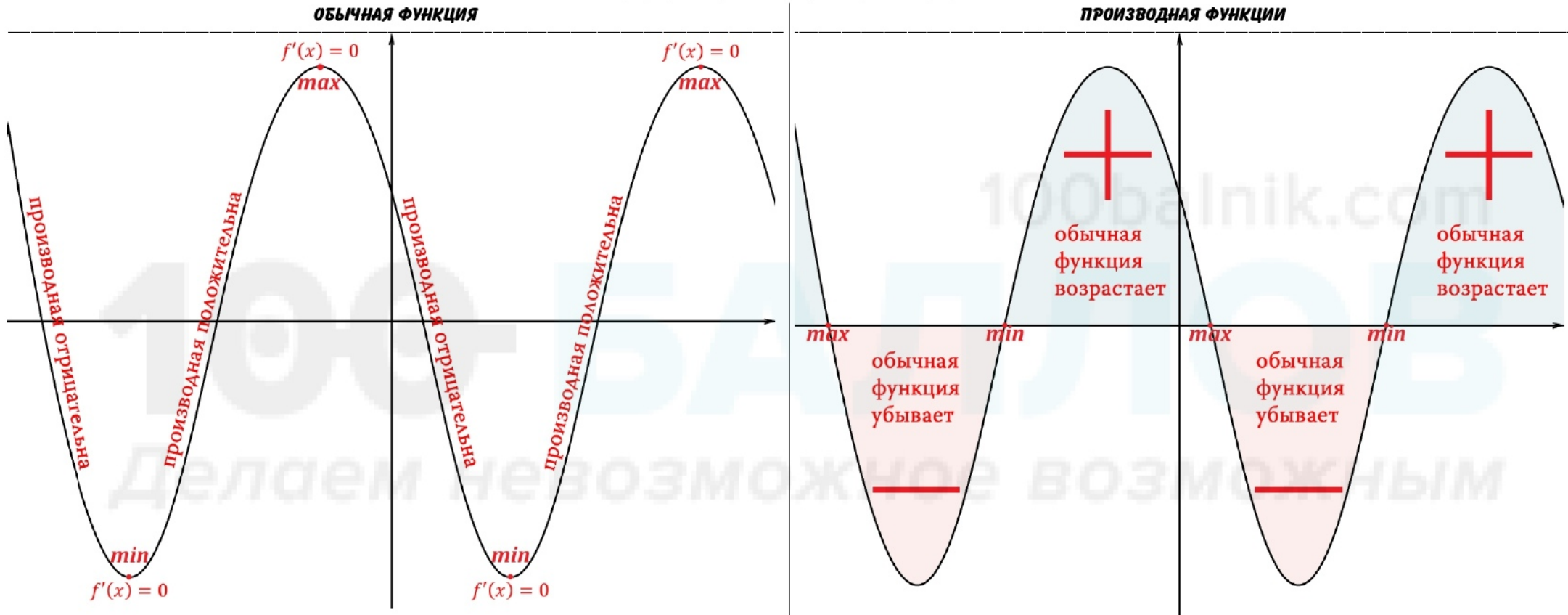


# ЗАДАНИЯ 7 | ЕГЭ

## АНАЛИЗ ГРАФИКОВ



## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке, а также тангенсу угла наклона касательной к оси  $X$ .

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

### ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Скорость – это производная пути по времени, а ускорение – это производная скорости по времени.

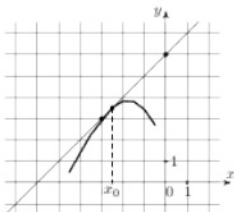
$$S'(t) = V(t)$$

$$V'(t) = a(t)$$

# ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ТАНГЕНСА

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ТАНГЕНСА ОСТРОГО УГЛА

На рисунке изображены график функции  $f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



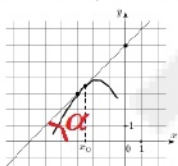
**Решение:**

1

Необходимо найти  $f'(x_0)$ . По геометрическому смыслу производной  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ . Найдём  $\operatorname{tg} \alpha$ .

