## Вариант 3.
## Ответы

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 20 | 0,9991 | 24 | 12 | 17 | 7 | 0,25 | 100 | 62 | 22 |

| | |
|---|---|
| **13** | а) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} \mid k \in Z\right\}$; б) $-\pi$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{\pi}{4}$. |
| **14** | $2\sqrt{30}$ . |
| **15** | $(-\infty; -6) \cup (-6; 5-5\sqrt{2}] \cup \{5\} \cup [5+5\sqrt{2}; +\infty)$. |
| **16** | б) $4\sqrt{7}$ . |
| **17** | 53 500 руб. |
| **18** | $a \in [4-\sqrt{10};\ 4+\sqrt{10}]$. |
| **19** | а) нет; б) нет; в) 10. |

## Решения заданий 13-19

**Задание 13.** а) Решите уравнение $\operatorname{tg} x+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ | 2 |
| Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки и/или ошибки в отборе корней, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше | 0 |
| *Максимальный балл* | **2** |

**Решение.**
а) Преобразуем уравнение:

$$\operatorname{tg} x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x\left(\frac{1}{\cos x}-2\cos x\right)=0.$$

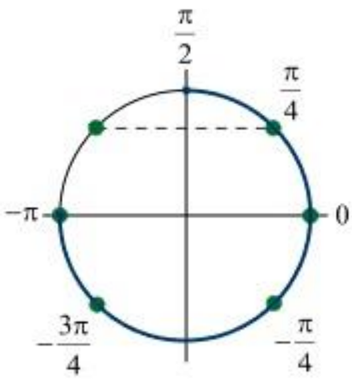
Если $\sin x=0$, то $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Второй случай:

$$\frac{1-2\cos^2 x}{\cos x}=0 \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Заметим, что обе найденные серии удовлетворяют условию $\cos x \neq 0,$ и поэтому входят в ответ.

б) Отметим решения на единичной окружности.



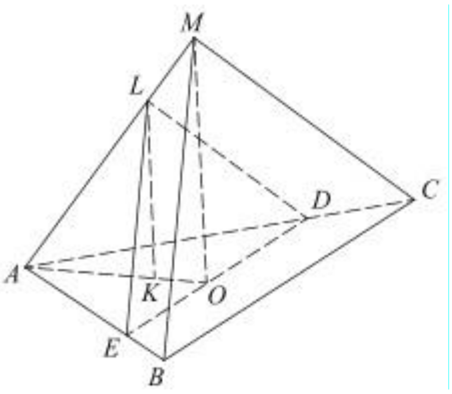

Отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни: $-\pi$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{\pi}{4}$.

О т в е т : а) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in Z\right\}$; б) $-\pi$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{\pi}{4}$.

**Задание 14.** В правильной треугольной пирамиде *MABC* с основанием *ABC* стороны основания равны 6, а боковые рёбра 8. На ребре *AC* находится точка *D*, на ребре *AB* находится точка *E*, а на ребре *AM* - точка *L*. Известно, что *CD* = *BE* = *LM* = 2. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки *E*, *D* и *L*.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ. | 2 |
| Верно найдены линейные и/или угловые величины, определяющие треугольник, площадь которого нужно найти, но получен неверный ответ или решение не закончено.<br>ИЛИ<br>При правильном ответе решение недостаточно обосновано. | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **2** |

**Решение.**




Пусть $O$— центр основания пирамиды. В треугольнике $ABC$имеем:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} = \frac{2}{1}.$$

Значит, $DE = \frac{2}{3}BC = 4,$ отрезок $DE$ делит медиану, проведённую из вершины $A,$ в отношении $2:1,$ то есть содержит точку $O.$ Кроме того, $O$ - середина $DE.$

Рассмотрим прямоугольный треугольник $AMO.$ В нём $AO = 2\sqrt{3}.$ Опустим из точки $L$ перпендикуляр $LK$ на сторону $AO.$ Тогда

$$AK = \frac{3}{4}AO = \frac{3\sqrt{3}}{2}, KO = \frac{1}{4}AO = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$LK = \sqrt{LA^2 - AK^2} = \frac{3\sqrt{13}}{2},\ LO = \sqrt{LK^2 + KO^2} = \sqrt{30}.$$

Равнобедренный треугольник $DLE$ - искомое сечение, а $LO$ - его высота. Площадь искомого сечения равна $\frac{1}{2}LO \cdot DE = 2\sqrt{30}.$

Ответ: $2\sqrt{30}$.

