Ответы и решения для варианта 33006763

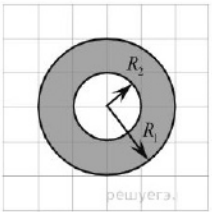
1)Учеников начальной школы 800 · 0,3 = 240, а учеников средней и старшей школы — 800 − 240 = 560. Значит, немецкий язык в школе изучают 560 · 0,2 = 112 учеников. Ответ: 112.

2)Из графика видно, впервые 5 мм осадков выпало 11 февраля (см. рисунок). Ответ: 11.

3)

Площадь кольца равна разности площади большого и малого кругов. Радиус большого круга равен 2, а малого — 1, откуда

$$S = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi.$$



Поэтому

$$\frac{S}{\pi} = 3.$$

Ответ: 3.

4)

В первом туре Руслан Орлов может сыграть с 26 − 1 = 25 бадминтонистами, из которых 10 − 1 = 9 из России. Значит, вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России, равна

$$\frac{9}{25} = 0,36.$$

Ответ: 0,36.

5)

Область допустимых значений: $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$.

При $x\neq 2$ домножим на знаменатель:

$$x=\frac{6x-15}{x-2} \Leftrightarrow x(x-2)=6x-15 \Leftrightarrow x^2-8x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5; \\ x=3. \end{array}\right.$$

Больший корень равен 5.

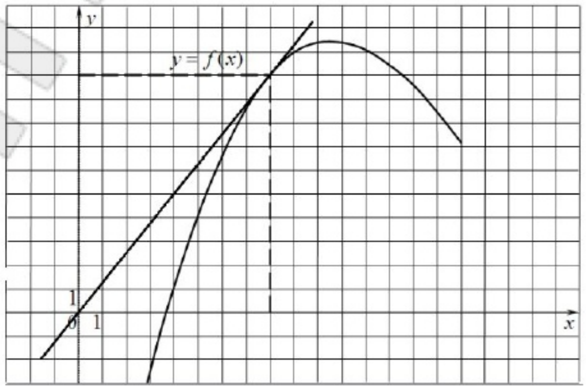
Ответ: 5.

6)Угол между касательной и хордой равен половине дуги, заключенной между ними. Поэтому он равен 46. Ответ: 46.

7)

Поскольку касательная проходит через начало координат, её уравнение имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку (8; 10), поэтому $10 = 8 \cdot k$, откуда $k = 1{,}25$. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: $f'(8) = 1{,}25$.

Ответ: 1,25.



8)

Сторона ромба a выражается через его диагонали d_1 и d_2 формулой

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 5.$$

Найдем площадь ромба

$$S_p = \frac{1}{2}d_1 d_2 = 24.$$

Тогда площадь поверхности призмы равна

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2S_p + 4aH = 48 + 4 \cdot 5 \cdot 10 = 248.$$

Ответ: 248.

9)

Выполним преобразования:

$$\log_5 9 \cdot \log_3 25 = 2\log_5 3 \cdot 2\log_3 5 = 4\log_5 3 \cdot \frac{1}{\log_5 3} = 4.$$

Ответ: 4.

10)

Поскольку показатели максимальны, они все равны 2. Подставим значения в формулу и учтем, что рейтинг равен 30:

$$30 = \frac{6+2+4}{A} \Leftrightarrow 30A = 12 \Leftrightarrow A = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

11)

Пусть масса первого сплава m_1 кг, а масса второго – m_2 кг. Тогда массовое содержание никеля в первом и втором сплавах $0,1m_1$ и $0,3m_2$, соответственно. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1+m_2=200, \\ 0,1m_1+0,3m_2=0,25\cdot 200, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2=200-m_1, \\ 0,1m_1+0,3(200-m_1)=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2=200-m_1, \\ 0,2m_1=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1=50, \\ m_2=150. \end{cases}$$

Таким образом, первый сплав легче второго на 100 килограммов.

Ответ: 100.

12)

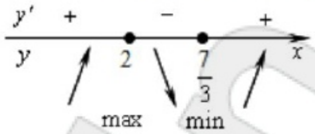
Найдем производную заданной функции:

$$y'=3x^2-13x+14.$$

Из уравнения $3x^2-13x+14=0$ найдем нули производной:

$$\left[\begin{array}{l} x=2\frac{1}{3}, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



На отрезке $[-4;\ 3]$ функция не является монотонной, она может достигать своего наибольшего значения в точках 2 или 3. Сравним значения функции в этих точках:

$$y(2)=2^3-6,5\cdot 2^2+14\cdot 2-14=-4,$$
$$y(3)=3^3-6,5\cdot 3^2+14\cdot 3-14=-3,5.$$

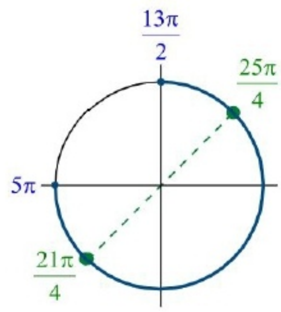
Наибольшим является значение функции в точке 3, оно равно −3,5.

Ответ: −3,5.