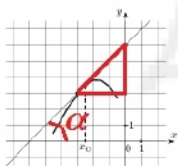
2

$\alpha$  – это угол между касательной и осью  $x$  (справа сверху!):



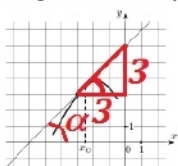
3

На касательной находятся три точки, одна из которых нам не нужна (которая проецируется на  $x_0$ ). Из других точек достраиваем треугольник:



4

Ищем в этом треугольнике угол, равный углу  $\alpha$  (это соответственные углы) и берём тангенс этого угла как отношение противолежащего катета к прилежащему:



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{3} = 1$$

Ответ: 1

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ТАНГЕНСА ТУПОГО УГЛА

На рисунке изображены график функции  $f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



**Решение:**

1

Необходимо найти  $f'(x_0)$ . По геометрическому смыслу производной  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ . Найдём  $\operatorname{tg} \alpha$ .

2

$\alpha$  – это угол между касательной и осью  $x$  (справа сверху!):



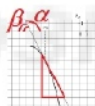
3

На касательной находятся три точки, одна из которых нам не нужна (которая проецируется на  $x_0$ ). Из других точек достраиваем треугольник:



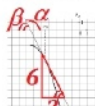
4

Найти  $\alpha$  в этом треугольнике не получится, потому что  $\alpha$  – тупой, а в прямоугольных треугольниках не бывает тупых углов. Поэтому надо отметить угол  $\beta$  как смежный с углом  $\alpha$ .



5

Ищем в этом треугольнике угол, равный углу  $\beta$  (это соответственные углы) и берём тангенс этого угла как отношение противолежащего катета к прилежащему:



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{6}{3} = 2$$

6

Но изначально мы искали тангенс  $\alpha$ . Его значение будет противоположно тангенсу смежного угла  $\beta$ , поэтому:

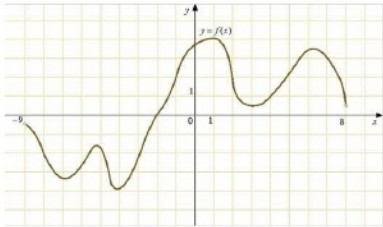
$$\operatorname{tg} \alpha = -2$$

Ответ:  $-2$

# ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА К

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ К ДЛЯ ОБЫЧНОЙ ФУНКЦИИ

На рисунке изображён график  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-9; 8)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 10$ .



**Решение:**

1

Находим коэффициент  $k$  у прямой:

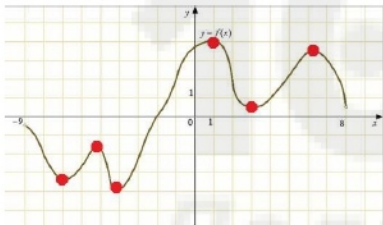
$$y = 10 \Rightarrow k = 0$$

2

По геометрическому смыслу производной  $k = f'(x_0)$ , следовательно  $f'(x_0) = 0$ .

3

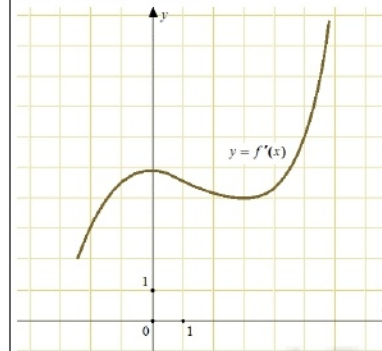
Для обычной функции  $y = f(x)$  решением уравнения  $f'(x_0) = 0$  являются точки экстремума, считаем их количество:



Ответ: 6

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ К ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 6x$  или совпадает с ней.



