# ФОРМУЛЫ И ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

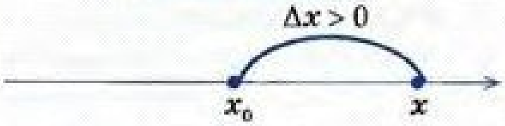
| Формулы | | Правила |
|---|---|---|
| **Элементарные функции** | **Сложные функции** | |
| $c' = 0$<br>($c$ — постоянная) | | $(c \cdot f(x))' = cf'(x)$<br>($c$ — постоянная)<br>*Постоянный множитель можно выносить за знак производной* |
| $x' = 1$ | | |
| $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$<br>($\alpha$ — постоянная) | $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ | **Производная суммы** |
| **Частные случаи** | | $(f+g)' = f' + g'$ |
| $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ | *Производная суммы дифферецируемых функций равна сумме их производных* |
| $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$ | $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$ | |
| $(e^x)' = e^x$ | $(e^u)' = e^u \cdot u'$ | **Производная произведения** |
| $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$<br>($a > 0$ — постоянная) | $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ | $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ | **Производная частного** |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ | $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ | $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $(g \neq 0)$ |
| $(\sin x)' = \cos x$ | $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ | **Производная сложной функции (функции от функции)** |
| $(\cos x)' = -\sin x$ | $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ | Если $y = f(u)$ и $u = u(x)$, |
| $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ | т. е. $y = f(u(x))$, то |
| $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ | $(f(u(x)))' = f'_u(u) \cdot u'_x(x)$ |
| $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ | |
| $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ | **Пример**<br>$(2x^4 + \sin^3 5x)' = (2x^4)' + (\sin^3 5x)' =$<br>$= 2(x^4)' + 3\sin^2 5x \cdot (\sin 5x)' =$ |
| $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ | $= 2 \cdot 4x^3 + 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x\,(5x)' =$<br>$= 8x^3 + 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x\; 5\,(x)' =$ |
| $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ | $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ | $= 8x^3 + 15\sin^2 5x \cdot \cos 5x$ |

# ПРОИЗВОДНАЯ

## Понятие приращения аргумента и приращения функции

**Приращение аргумента**

$$\boxed{\Delta x = x - x_0}$$





**Приращение функции**

$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$

Пусть $x$ и $x_0$ — два значения аргумента (независимой переменной) из области определения функции $y = f(x)$.

***Приращением аргумента*** (обозначается $\Delta x$, читается: «дельта икс») называют разность $x - x_0$.

Из равенства $\Delta x = x - x_0$ имеем $x = x_0 + \Delta x$, т. е. первоначальное значение аргумента $x_0$ получило приращение $\Delta x$. Тогда значение функции изменилось на величину $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, которая называется ***приращением функции*** $y = f(x)$ в точке $x_0$ (Можно также обозначать $\Delta f$ или $\Delta f(x_0)$.)

## Определение производной

$$y = f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

***Производной функции $y = f(x)$ в точке $x$ называют предел отношения приращения функции в точке $x$ к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю*** (можно обозначить $y'$ или $f'(x)$).

Операцию нахождения производной называют ***дифференцированием***

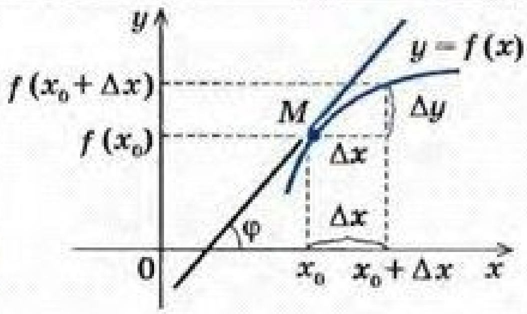
## Касательная к графику функции и геометрический смысл производной


Касательной к кривой в данной точке $M$ называют предельное положение секущей $MN$, когда точка $N$ стремится вдоль кривой к точке $M$

$$\boxed{f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi}$$

$k$ — угловой коэффициент касательной
$k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$

***$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной*** к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$




***Значение производной в точке $x_0$ равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой $x_0$*** (и равно угловому коэффициенту касательной)

