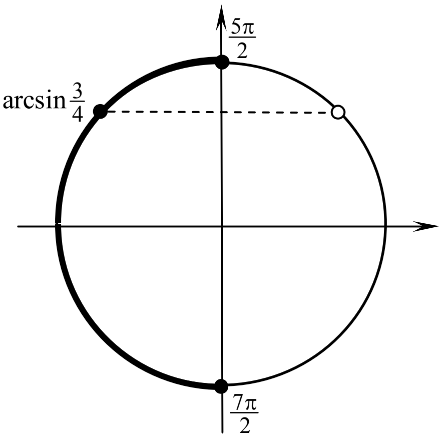
Решения и критерии оценивания выполнения заданий 13 — 19 варианта 2

13. а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-2\cos 2x=1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.



Решение. а) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-2\cos 2x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x+4\sin^2 x-2=1 \Leftrightarrow 4\sin^2 x+\sin x-3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1,\\ \sin x=\frac{3}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k\in Z,\\ x=(-1)^k\arcsin\frac{3}{4}+\pi k\end{array}\right.$.

б) Условию $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$ удовлетворяют числа $\frac{7\pi}{2}$ и $3\pi-\arcsin\frac{3}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\arcsin\frac{3}{4}+\pi k$, $k\in Z$; б) $3\pi-\arcsin\frac{3}{4}$, $\frac{7\pi}{2}$.

Критерии оценивания выполнения задания 13	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) и верно отобраны корни в пункте б)	2
Верно выполнен пункт а) ИЛИ Полученный в пунктах а) и б) ответ неверен в результате ОДНОЙ допущенной арифметической ошибки (описки), не повлиявшей принципиально на ход решения и не упростившей задачу ИЛИ Пункт а) доведен до верных простейших уравнений, которые решены с ошибкой. При этом конкретные решения простейших уравнений, необходимые для пункта б), отобраны верно, и, следовательно, ответ в пункте б) верен **Замечание.** Отбор корней может быть произведен любым способом: на единичной окружности, перебором значений k и т.д., **но обязательно показан!**	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

14. Основание пирамиды $PABC$ — правильный треугольник ABC, сторона которого равна 16, боковое ребро PA — $8\sqrt{3}$. Высота пирамиды PH делит высоту AM треугольника ABC пополам. Через вершину A проведена плоскость α, перпендикулярная прямой PM и пересекающая прямую PM в точке K.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту PH пирамиды $PABC$ в отношении 2:1, считая от вершины P.

б) Найдите расстояние между прямыми PH и CK.

Решение.

а) Пусть прямая AK пересекает прямую PH в точке N (см. рисунок 1). Так как $\alpha\perp PM$ и $AK\subset\alpha$, то $AK\perp PM$. Далее имеем: $AM=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}=AP$. Значит, AK — высота и медиана треугольника PAM. Следовательно, N — точка пересечения медиан этого треугольника, откуда и получаем $PN:NH=2:1$, что и требовалось доказать.

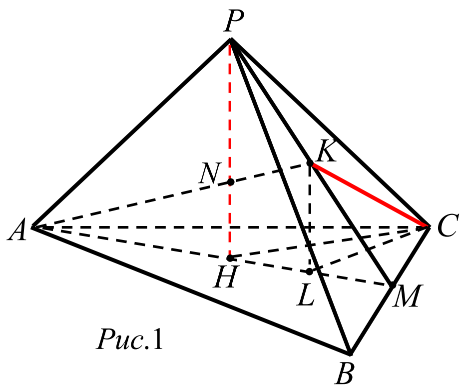


*Рис.*1

б) Пусть точка L — проекция точки K на плоскость ABC, тогда $KL \parallel PH$ и, значит, $L \in AM$. Так как $KL \parallel PH$ и $PK = KM$, то L — середина MH. Отрезок CL — проекция отрезка CK на плоскость ABC.

Далее, поскольку $(ABC) \perp PH$, точка H — проекция прямой PH на плоскость ABC. Значит, расстояние между прямыми PH и CK равно расстоянию от точки H до прямой CL, т.е., высоте HF треугольника CHL. (см. рисунок 2).