13)

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{\cos x}\cdot 5^{\cos x}=3^{\cos x}\cdot 5^{\sin x} \Leftrightarrow\ 5^{\cos x}=5^{\sin x}\ \Leftrightarrow\ \cos x=\sin x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \operatorname{tg} x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$



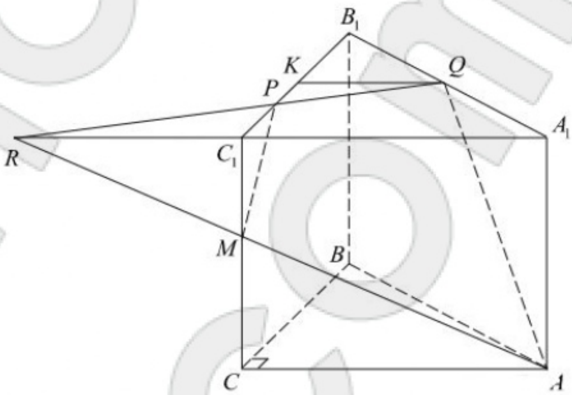
б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi,\ \frac{13\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{21\pi}{4}$, $\frac{25\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

14)

а) Пусть R — точка пересечения прямых PQ и A_1C_1, а K — середина B_1C_1 (см. рисунок). Тогда точка M — точка пересечения прямых AR и CC_1.



Треугольники PKQ и PC_1R подобны, откуда

$$\frac{C_1R}{KQ} = \frac{C_1P}{KP} = 2,$$
$$C_1R = 2KQ = A_1C_1 = 4.$$

Отрезок C_1M — средняя линия треугольника AA_1R, поскольку $A_1C_1 = C_1R$ и прямые AA_1 и CC_1 параллельны. Значит,

$$C_1M = \frac{A_1A}{2} = \frac{C_1C}{2}.$$

то есть M — середина CC_1.

б) Расстояние от точки A_1 до плоскости APQ равно высоте h пирамиды A_1AQR, опущенной из вершины A_1.

С одной стороны, объём пирамиды A_1AQR равен

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{B_1C_1}{2}S_{AA_1R} = \frac{1}{3}\cdot\frac{B_1C_1}{2}\cdot\frac{1}{2}AA_1\cdot A_1R = \frac{128\sqrt{2}}{3}.$$

С другой стороны, объём пирамиды A_1AQR равен $V = \frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{AQR}$. Значит,

$$h = \frac{128\sqrt{2}}{S_{AQR}}.$$

В треугольнике AQR находим стороны:

$$AQ = QR = 10,$$
$$AR = 4\sqrt{6}.$$

Площадь равнобедренного треугольника AQR равна

$$S_{AQR} = \frac{1}{2}\cdot AR\sqrt{AQ^2 - \frac{AR^2}{4}} = 4\sqrt{114}.$$

Следовательно,

$$h = \frac{128\sqrt{2}}{4\sqrt{114}} = \frac{32\sqrt{57}}{57}.$$

Ответ: $\frac{32\sqrt{57}}{57}$.

15)

Левая часть неравенства имеет смысл при $x > 0,\ 0,5x \neq 1$ и $0,125x \neq 1$, то есть при $x > 0,\ x \neq 2$ и $x \neq 8$. При этих условиях получаем:

$$\frac{\log_2(2x)\cdot\frac{1}{\log_2(0,5x)}}{\frac{3}{\log_2(0,125x)}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(\log_2 2+\log_2 x)(\log_2 0,125+\log_2 x)}{\log_2 0,5+\log_2 x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{(\log_2 x+1)(\log_2 x-3)}{\log_2 x-1} \leq 3.$$

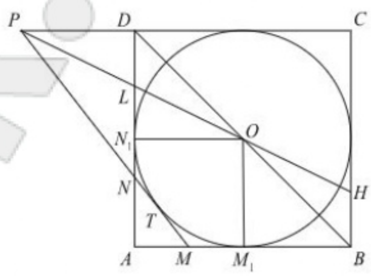
Сделаем замену $y = \log_2 x$, тогда

$$\frac{(y+1)(y-3)}{y-1} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{y(y-5)}{y-1} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \leq 0, \\ 1 < y \leq 5. \end{array}\right.$$

Откуда $0 < x \leq 1$ или $2 < x \leq 32$. Из полученного набора нужно ещё исключить точку 8. Получаем ответ: $(0;\ 1] \cup (2;\ 8) \cup (8;\ 32]$.

Ответ: $(0;\ 1] \cup (2;\ 8) \cup (8;\ 32]$.