## Физический смысл производной

**Производная характеризует скорость изменения функции при изменении аргумента**

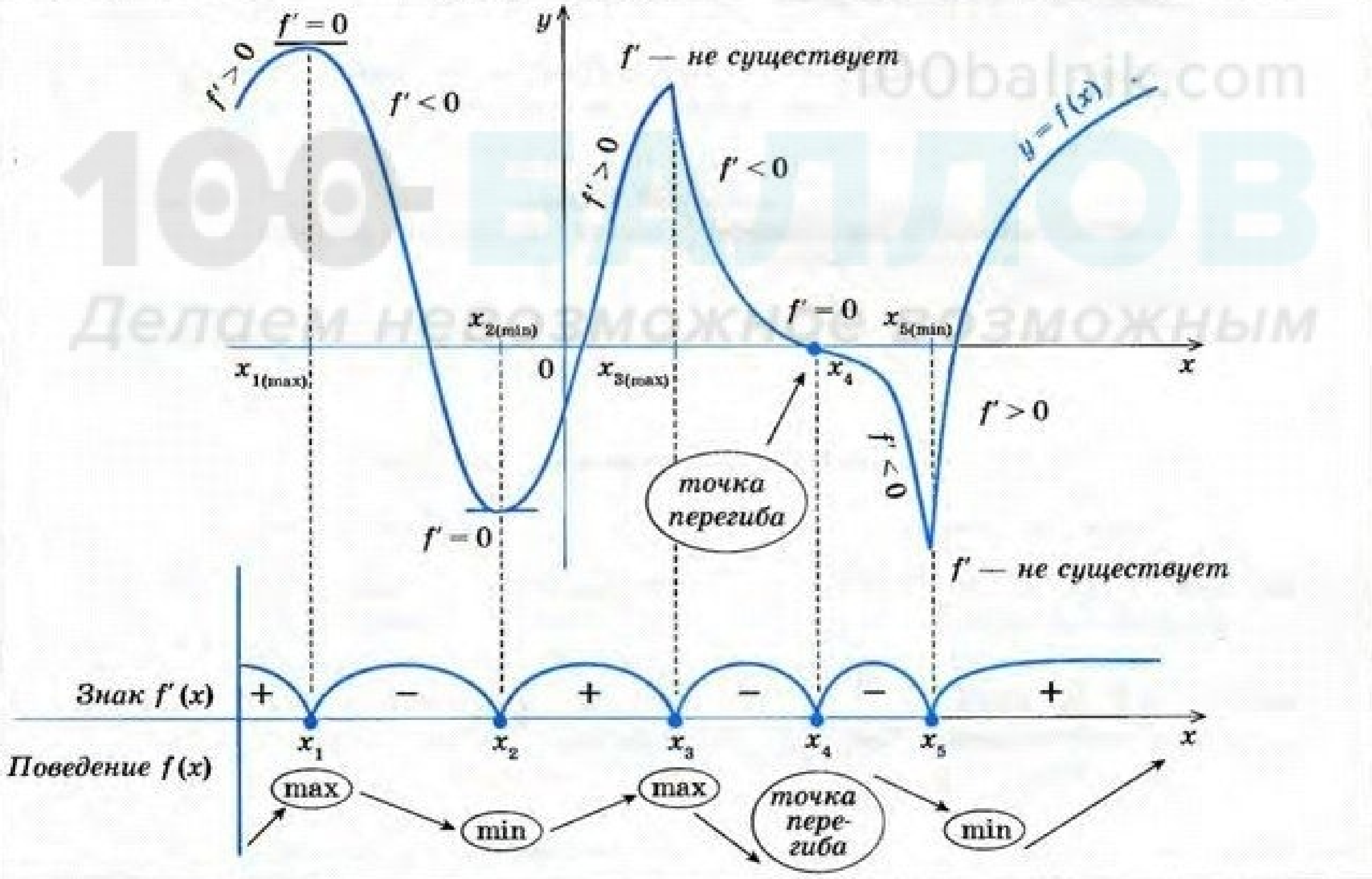
<table>
<tr><td>$S = S(t)$ — зависимость пройденного пути от времени</td><td rowspan="3">В частности, производная по времени — это мера скорости изменения, применимая к самым разнообразным физическим величинам. Например, мгновенная скорость $v$ неравномерного прямолинейного движения — производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути $S$ от времени $t$</td></tr>
<tr><td>$v = S'(t)$ — скорость прямолинейного движения</td></tr>
<tr><td>$a = v'(t)$ — ускорение прямолинейного движения</td></tr>
</table>

