

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

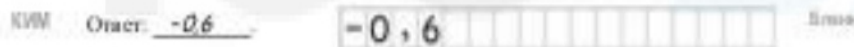
Вариант 105

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.



При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin(a + \beta) = \sin a \cdot \cos \beta + \cos a \cdot \sin \beta$$

$$\cos(a + \beta) = \cos a \cdot \cos \beta - \sin a \cdot \sin \beta$$

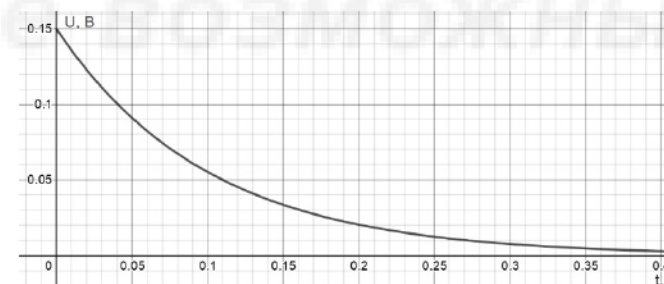
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 По кольцевой дорожке длиной 60 м в обе стороны со скоростью 1 м/с бегают цыплята. Когда два цыпленка сталкиваются, они мгновенно разворачиваются и бегут с той же скоростью в противоположных направлениях. За минуту произошло 48 попарных столкновений. Сколько цыплят могло быть на дорожке?

Ответ: _____

- 2 На графике представлена зависимость напряжения на конденсаторе от времени. Определить характерное время разрядки конденсатора T

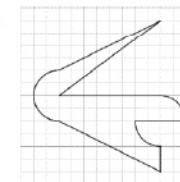


Зависимость напряжения от времени подчиняется следующему закону:

$$\frac{U}{T} + \frac{\delta U}{\delta t} = 0$$

Ответ: _____

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена следующая фигура. Найдите ее площадь



Ответ: _____

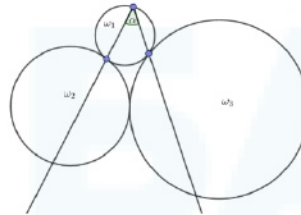
4 Из урны, в которой 30 шаров, из них 12 черных, а остальные – белые, наудачу вынимают 5 шаров. Найти дисперсию случайной величины X «Число черных шаров среди вынутых»

Ответ: _____

5 Найдите $f(2)$ если: $f(x^{-1}) + \frac{x}{f(x)} = x - 0.5$.

Ответ: _____

6 Радиусы окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ равны 1, 2, 3 соответственно. Окружности расположены так, как на рисунке. Найдите градусную величину угла α .

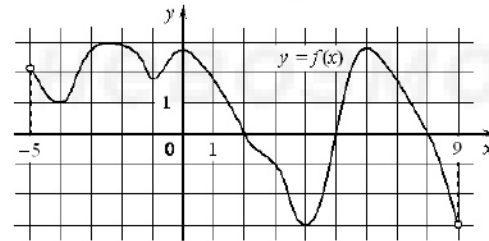


Ответ: _____

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; K)$, где K - количество точек, в которых вторая производная функции $f(x)$ равна 0. Найдите количество отрезков $[a, b]$, таких что a, b - целые числа и выполнено

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

Ответ: _____



8 Конус расположен внутри треугольной пирамиды $SABC$ так, что плоскость его основания совпадает с плоскостью одной из граней пирамиды, а три других грани касаются его боковой поверхности. Найти объём пирамиды с точностью до 5 значащих цифр, если длина образующей конуса равна 1, $\angle ABS = \pi/2$, $\angle BSC = \pi/12$, $\angle SCB = \pi/4$

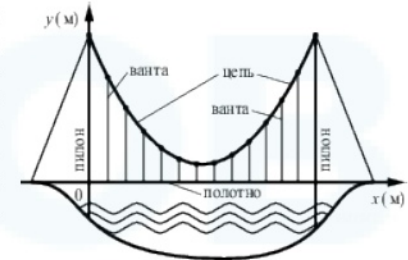
Ответ: _____

Часть 2

9 Найдите значение выражения: $\cos\left(\frac{2\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{13}\right)$ с точностью до трех знаков после запятой

Ответ: _____

10 На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.