**Задание 15.** Решите неравенство:

$$\left((x+1)^{-1} - (x+6)^{-1}\right)^2 \le \frac{|x^2 - 10x|}{(x^2 + 7x + 6)^2}.$$

| **Содержание критерия** | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех | 1 |

| | |
|---|---|
| шагов решения. | |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **2** |

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2 \le \frac{|x^2-10x|}{(x^2+7x+6)^2} \Leftrightarrow \frac{|x^2-10x|-25}{(x^2+7x+6)^2} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -6, \\ x \ne -1, \\ |x^2-10x| \ge 25. \end{cases}$$

Решим неравенство

$$|x^2-10x| \ge 25:$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-10x-25 \ge 0, \\ x^2-10x+25 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 5+5\sqrt{2}, \\ x \le 5-5\sqrt{2}, \\ x = 5. \end{array}\right.$$

Исключая из полученного набора точки $-6$ и $-1$, получаем множество решений исходного неравенства:

$$(-\infty;\,-6)\cup(-6;\,5-5\sqrt{2}]\cup\{5\}\cup[5+5\sqrt{2};\,+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;\,-6)\cup(-6;\,5-5\sqrt{2}]\cup\{5\}\cup[5+5\sqrt{2};\,+\infty)$.

**Задание 16.** Прямая, проходящая через середину *M* гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC*, перпендикулярна *CM* и пересекает катет *AC* в точке *K*. При этом *AK* : *KC* = 1 : 2.

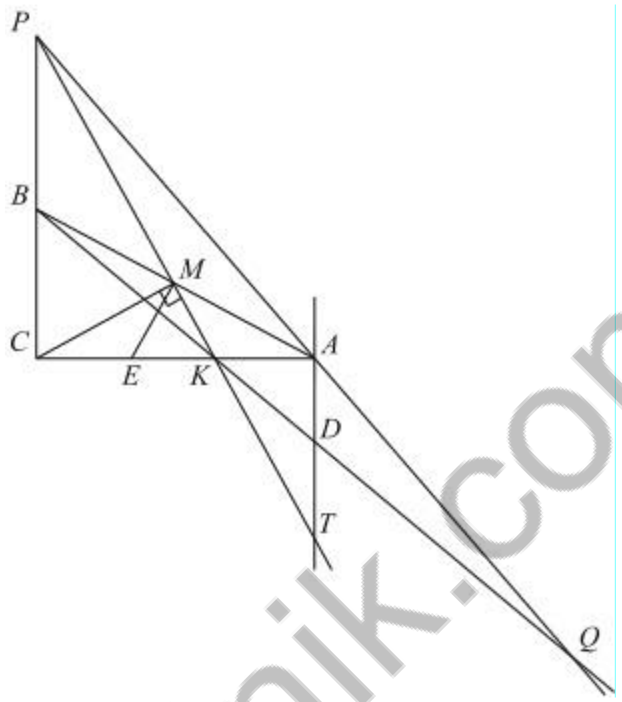
а) Докажите, что $\angle BAC = 30°$

б) Пусть прямые *MK* и *BC* пресекаются в точке *P*, а прямые *AP* и *BK* - в точке *Q*. Найдите *KQ*, если $BC = 2\sqrt{3}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б) | 3 |
| Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) | 1 |

| | |
|---|---|
| не выполнен | |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **3** |

**Решение.**




а) Пусть $E$ - середина $KC$. $MC = MA$, $KC = AE$, $\angle MCK = \angle MAE$, значит $\Delta MKC = \Delta MEA$.