## Критические точки

**Определение.** Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю или не существует, называют ***критическими***

| Необходимое условие экстремума | Достаточное условие экстремума |
|---|---|
| В точках экстремума производная функции $y = f(x)$ равна нулю или не существует. | Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и производная $f'(x)$ меняет знак в точке $x_0$, то $x_0$ — точка экстремума функции $f(x)$. |
| $x_0$ — точка екстремума $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует | В точке $x_0$ знак $f'(x)$ меняется с «+» на «−» $\Rightarrow$ $x_0$ — точка максимума |
| (но не в каждой точке $x_0$, где $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, будет экстремум!) | В точке $x_0$ знак $f'(x)$ меняется с «−» на «+» $\Rightarrow$ $x_0$ — точка минимума |

### Пример графика функции $y = f(x)$, имеющей экстремумы ($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ — критические точки)






### Исследование функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

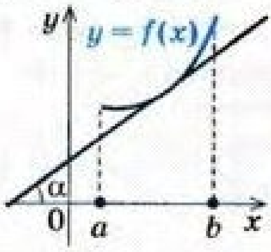
| Схема | Пример. $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ |
|---|---|
| 1. Найти область определения и интервалы, на которых функция непрерывна | Область определения: $x \in R$. Функция непрерывна в каждой точке своей области определения |
| 2. Найти производную $f'(x)$ | $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$ |
| 3. Найти критические точки, т. е. внутренние точки области определения, в которых $f'(x) = 0$ или не существует | $f'(x)$ существует на всей области определения. $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ |

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ

## Монотонность и постоянство функции

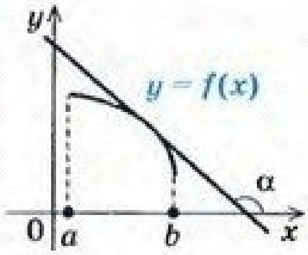
### Достаточное условие возрастания функции

Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ ***возрастает*** на этом интервале

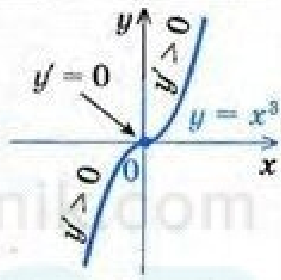



### Достаточное условие убывания функции

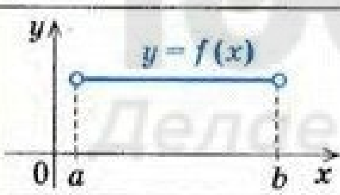
Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ производная $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ ***убывает*** на этом интервале




**Замечание.** Эти условия являются только достаточными, но не являются необходимыми условиями возрастания и убывания функции.
Например, функция $y = x^3$ — возрастающая на всей области определения, хотя в точке $x = 0$ ее производная $y = 3x^2$ равна нулю




## Необходимое и достаточное условие постоянства функции

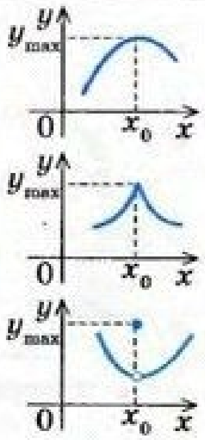



***Функция $f(x)$ постоянна на интерале $(a;\ b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ во всех точках этого интервала***

## Экстремумы (максимумы и минимумы) функции

### Точка максимума

**Определение.** Точку $x_0$ из области определения функции $f(x)$ называют **точкой максимума** этой функции, если найдется $\delta$-окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки $x_0$, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.




$\boxed{x_{max} = x_0 \text{ — точка максимума}}$

### Точка минимума

**Определение.** Точку $x_0$ из области определения функции $f(x)$ называют **точкой минимума** этой функции, если найдется $\delta$-окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки $x_0$, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

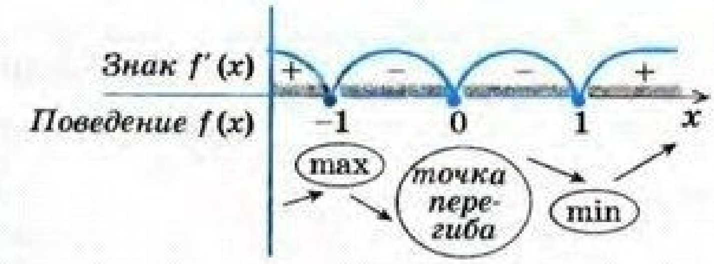

$\boxed{x_{min} = x_0 \text{ — точка минимума}}$

*Точки максимума и минимума называют* ***точками экстремума.***

*Значения функции в точках максимума и минимума называют* ***экстремумами функции*** *(максимумом и минимумом функции).*

