Вариант 2.
Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	7	200	0,3	-5	9	-7	90	1	50	120	0,5

13	$\left\{\frac{\pi}{4}, -\operatorname{arctg} 2\right\}$.
14	$\operatorname{arctg}\sqrt{13}$.
15	$\{-3\} \cup (-2;-1) \cup [1;+\infty)$.
16	б) 113.
17	12,5.
18	$\left(-\infty;-\sqrt{5}-2\right)\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right)$
19	$k=1,\ n=2,\ m=3;\ k=n=3,\ m=4;\ k=2,\ n=1,\ m=3.$

Решения заданий 13-19

Задание 13. Решите уравнение $\frac{\sin 2x - 2\sin^2 x - 4\cos 2x}{\sqrt{2-x^2}} = 0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки и/или ошибки в отборе корней, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**2**

Решение.

Найдем ОДЗ: $2-x^2>0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}.$

Найдем корни числителя:

$$\sin 2x - 2(\sin x)^2 - 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 2\sin^2 x - 4(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = -arctg 2 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ получаем:

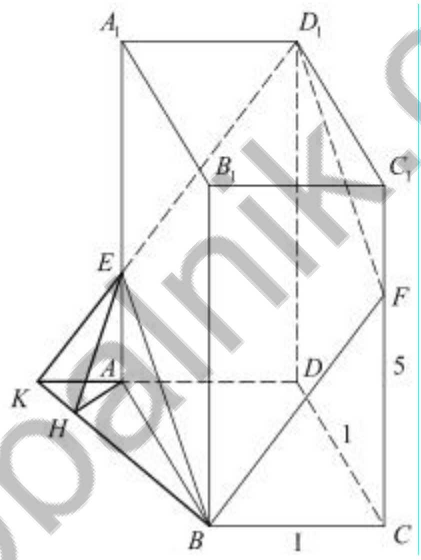
$$x = \frac{\pi}{4}, x = -\operatorname{arctg} 2.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}, -\operatorname{arctg} 2\right\}$.

Задание 14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1 = 2:3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**2**

Решение.



Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB.

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB. Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1.

Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 3$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{5} = 2,\ EA_1 = AA_1 - AE = 3.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = \frac{2}{3}.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A, $AB=1$,

$$AK=\frac{2}{3},\ BK=\sqrt{AB^2+AK^2}=\frac{\sqrt{13}}{3},$$

откуда высота

$$AH=\frac{AK\cdot AB}{BK}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 3}{\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg}\angle AHE=\frac{AE}{AH}=\sqrt{13}\Leftrightarrow \angle AHE=\operatorname{arctg}\sqrt{13}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{13}$.

Задание 15. Решите неравенство $\frac{2\sqrt{x+3}}{x+1}\le\frac{3\sqrt{x+3}}{x+2}$.

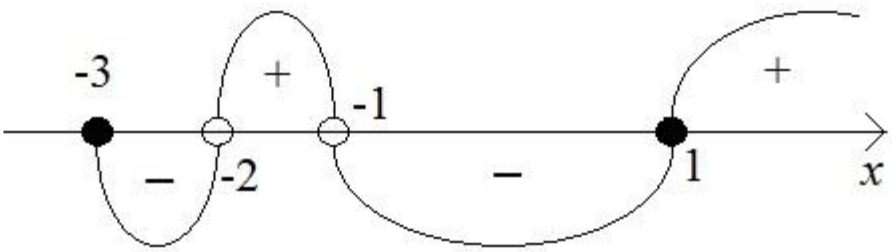
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	**2**

Решение.
Последовательно получаем:

$$\frac{2\sqrt{x+3}}{x+1}\le\frac{3\sqrt{x+3}}{x+2}\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{x+3}}{x+2}-\frac{2\sqrt{x+3}}{x+1}\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{x+3}\cdot\left(\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x+1}\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+3}\cdot\frac{3x+3-2x-4}{(x+1)(x+2)}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x+3}\cdot(x-1)}{(x+1)(x+2)}\ge 0.$$

И решим это неравенство методом интервалов.



Ответ: $\{-3\}\cup(-2;-1)\cup[1;+\infty)$.

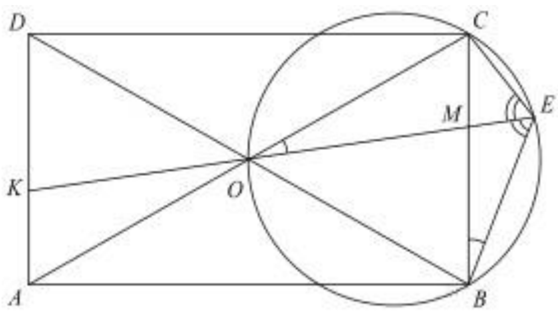
Задание 16. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30°. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC$ = 120°.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что BE = 40 и CE = 24.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**3**

Решение.



а) По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle BOC = \angle BAO + \angle ABO = 2 \cdot 30° = 60°.$$

Поэтому

$$\angle BEC + \angle BOC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Значит, точки *B, E, C, O* лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы *CBE* и *COE* опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle CBE = \angle COE$.

б) По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{40^2 + 24^2 - 2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 8\sqrt{25+9+15} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Вписанные углы *BEO* и *CEO* опираются на равные хорды *BO* и *CO*, значит, *EO* — биссектриса угла *BEC*. Пусть *M* - точка её пересечения со стороной *BC*. По формуле для биссектрисы треугольника получаем:

$$EM = \frac{2BE \cdot CE \cdot \cos \frac{\angle BEC}{2}}{BE + CE} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \cos 60^\circ}{40 + 24} = 15$$

По свойству биссектрисы треугольника:

$$\frac{CM}{BM} = \frac{CE}{BE} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}, \; CM = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{8} \cdot 56 = 21, BM = 35.$$

По теореме о произведении пересекающихся хорд $EM \cdot MO = BM \cdot CM$, откуда находим:

$$MO = \frac{BM \cdot CM}{EM} = \frac{35 \cdot 21}{15} = 49.$$

Треугольники *COM* и *AOK* равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому *OK* = *OM*. Следовательно, *EK* = *EM* + 2*OM* = 15 + 98 = 113.

