 года — 0,6S млн рублей. Значит, выплата в 2017 году составит 0,7S млн рублей.

В январе 2018 года долг будет составлять $1,3\cdot 0,6S = 0,78S$ млн рублей, а в июле 2018 года — 0,25S млн рублей. Значит, выплата в 2018 году составит 0,53S млн рублей.

В январе 2019 года долг перед банком составит $1,3\cdot 0,25S = 0,325S$ млн рублей, а в июле — 0 рублей. Значит, выплата в 2019 году составит 0,325 S млн рублей.

Решим систему:

$$\begin{cases} 0,7S < 5, \\ 0,53S < 5, \\ 0,325S < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S < 7,14..., \\ S < 9,43..., \\ S < 15,38... \end{cases}$$

Наибольшее целое решение этой системы — S = 7 млн рублей.

№ 18

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Задача верно сведена к исследованию линейного уравнения с параметром относительно новой переменной ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	

Запишем уравнение в виде

$$x^2 + (a-6)^2 = |x+a-6| + |x-a+6|.$$

Если x_o является корнем исходного уравнения, то и $-x_o$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечётное число корней, только если $x_o = -x_o$, то есть $x = 0$. Подставим значение $x = 0$ в уравнение:

$$(a-6)^2 = 2|a-6| \Leftrightarrow |a-6| \cdot (|a-6|-2) = 0,$$

откуда либо $|a-6| = 0 \Leftrightarrow a = 6$, либо $|a-6| = 2 \Leftrightarrow a = 4$ или $a = 8$.

При $a = 6$ уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2, 0 и 2, то есть уравнение имеет ровно три корня.

При $a = 4$ и при $a = 8$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \le x \le 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

Таким образом, при $a = 4$ и при $a = 8$ исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно выполнены все 3 пункта: а), б) и в)	4
Выполнены все три пункта, однако в одном из пунктов ответ недостаточно обоснован или неверен вследствие арифметической ошибки	3
Верно выполнены пункты а) и б), либо верно выполнен пункт в)	2
Верно выполнен один из 2-х пунктов: а) или б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

а) Да, может. Числа 2, 3, 4, 5 составляют арифметическую прогрессию, их сумма равна 14.

б) Пусть a — первый член, d — разность, n — число членов прогрессии, тогда их сумма равна $\frac{2a+d(n-1)}{2}n.$ Чтобы количество членов было наибольшим, первый член и разность должны быть наименьшими. Пусть они равны 1, тогда по условию $\frac{n(n+1)}{2} < 900.$ Наибольшее натуральное решение этого неравенства $n = 41$. Такой результат получается при прогрессии $1+2+\ldots+41 = 861.$

в) Для суммы членов арифметической прогрессии имеем:

$$\frac{2a+d(n-1)}{2}n = 123 \Leftrightarrow (2a+d(n-1))n = 2 \cdot 3 \cdot 41.$$

Таким образом, число членов прогрессии n является делителем числа 246. Если то левая часть больше 246:

$(2a+d(n-1))n \geq 42 \cdot 41 > 246,$

следовательно, $n < 41.$

Поскольку $n \geq 3,$ получаем, что $n = 3$ или $n = 6.$ Прогрессии из трёх и шести членов с суммой 123 существуют: например, 40, 41, 42 и 3, 10, 17, 24, 31, 38.

Ответ: а) да; б) 41; в) 3; 6.