$\boxed{y_{max} = f(x_{max}) = f(x_0) \text{ — максимум}}$

$\boxed{y_{min} = f(x_{min}) = f(x_0) \text{ — минимум}}$

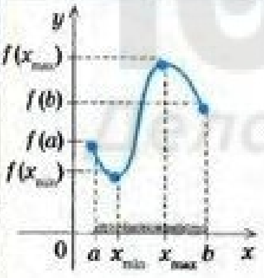
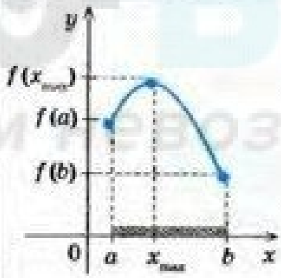
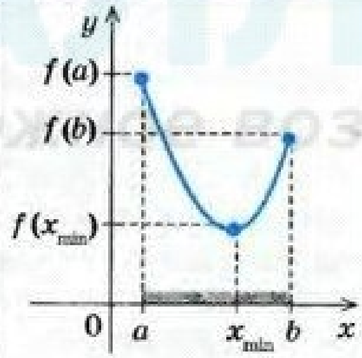
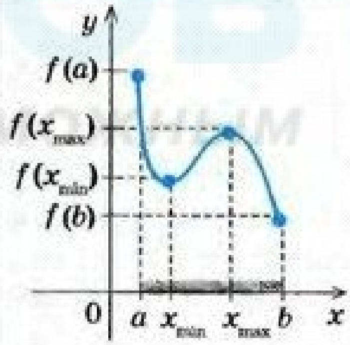
| | |
|---|---|
| 4. Отметить критические точки на области определения; найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения |  |
| 5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума или минимума или не является точкой экстремума | |
| 6. Записать результат исследования (промежутки монотонности и экстремумы) | $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -1)$ и при $x \in (1; +\infty)$ |
| | $f(x)$ убывает при $x \in (-1; 1)$ |
| | Точки экстремума: $x_{\max} = -1$; $x_{\min} = 1$.<br>Экстремумы: $y_{\max} = f(-1) = 3$; $y_{\min} = f(1) = -1$ |

## Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

### Свойство

*Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нем конечное число критических точек, то она принимает свои наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке или в критических точках, принадлежащих этому отрезку, или на концах отрезка*

### Примеры

| | | | |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{\max})$<br>$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{\min})$ | $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{\max})$<br>$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ | $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$<br>$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{\min})$ | $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$<br>$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ |

## Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке

| Схема | **Пример**<br>Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 22$ при $x \in [1; 3]$ |
|---|---|
| 1. Найти производную $f'(x)$ | $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$ |
| 2. Найти критические точки ($f'(x) = 0$ или не существует) | $f'(x) = 0$ ($3x^2 + 6x - 24 = 0$) при $x = -4$ и при $x = 2$ |
| 3. Выбрать критические точки, принадлежащие данному отрезку | Данному отрезку [1; 3] принадлежит только критическая точка $x = 2$ |
| 4. Вычислить значение функции в критических точках и на концах отрезку | $f(1) = 2$, $f(2) = -6$, $f(3) = 4$ |
| 5. Сравнить полученные значения и выбрать из них наименьшее и наибольшее | $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 4$, $\min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -6$ |

(√x)' = 1 / 2√x

1. $C' = 0$

2. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

3. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}, \alpha \in R$

4. $\left(e^x\right)' = e^x$

5. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

6. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

7. $\left(\sin x\right)' = \cos x$

8. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$

9. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

10. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

11. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

15. $\left(shx\right)' = chx$

16. $\left(chx\right)' = shx$

17. $\left(thx\right)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$

18. $\left(cthx\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$



**Правила дифференцирования суммы, произведения и частного:**

$1. (cx)' = cx' \quad 2. (u \pm v)' = u' \pm v' \quad 3. (uv)' = u'v + uv' \quad 4. \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$