**Решение:**

100balnik.com

1

Находим коэффициент  $k$  у прямой:

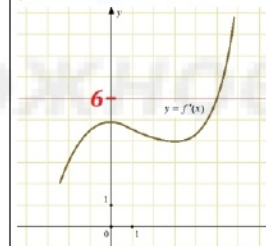
$$y = 6x \Rightarrow k = 6$$

2

По геометрическому смыслу производной  $k = f'(x_0)$ , следовательно  $f'(x_0) = 6$ .

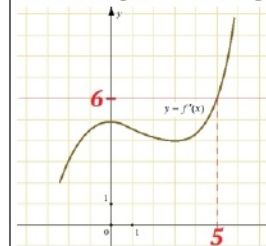
3

Изображённый на рисунке график – это и есть  $f'(x)$ , значит можно решить графически уравнение  $f'(x_0) = 6$ :



4

Точка пересечения графика и прямой – это решение уравнения:

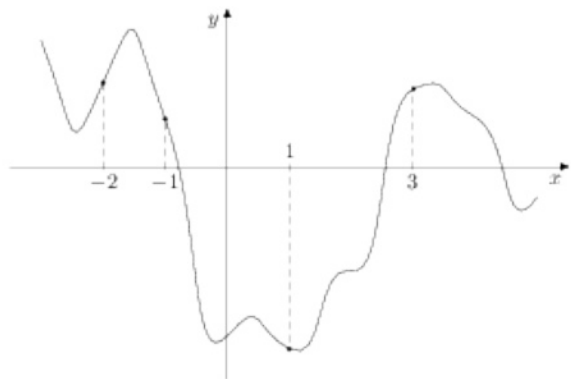


Ответ: 5

# ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

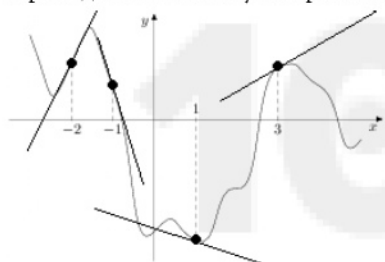
## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ

На рисунке изображён график  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены точки  $-2, -1, 1, 3$ . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

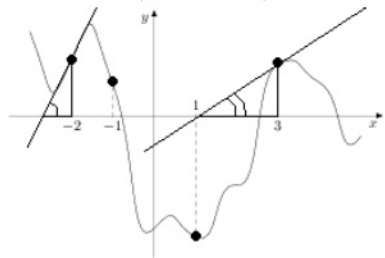


**Решение:**

Проведём касательную через каждую точку касания:



Касательные в точках  $-1$  и  $1$  образуют с осью  $X$  тупой угол, поэтому и тангенс в этих точках будет тангенсом тупого угла, а значит будет отрицательным. Такие значения не могут иметь наибольшее значение среди всех четырёх значений производных, поэтому выбирать будем между точками  $-2$  и  $3$ :

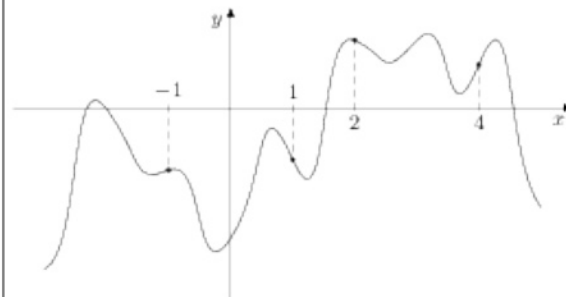


Чем больше градусов острый угол – тем больше значение тангенса.