Ответ: б) 113.

Задание 17. 31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая - 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на *a*%), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Найдите *a*.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2

Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**3**

Решение.

Пусть Олег взял S рублей, $1 + 0{,}01a = b$, тогда за 4 года он выплатит:

- 1-й год: $Sb - 328\,050$;

- 2-й год: $(Sb - 328\,050)b - 328\,050 = Sb^2 - 328\,050(b+1)$;

- 3-й год: $(Sb^2 - 328\,050(b+1))b - 328\,050 = Sb^3 - 328\,050((b+1)b+1)$;

- 4-й год:

$$(Sb^3 - 328\,050((b+1)b+1))b - 328\,050 = Sb^4 - 328\,050((b+1)b^2+b+1).$$

Тогда:

$$Sb^4 - 328\,050(b+1)(b^2+1) = 0.$$

За 2 года получим:

- 1-й год: $Sb - 587\,250$;

- 2-й год $Sb^2 - 587\,250(b+1)$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} Sb^4 = 328\,050(b+1)(b^2+1), \\ Sb^2 = 587\,250(b+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 587250b^2 = 328\,050(b^2+1), \\ \dfrac{Sb^2}{b+1} = 587,250 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 259\,200b^2 = 328\,050, \\ \dfrac{Sb^2}{b+1} = 587\,250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{81}{64}, \\ \dfrac{Sb^2}{b+1} = 587\,250 \end{cases} \underset{b>0}{\Leftrightarrow} b = \frac{9}{8}.$$

Значит, $1 + 0{,}01a = \frac{9}{8}$, $a = 12{,}5$.

О т в е т : 12,5.

Задание 18. Найдите все значения параметра *a*, при которых функция

$$f(x) = \sin 2x - 8(a+1)\sin x + \left(4a^2 + 8a - 14\right)x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *a*	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *a*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	**4**

Решение.

Возьмем производную этой функции (она должна быть всюду положительна).

$$2\cos 2x - 8(a+1)\cos x + (4a^2 + 8a - 14) > 0$$

Обозначим $\cos x = t, -1 \le t \le 1$.

Тогда при всех *t* из отрезка $[-1;1]$ должно выполняться неравенство

$$4t^2 - 2 - 8(a+1)t + (4a^2 + 8a - 14) > 0.$$

Преобразуем его:

$$t^2 - 2(a+1)t + (a^2 + 2a - 4) > 0, \quad (t - a - 1)^2 - 5 > 0,$$

$$|t - a - 1| > \sqrt{5}.$$

Используя геометрический смысл модуля разности двух чисел, получим решение последнего неравенства:

Тогда неравенство будет выполняться при всех t из отрезка $[-1;1]$, если:

$$1 < a+1-\sqrt{5} \text{ или } b-1 > a+1+\sqrt{5}.$$

Тогда:

$$a > \sqrt{5} \text{ или } a < -2-\sqrt{5}.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{5}-2\right)\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right)$.

Задание 19. Найдите все тройки натуральных чисел *k, m* и *n*, удовлетворяющие уравнению $2\cdot k! = m! - 2\cdot n!$ ($n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$, где n - натуральное число).

Содержание критерия	**Баллы**
Обосновано получен верный ответ.	4
Ответ правилен, и конечность перебора обоснована. Однако, при переборе допущены арифметические ошибки или пробелы.	3
Ответ правилен и получен конечным перебором. Однако, конечность перебора не обоснована.	2
Приведён хотя бы один из правильных наборов, и проверено, что при подстановке в уравнение получается верное числовое неравенство.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	**4**

Решение.

1. Так как $m! = 2\cdot k! + 2\cdot n!,$ то $n < m$ и $k < m.$

2. Пусть $n \geq k,$ тогда $4\cdot n! \geq 2\cdot k! + 2\cdot n! = m! \geq (n+1)\cdot n!,$ откуда

$$4 \geq n+1 \text{ и } k \leq n \leq 3.$$

3. Пусть $n < k,$ тогда $4\cdot k! \geq 2\cdot k! + 2\cdot n! = m! \geq (k+1)\cdot k!,$ откуда $4 \geq k+1$ и $n \leq k \leq 3.$

4. Далее конечным перебором значений $1 \leq n \leq 3,\ 1 \leq k \leq 3$ находим все решения:

n	***k***	$m! = 2\cdot k! + 2\cdot n!$	***m***
3	3	24	4

3	2	16	нет решений
3	1	14	нет решений
2	3	16	нет решений
2	2	8	нет решений
2	1	6	3
1	3	14	нет решений
1	2	6	3
1	1	4	нет решений

Ответ: $k=1,\ n=2,\ m=3;\ k=n=3,\ m=4;\ k=2,\ n=1,\ m=3.$

Перевод набранных первичных баллов в стобалльную и в пятибалльную системы

Первичный	Тестовый
0	0
1	5
2	9
3	14
4	18
5	23
6	27
7	33
8	39
9	45
10	50
11	55
12	59
13	64
14	68
15	70
16	72
17	74
18	76
19	78
20	80
21	82
22	84
23	86
24	88
25	90
26	92
27	94
28	96
29	97
30	98
31	99
32	100

Тестовый	Оценка
0-26	2
27-49	3
50-67	4
68-100	5