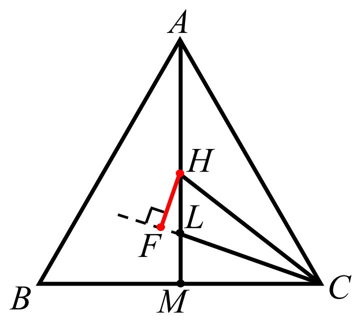


Рис.2

Далее имеем: $HM = \frac{AM}{2} = 4\sqrt{3}$, $LH = LM = \frac{HM}{2} = 2\sqrt{3}$, $CL = \sqrt{CM^2 + LM^2} = 2\sqrt{19}$, $HF = \frac{2S_{\Delta CHL}}{CL}$. Так как $LH = LM$, то $S_{\Delta CHL} = S_{\Delta CLM}$. Таким образом, $HF = \frac{2S_{\Delta CHL}}{CL} = \frac{CM \cdot ML}{CL} = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} = \frac{24}{\sqrt{57}}$.

Ответ: б) $\frac{24}{\sqrt{57}}$.

Критерии оценивания выполнения задания 14	Баллы
Имеется верное доказательство в пункте *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство в пункте *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* **(даже в том случае, если учащийся опирался на невыполненное или выполненное неверно задание *а*)** ИЛИ Имеется верное доказательство в пункте *а* и обоснованно получен ответ в пункте *б*, неверный из-за **арифметической** ошибки (описки)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

15. Решите неравенство $\log_{x^2+1} \frac{2 \cdot 9^x - 19 \cdot 3^x + 40}{9^x - 11 \cdot 3^x + 24} \geq 0$.

Решение. Заметим, что $x^2 + 1 > 1$ при $x \neq 0$. На этом множестве данное неравенство равносильно неравенству $\frac{2 \cdot 9^x - 19 \cdot 3^x + 40}{9^x - 11 \cdot 3^x + 24} \geq 1$.

Положив $3^x = t$, имеем: $\frac{2t^2 - 19t + 40}{t^2 - 11t + 24} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 8t + 16}{t^2 - 11t + 24} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-4)^2}{t^2 - 11t + 24} \geq 0$, откуда находим $t < 3,\ t = 4,\ t > 8$.

Далее имеем: $3^x < 3,\ 3^x = 4,\ 3^x > 8$, откуда $x < 1,\ x = \log_3 4,\ x > \log_3 8$.

Учитывая условие $x \neq 0$, окончательно получаем $x < 0,\ 0 < x < 1,\ x = \log_3 4,\ x > \log_3 8$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup \{\log_3 4\} \cup (\log_3 8; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания 15	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного потерей точки $x = \log_3 4$. Если в ответ или в ОДЗ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов». ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

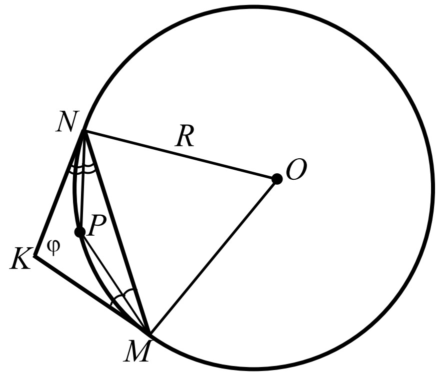
16. Угол MKN треугольника KMN равен φ. Сторона MN является хордой окружности с центром O и радиусом R, проходящей через центр окружности, вписанной в треугольник MKN.

а) Докажите, что около четырёхугольника $KMON$ можно описать окружность.

б) Известно, что в четырёхугольник $KMON$ можно вписать окружность. Найдите радиус r этой окружности, если $R = 12$, $\varphi = 120°$.

Решение.