Тогда $ME$ - медиана прямоугольного треугольника $CMK$, проведенная из вершины прямого угла. Тогда:

$$ME = \frac{1}{2}CK = AK = \frac{1}{2}AE.$$

Следовательно, $\angle A = 30^\circ$.

б) Из прямоугольных треугольников $ABC$ и $KBC$ находим, что

$$AC = BC \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6,$$

$$BK = \sqrt{BC^2 + \left(\frac{2}{3}AC\right)^2} = \sqrt{12+16} = 2\sqrt{7}.$$

Через вершину $A$ проведем прямую, параллельную $BC$. Пусть $T$ - точка пересечения этой прямой с прямой $MK$, а $D$ - точка пересечения прямой $BK$ с прямой $AT$.

Из равенства треугольников *AMT* и *BMP* получаем, что $AT = BP$, а из подобия треугольников *CKP* и *AKT* следует, что $CP = 2AT = 2BP$. Значит, *B* - середина *CP*.

Треугольник *AKD* подобен треугольнику *CKB* с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому:

$$AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BP,$$

а так как $AD||BP$, *AD* - средняя линия треугольника *BQP*. Значит:

$$BQ = 2DB = 2 \cdot \frac{3}{2}BK = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{7} = 6\sqrt{7}.$$

Следовательно:

$$KQ = BQ - BK = 6\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}.$$

Ответ: б) $4\sqrt{7}$.

**Задание 17.** Консервный завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары - стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.

| **Вид тары** | **Себестоимость, 1 ц.** | **Отпускная цена, 1 ц.** |
|---|---|---|
| стеклянная | 1500 руб. | 2100 руб. |
| жестяная | 1100 руб. | 1750 руб. |

Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано | 2 |

| | |
|---|---|
| Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **3** |

**Решение.**

Пусть $x$ - доля мощностей завода, занятых под производство компотов в стеклянной таре, а $y$ - доля мощностей, занятых под производство компотов в жестяной банке. Тогда $x+y=1$, при этом компотов в стеклянной таре производится $90x$ центнеров, а в жестяной таре - $80y$ центнеров. Прибыль завода с 1 центнера продукции в стеклянной таре равна $2100-1500=600$ руб., прибыль с 1 центнера в жестяной таре равна $1750-1100=650$ руб., а общая прибыль с произведённой за день продукции равна

$$600\cdot 90x+650\cdot 80y=54\,000x+52\,000y=2000(27x+26y).$$

Кроме того, из условия ассортиментности следует, что $90x\geq 20$ и $80y\geq 20,$ то есть $x\geq\frac{2}{9}$ и $y\geq\frac{1}{4}.$

Таким образом, нам необходимо найти наибольшее значение выражения $2000\cdot(27x+26y)$ при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x\geq\frac{2}{9}, \\ y\geq\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x, \\ \frac{2}{9}\leq x\leq\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Подставляя $y=1-x$ в выражение $27x+26y,$ получаем: $27x+26(1-x)=26+x.$ очевидно, что это выражение принимает наибольшее значение при $x=\frac{3}{4}$ и, следовательно, $y=\frac{1}{4}.$ Поэтому максимально возможная прибыль завода за день равна

$$2000\cdot\left(27\cdot\frac{3}{4}+26\cdot\frac{1}{4}\right)=2000\cdot\frac{107}{4}=53\ 500$$

Ответ: 53 500 руб.