Ответ:  $-2$

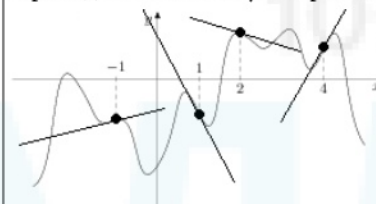
## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ

На рисунке изображён график  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены точки  $-1, 1, 2, 4$ . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

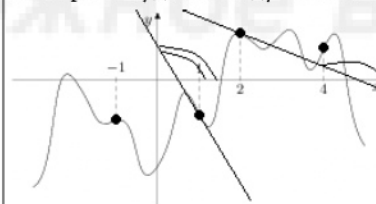


**Решение:**

Проведём касательную через каждую точку касания:



Касательные в точках  $-1$  и  $4$  образуют с осью  $X$  острый угол, поэтому и тангенс в этих точках будет тангенсом острого угла, а значит будет положительным. Такие значения не могут иметь наименьшее значение среди всех четырёх значений производных, поэтому выбирать будем между точками  $1$  и  $2$ :



Чем меньше градусов тупой угол – тем меньше значение тангенса.

Ответ:  $1$

# ЗАДАЧИ НА ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ СКОРОСТИ

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{6}t^2 + 4t - 20,$$

где  $x$  – расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени  $t = 6$  с.

**Решение:**

По физическому смыслу производной  $S'(t) = V(t)$ , следовательно чтобы найти скорость – необходимо взять производную пути:

$$V(t) = \frac{1}{3}t + 4$$

Необходимо найти скорость в момент времени  $t = 6$  с:

$$V(6) = \frac{1}{3} \cdot 6 + 4 = 6$$

Ответ: 6

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 8t - 16,$$

где  $x$  – расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 1 м/с?

**Решение:**

По физическому смыслу производной  $S'(t) = V(t)$ , следовательно чтобы найти скорость – необходимо взять производную пути:

$$V(t) = t^2 + 8t - 8$$

Необходимо найти время, если скорость  $V = 1$  с:

$$1 = t^2 + 8t - 8$$

$$t^2 + 8t - 9 = 0$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 100$$

$$t_1 = \frac{-8 + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = 1 \quad t_2 = \frac{-8 - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = -9$$

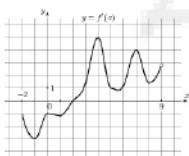
Время не может быть отрицательным, поэтому ответ:

Ответ: 1

# ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ ЭСКИЗА ОБЫЧНОЙ ФУНКЦИИ ПО ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДНОЙ

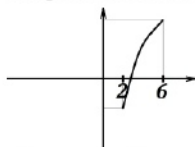
## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ

На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-2; 9)$ . В какой точке отрезка  $[2; 6]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?



**Решение:**

На отрезке  $[2; 6]$  производная функции находится выше оси  $X$ , следовательно обычная функция должна возрастать на отрезке  $[2; 6]$ . Рисуем эскиз обычной функции, возрастающей от 2 до 6.

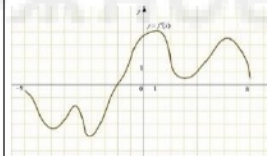


Самое наибольшее значение функция принимает в точке 6, а самое меньшее в точке 2.

Ответ: 6

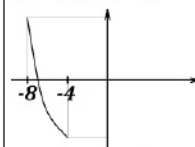
## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ

На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-9; 8)$ . В какой точке отрезка  $[-8; -4]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?



**Решение:**

На отрезке  $[-8; -4]$  производная функции находится ниже оси  $X$ , следовательно обычная функция должна убывать на отрезке  $[-8; -4]$ . Рисуем эскиз обычной функции, убывающей от  $-8$  до  $-4$ .



Самое наибольшее значение функция принимает в точке  $-8$ , а самое меньшее в точке  $-4$ .

Ответ:  $-4$

# УСЛОВИЕ КАСАНИЯ ФУНКЦИИ И ПРЯМОЙ

## ОБЩАЯ СХЕМА

$$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \end{cases}$$

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ АБСЦИССЫ ТОЧКИ КАСАНИЯ

Прямая  $y = 7x - 5$  параллельна касательной к графику функции  $y = x^2 + 6x - 8$ . Найдите абсциссу точки касания.