а) Пусть точка P — центр окружности, вписанной в треугольник KMN (см.рисунок). Тогда $\angle KNP = \angle MNP$ и $\angle KMP = \angle NMP$, откуда получаем $\angle MNP + \angle NMP = \frac{\angle KNM + \angle KMN}{2} = \frac{\pi - \varphi}{2}$. Углы MNP и NMP вписаны в окружность $O(R)$, поэтому $\overset{\frown}{MPN} = \overset{\frown}{MP} + \overset{\frown}{NP} = \pi - \varphi$. Значит, $\angle MON = \pi - \varphi$ и $\angle MKN + \angle MON = \pi$. Следовательно, около четырёхугольника $KMON$ можно описать окружность, что и требовалось доказать.



б) В четырёхугольник $KMON$ можно вписать окружность, следовательно, $KN + OM = KM + ON$, откуда $KM = KN$. Таким образом, треугольник OMN — равносторонний треугольник со стороной $MN = R$, а треугольник KMN — равнобедренный треугольник с боковой стороной $KN = \frac{MN}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Далее имеем:

$$S_{KMON} = S_{KMN} + S_{MON} = \frac{R^2}{(\sqrt{3})^2}\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{3}, \quad p_{KMON} = \frac{R(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}, \quad r = \frac{S}{p} = \frac{R^2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3R(\sqrt{3}+1)} = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{2}.$$

Учитывая, что $R = 12$, окончательно получаем $r = 6(\sqrt{3} - 1)$.

Ответ: $6(\sqrt{3} - 1)$.

Критерии оценивания выполнения задания 16	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Не доказано утверждения пункта а), но обоснованно получен верный ответ в пункте б) без использования утверждения пункта а) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а), получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при неверном доказательстве утверждения пункта а) и обоснованном решении пункта б) без использования утверждения пункта а) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен или выполнен неверно ИЛИ получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Максимальный балл	***3***

17. Агата Артуровна взяла кредит в банке на 4 года на сумму 7 320 000 рублей. Условия возврата кредита таковы: в конце каждого года банк увеличивает текущую сумму долга на 20%. Агата Артуровна хочет выплатить весь долг двумя равными платежами — в конце второго и четвертого годов. При этом платежи в каждом случае выплачиваются после начисления процентов. Сколько рублей составит каждый из этих платежей?

Решение. Пусть S = 7 320 000 рублей — сумма, взятая в кредит, x рублей — величина каждого из платежей, $k = 1{,}2$. Тогда после первого года долг в рублях составит kS, после второго — $(k^2S - x)$, после третьего — $(k(k^2S - x))$, после четвёртого — $(k^2(k^2S - x) - x)$. По условию, последнее выражение должно равняться нулю.

$$k^2(k^2S - x) - x = 0;\quad k^4S = x(k^2 + 1);\quad x = \frac{k^4S}{k^2+1}.$$

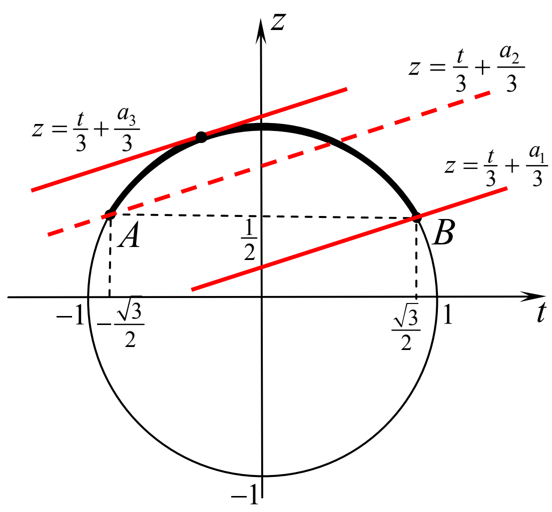
Подставляя в последнее выражение значения S и k, получаем $x = \frac{1{,}2^4 \cdot 7320000}{2{,}44} = 6220800$.

Ответ: 6 220 800 рублей.