**Задание 18.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$a^2+9|x-3|+3\sqrt{x^2-6x+13}=4a+2|x-2a-3|$$

имеет хотя бы один корень.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|

| | |
|---|---|
| Обоснованно получен правильный ответ. | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого конечным числом точек | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *a* | 2 |
| Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *a* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **4** |

**Решение.**

Произведём замену $t = x - 3$, получим:

$$a^2 + 9|t| + 3\sqrt{t^2+4} = 4a + 2|t-2a| \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3\sqrt{t^2+4} = 2|t-2a| - 9|t|.$$

Пусть теперь

$$f(t) = a^2 - 4a + 3\sqrt{t^2+4},$$

$$g(t) = 2|t-2a| - 9|t|.$$

При $t \geq 0$ функция $g(t)$ убывает, принимая все значения от $g(0)$ до $-\infty$. При $t < 0$ функция $g(t)$ - возрастает, принимая все значения от $-\infty$ до $g(0)$. Значит, $\max g(t) = g(0) = 4|a|$

Функция $f(t)$ принимает минимальное значение при

$$f(t) = f(0) = a^2 - 4a + 6,$$

причём на промежутке $(0; +\infty)$ - функция возрастает, принимая все значения от $f(0)$ до $+\infty$, а на промежутке $(-\infty; 0)$ - убывает (функция чётная), принимая все значения от $+\infty$ до $f(0)$.

Поскольку наибольшее значение функции $g(t)$ и наименьшее значение функции $f(t)$ достигается при одном и том же значении $t = 0$, уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда $\max g(t) \geq \min f(t)$, то есть

$$a^2 - 4a + 6 \leq 4|a|$$

1) При $a \geq 0$ получаем

$$a^2 - 4a + 6 \leq 4a \Leftrightarrow a^2 - 8a + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{10} \leq a \leq 4 + \sqrt{10}$$

2) При $a < 0$ получаем

$$a^2 - 4a + 6 \le -4a \Leftrightarrow a^2 + 6 < 0 \Leftrightarrow \varnothing.$$

Ответ: $a \in [4-\sqrt{10};\ 4+\sqrt{10}]$.

**Задание 19.** Из первых 22 натуральных чисел 1, 2, ..., 22 выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число $k$ быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа $k$.

| | |
|---|---|
| Обоснованно получены правильные ответы во всех пунктах | 4 |
| Обоснованно получены верные ответы в пункте *b)* и в одном из пунктов *а)* или *в)* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б)* | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в одном из пунктов *а)* или *в)* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. | 0 |
| ***Максимальный балл*** | **4** |

**Решение.**

а) Если в каждой паре одно число втрое больше другого. то сумма чисел в каждой паре делится на 4. Значит, сумма всех выбранных чисел делится на 4. Число 170 не делится на 4, поэтому такого быть не может.

б) Если $k = 11$, то выбраны все 22 числа от 1 до 22. Их сумма равна 253. С другой стороны, по условию суммы чисел в каждой паре различны и не превосходят 27. Значит, их сумма не превосходит

$$27 + 26 + \ldots + 17 = 242.$$

Полученное противоречие показывает, что число $k$ не может быть равным 11.

в) В предыдущем пункте было показано, что $k$ не может равняться 11. Десять пар (13; 14), (11; 15), (9; 16), (7; 17), (5; 18), (3; 19), (1; 20), (2; 8), (4; 10), (6; 12) удовлетворяют всем условиям задачи. Значит, наибольшее возможное значение числа $k$ - это 10.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 10.

**Перевод набранных первичных баллов в стобалльную и в пятибалльную системы**

| Первичный | Тестовый |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 5 |
| 2 | 9 |
| 3 | 14 |
| 4 | 18 |
| 5 | 23 |
| 6 | 27 |
| 7 | 33 |
| 8 | 39 |
| 9 | 45 |
| 10 | 50 |
| 11 | 55 |
| 12 | 59 |
| 13 | 64 |
| 14 | 68 |
| 15 | 70 |
| 16 | 72 |
| 17 | 74 |
| 18 | 76 |
| 19 | 78 |
| 20 | 80 |
| 21 | 82 |
| 22 | 84 |
| 23 | 86 |
| 24 | 88 |
| 25 | 90 |
| 26 | 92 |
| 27 | 94 |
| 28 | 96 |
| 29 | 97 |
| 30 | 98 |
| 31 | 99 |
| 32 | 100 |

| Тестовый | Оценка |
|---|---|
| 0-26 | 2 |
| 27-49 | 3 |
| 50-67 | 4 |
| 68-100 | 5 |