В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0.005x^2 - 0.75x + 30$ где x и y измеряются в метрах. Найдите длину цепи, если мост простирается на 150 метров. Ответ дайте в метрах, округлив до целого.

Ответ: _____

11 Пункты A и B , находящиеся на кольцевой аллее, соединены прямолинейным отрезком шоссе длиной 4 км, являющимся диаметром кольцевой аллеи. Из пункта A из дома по аллее вышел на прогулку пешеход. Через 1 час он обнаружил, что забыл ключи и попросил соседа-велосипедиста поскорее привезти их. Через какое минимальное время он может получить ключи, если скорость велосипедиста на шоссе равна 15 км/ч, на аллее 20 км/ч, а скорость пешехода – 6 км/ч? Пешеход может идти навстречу велосипедисту. Ответ округлить до 5 значащих цифр.

Ответ: _____

12 Найдите среднее значение функции $y = xe^{x-2} + 3$ на отрезке $[1; 2]$

Ответ: _____

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ №1.

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

13 Решите уравнение:

$$(4x^3 + 3x) \left(4\sqrt{1+x^2}^3 - 3\sqrt{1+x^2} \right) = 2$$

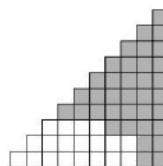
14 Про тетраэдр PQRS известно, что $PQ = 4$, $SR = 6$, $\angle QRS = \angle PSR = 50^\circ$, $\angle QSR = \angle PRS = 40^\circ$. Вокруг тетраэдра описана сфера. Рассмотрим на этой сфере множество всех точек, сумма сферических расстояний от которых до точек P, Q, R, S не меньше π . Чему равна площадь этого множества? Сферическое расстояние между двумя точками на сфере - длина наименьшей дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки.

15 Найти максимальное значение выражения при положительных x, y, z

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (zx)^4}}$$

16 В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H, а медианы в точке O. Биссектриса угла A проходит через середину отрезка OH. Найти площадь треугольника ABC, если $BC = 2$, а разность углов B и C равна 30°

17 В треугольном доме в первом подъезде 1 этаж, во втором подъезде - 2 этажа, в третьем - 3, ..., в десятом - 10. Всего в доме 55 квартир - на каждом этаже в каждом подъезде находится ровно одна квартира. Известно, что если в квартире кто-нибудь живёт, то в квартире на этаж выше в том же подъезде тоже кто-нибудь живёт, и квартира на том же этаже, но в следующем по номеру подъезде тоже заселена. Сколько существует таких способов заселить квартиры? Пример заселения изображен на рисунке, заселённые квартиры отмечены серым. При подсчёте способов заселения каждая квартира считается либо заселённой, либо нет; кто именно в ней живёт, неважно. Случай, когда все квартиры остались пустыми, включается в подсчёт.



18 При каких значениях параметра a для любого параметра b наименьшее значение функции $f(x, y)$

$$f(x, y) = \sqrt{(x-y)^2 + (y^2 - a - x - \sin(b) + 3)^2}$$

Не меньше наибольшего значения параметра c при котором существует d такое что уравнение

$$\sin\left(\frac{1-c}{x}\right) = xd$$

Имеет менее 2020 корней?

19 Для любых неотрицательных a и b :

- а) Докажите, для любых натуральных n и k $a^k b^k (a^n + b^n) \leq a^{2k+n} + b^{2k+n}$
- б) Докажите, что если k, l, m, n - натуральные числа такие, что $k+l = n+m$, $k > l$, $n > m$, $k < n$, то тогда справедливо $a^k b^l + a^l b^k \leq a^n b^m + a^m b^n$
- в) Найдите все натуральные n и k , что: $a^k b^k (a^2 + b^2)^n \leq 2^{-(2k+n)} (a+b)^n$