Критерии оценивания выполнения задания 17	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верный ответ получен, но недостаточно обоснован ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	2
Верно построена математическая модель, но дальнейшее решение неверно или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\sin x = \cos x + a$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Решение. Положим $\sin x = z$, $\cos x = t$ и рассмотрим функцию $z(t) = \frac{t}{3} + \frac{a}{3}$. Уравнение $3\sin x = \cos x + a$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ тогда и только тогда, когда прямая $z = \frac{t}{3} + \frac{a}{3}$ имеет с дугой AB окружности $t^2 + z^2 = 1$ ровно одну общую точку, т.е., при $a_1 \le a < a_2$ и при $a = a_3$ (см. рисунок). Значения a_1 и a_2 находим, подставляя координаты точек $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$ и $A(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$ в уравнения $z = \frac{t}{3} + \frac{a_1}{3}$ и $z = \frac{t}{3} + \frac{a_2}{3}$ соответственно:



$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3} + \frac{a_1}{3}$, откуда $a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$;

$\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3} + \frac{a_2}{3}$, откуда $a_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Значение a_3 — положительное значение a, при котором система уравнений $z=\frac{t}{3}+\frac{a}{3}$ и $t^2+z^2=1$ единственное решение. Подставляя $z=\frac{t}{3}+\frac{a_3}{3}$ в уравнение $t^2+z^2=1$, получаем квадратное уравнение $10t^2-2a_3t+(a_3^2-9)=0$, дискриминант которого должен равняться нулю.

Имеем: $\frac{D}{4}=a_3^2-10(a_3^2-9)=90-9a_3^2$; $10-a_3^2=0$. Учитывая условие $a_3>0$, окончательно получаем $a_3=\sqrt{10}$.

Ответ: $\frac{3-\sqrt{3}}{2}\le a<\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, $a=\sqrt{10}$.

Критерии оценивания выполнения задания 18	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Обосновано получен ответ, отличающийся от верного только исключением и/или включением граничных точек ИЛИ Ответ неверен вследствие одной арифметической ошибки (описки), не повлиявшей на ход решения и не упростившей задачу	3
С помощью верного рассуждения получены искомые значения a, неверные из-за неверной оценки концов промежутков ИЛИ потерян случай касания	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения графиков уравнений $z=\frac{t}{3}+\frac{a}{3}$ и $t^2+z^2=1$, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***

19. Назовем натуральное число хорошим, если в нем можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 11.

а) Является ли число 5432 хорошим?

б) Является ли число 10235 хорошим?

в) Найти наименьшее хорошее число, состоящее из различных нечетных цифр.

Решение.

а) Да, является: 2453 делится на 11

Замечание: Есть и другие верные примеры, например, 5423 .

б) По признаку делимости на 11, разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, должна делиться на 11. При этом в нашем случае эта разность не может быть равна нулю: так как сумма всех цифр в данном числе равна 11 (независимо от их перестановки), и, значит, разность между суммами чисел, стоящих на четных и нечетных местах, будет нечетной. При этом, эта разность по модулю не превосходит $(5+3+2)-(1+0)=9$, что меньше 11. Значит, указанная разность не делится на 11, а, следовательно, и число, полученное любой перестановкой цифр из числа 10235 не будет делиться на 11. Таким образом, 10235 не является хорошим.

в) Всего есть 5 нечетных цифр: 1, 3, 5, 7, 9. Очевидно, числа, составленные из одной или двух различных цифр не делятся на 11. Рассмотрим число, составленное из трех различных нечетных цифр. Наименьшее возможное число — число, первые две цифры которого 1 и 3. В качестве третьей нельзя рассмотреть 5 или 7, так как в этом случае сумма всех цифр будет нечетна, а значит и разность между суммами цифр на четных и нечетных местах будет нечетной, то есть не равной нулю.
При этом данная разность не превосходит $(7+3)-1=9$, что меньше 11. Значит, числа 135 и 137 хорошими не являются. А 139 – хорошее, так как 319 делится на 11.

Ответ: а) да, б) нет, в) 139.

Критерии оценивания выполнения задания 19	Баллы
Верно получены все перечисленные результаты (см. критерий на 1 балл)	4
Верно получены три из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	3
Верно получены два из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	2
Верно получен один из перечисленных результатов: — верный пример в пункте *а*); — обоснованное решение пункта *б*); — доказательство того, что в пункте *в*) количество цифр не меньше трёх; — приведён пример наименьшего хорошего трёхзначного числа.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***