**Решение:**

$$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \\ 7 = 2x + 6 \\ 7x - 5 = x^2 + 6x - 8 \end{cases}$$

Достаточно решить только верхнее уравнение системы:

$$\begin{aligned} 7 &= 2x + 6 \\ 2x &= 7 - 6 \\ 2x &= 1 \\ x &= 0,5 \\ \text{Ответ: } &0,5 \end{aligned}$$

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРА

Прямая  $y = -3x - 8$  является касательной к графику функции  $ax^2 + 27x + 7$ . Найдите  $a$ .

**Решение:**

$$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \\ -3 = 2ax + 27 \\ -3x - 8 = ax^2 + 27x + 7 \end{cases}$$

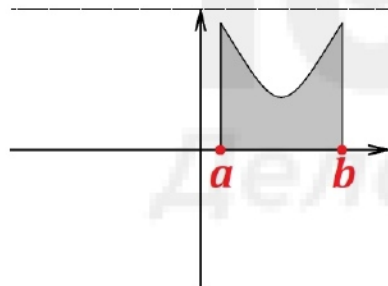
Выразим  $a$  из первого уравнения системы и подставим во второе:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2ax = -30 \\ -3x - 8 = ax^2 + 27x + 7 \end{cases} & \quad \begin{cases} ax = -15 \\ -3x - 8 = ax^2 + 27x + 7 \end{cases} & \quad \begin{cases} a = \frac{-15}{x} \\ -3x - 8 = ax^2 + 27x + 7 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{-15}{x} \\ -3x - 8 = \frac{-15}{x} \cdot x^2 + 27x + 7 \end{cases} & \quad \begin{cases} a = \frac{-15}{x} \\ -3x - 8 = -15x + 27x + 7 \end{cases} & \quad \begin{cases} a = \frac{-15}{x} \\ -8 - 7 = -15x + 27x + 3x \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{-15}{x} \\ -15 = 15x \end{cases} & \quad \begin{cases} a = \frac{-15}{x} \\ x = -1 \end{cases} & \quad \begin{cases} a = \frac{-15}{-1} = 15 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: 15

# ЗАДАЧИ НА ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

## ФОРМУЛА



$$S_{\text{фигуры под графиком}} = F(b) - F(a)$$

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ РАЗНОСТИ ПЕРВООБРАЗНЫХ

На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите  $F(6) - F(2)$ , где  $F(x)$  — одна из первообразных функции  $f(x)$ .



**Решение:**

От 2 до 6 можно заметить образовавшуюся трапецию:



$$S_{\text{фигуры под графиком}} = F(b) - F(a)$$

Значит искомая разность  $F(6) - F(2)$  — это площадь трапеции.

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{3 + 4}{2} \cdot 2 = 7$$

Ответ: 7

## ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ПЛОЩАДИ ФИГУРЫ

На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$ . Функция  $F(x) = x^3 + 30x^2 + 305x - \frac{7}{5}$  — одна из первообразных функции  $f(x)$ . Найдите площадь закрашенной фигуры.



**Решение:**

$$S_{\text{фигуры под графиком}} = F(b) - F(a)$$

Значит надо найти  $F(-9) - F(-11)$

$$F(-9) = (-9)^3 + 30 \cdot (-9)^2 + 305 \cdot (-9) - \frac{7}{5} = -729 + 30 \cdot 81 - 305 \cdot 9 - \frac{7}{5}$$

$$F(-11) = (-11)^3 + 30 \cdot (-11)^2 + 305 \cdot (-11) - \frac{7}{5} = -1331 + 30 \cdot 121 - 305 \cdot 11 - \frac{7}{5}$$

$$\begin{aligned} F(-9) - F(-11) &= -729 + 30 \cdot 81 - 305 \cdot 9 - \frac{7}{5} + 1331 - 30 \cdot 121 + 305 \cdot 11 + \frac{7}{5} \\ &= 602 - 40 \cdot 30 + 2 \cdot 305 = 602 - 1200 + 610 = 12 \end{aligned}$$

Ответ: 12