16)



а) Пусть окружность, вписанная в квадрат, касается его стороны AB в точке M_1, стороны AD — в точке N_1, а прямой MN — в точке T. По свойству касательных $NN_1 = NT$, $MM_1 = MT$ и $AN_1 = AM_1$. Тогда

$$\begin{gathered} AM+MN+AN = AM+MT+NT+AN = \\ (AM+MM_1)+(NN_1+AN) = \\ = \frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AD = AB. \end{gathered}$$

б) Положим $AB = 12a,\ TN = NN_1 = x$. Тогда

$$\begin{gathered} AM = 3a, \\ AN = AN_1 - NN_1 = 6a - x, \\ MN = MT + TN = 3a + x. \end{gathered}$$

По теореме Пифагора $AM^2 + AN^2 = MN^2$, то есть

$$9a^2 + (6a-x)^2 = (3a+x)^2.$$

Отсюда находим, что $x = 2a$. Тогда $AN = 4a$ и $MN = 5a$. Пусть O — центр окружности, а прямая PO пересекает стороны AD и BC в точках L и H соответственно. Из равенства треугольников DOL и BOH следует, что $DL = BH$, поэтому $\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA}$. Окружность вписана в угол MPC, значит, PL — биссектриса треугольника DPN, который подобен треугольнику AMN. Используя свойство биссектрисы и подобие, находим:

$$\frac{DL}{LN} = \frac{PD}{PN} = \frac{AM}{MN} = \frac{3}{5},$$

откуда

$$DL = \frac{3}{8}DN.$$

учитывая, что $DN = DA - AN = 12a - 4a = 8a$, находим, что $DL = 3a,\ LA = 9a$.

$$\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: б) 1 : 3.

17)

Так как цена бумаги каждый год возрастает на тысячу, а куплена она в первый год за 8 тыс. руб, то на k-ый год бумага будет стоить $k+7$ тыс. рублей. Если Алексей продаст бумагу в течение k-го года, то через двадцать пять лет после покупки сумма на его счёте будет равна $(k+7)\cdot(1,08)^{25-k}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k=(k+7)\cdot(1,08)^{25-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 25. Рассмотрим приращение

$$b_k=a_k-a_{k-1}=(1,08)^{25-k}(k+7-1,08\cdot((k-1)+7))=(1,08)^{25-k}(0,52-0,08k).$$

Отсюда $b_k>0$ при $k\le 6$ и $b_k<0$ при $k>6$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k=6$.

Ответ: в течение шестого года.

18)

Изобразим множество точек, заданное системой неравенств

$$\begin{cases}(a+7x+4)(a-2x+4)\le 0,\\ a\ge x^2-3x\end{cases}$$

на плоскости xOa.

Искомое множество является пересечением части плоскости, лежащей внутри параболы, заданной уравнением $a=x^2-3x$, и двух тупых углов, ограниченных прямыми $a=2x-4$ и $a=-7x-4$ (см. рис., выделено жирным контуром).

Найдём абсциссы их точек пересечения:

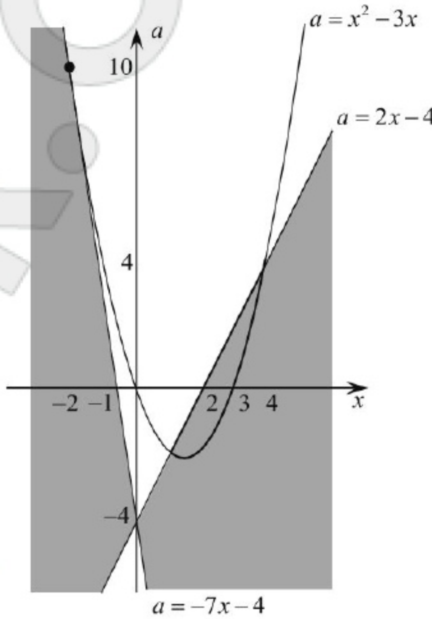
Решим уравнение

$$x^2-3x=2x-4\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=4.\end{array}\right.$$

Решим уравнение

$$x^2-3x=-7x-4\Leftrightarrow x^2+4x+4=0\Leftrightarrow x=-2.$$

Из рисунка следует, что система имеет решения для всех a, лежащих выше ординаты вершины параболы, но ниже точки пересечения параболы с прямой $a=2x-4$, то есть для всех a из отрезка $\left[-\frac{9}{4};\ 4\right]$ и для $a=10$.



19)

а) Да, например:

$$2+4+\ \dots\ +44+46+66+7+17+27+37+47+57=\frac{2+46}{2}\cdot 23+66+192=810.$$

б) Пусть на доске ровно два числа, оканчивающихся на 7. Тогда на доске написано 28 четных чисел. Их сумма не меньше, чем:

$$2+4+\ \dots\ +54+56=\frac{58\cdot 28}{2}=812.$$

Это противоречит тому, что сумма равна 810, то есть на доске не может быть двух чисел, оканчивающихся на 7/

в) Заметим, что число 810 кратно 2, сумма четных чисел кратна двум, тогда и сумма чисел, оканчивающихся на 7, тоже кратна двум. Чтобы сумма нечетных чисел делилась на два, слагаемых должно быть четное количество. В пункте б) показано, что на доске не может быть два числа, оканчивающихся на 7, тогда наименьшее возможное количество таких чисел — 4.

Приведем пример, когда на доске написано четыре числа, оканчивающихся на 7:

$$(2+4+\ \dots\ +30+32)+(36+38+\ \dots\ +52+54)+7+17+27+37=\frac{2+32}{2}\cdot 16+\frac{36+54}{2}\cdot 10+88=810.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 4.