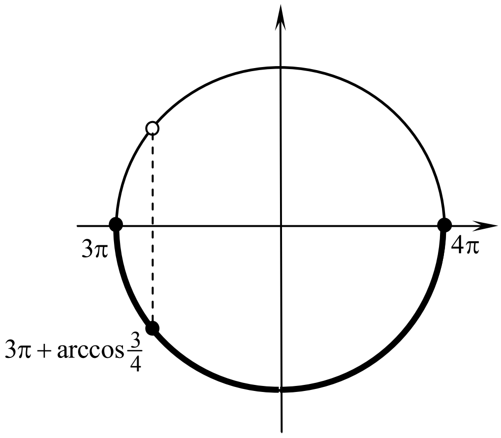
Решения и критерии оценивания выполнения заданий 13 — 19

Вариант 1

13. а) Решите уравнение $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+2\cos 2x=1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi;\ 4\pi]$..



Решение. а) $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+2\cos 2x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos x+4\cos^2 x-2=1 \Leftrightarrow 4\cos^2 x-\cos x-3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1,\\ \cos x=-\frac{3}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\quad k\in Z,\\ x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{3}{4}\right)+2\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

б) Условию $x\in[3\pi;\ 4\pi]$. удовлетворяют числа 4π и $3\pi+\arccos\frac{3}{4}$.

Ответ: а) $2\pi k,\ \pm\left(\pi-\arccos\frac{3}{4}\right)+2\pi k,\ k\in Z$; б) $3\pi+\arccos\frac{3}{4},\ 4\pi$.

Критерии оценивания выполнения задания 13	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) и верно отобраны корни в пункте б)	2
Верно выполнен пункт а) ИЛИ Полученный в пунктах а) и б) ответ неверен в результате ОДНОЙ допущенной арифметической ошибки (описки), не повлиявшей принципиально на ход решения и не упростившей задачу ИЛИ Пункт а) доведен до верных простейших уравнений, которые решены с ошибкой. При этом конкретные решения простейших уравнений, необходимые для пункта б), отобраны верно, и, следовательно, ответ в пункте б) верен **Замечание.** Отбор корней может быть произведен любым способом: на единичной окружности, перебором значений k и т.д., **но обязательно показан!**	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

14. В правильной четырёхугольной пирамиде *PABCD* сторона основания *ABCD* равна 12, боковое ребро *PA* — $12\sqrt{2}$. Через вершину *A* проведена плоскость α, перпендикулярная прямой *PC* и пересекающая ребро *PC* в точке *K*.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту *PH* пирамиды *PABCD* в отношении 2:1, считая от вершины *P*.

б) Найдите расстояние между прямыми *PH* и *BK*.

Решение.

а) Пусть прямая *AK* пересекает прямую *PH* в точке *M* (см. рисунок 1). Так как $\alpha\perp PC$ и $AK\subset\alpha$, то $AK\perp PC$. Далее имеем: $AC=AB\sqrt{2}=12\sqrt{2}=AP$. Значит, *AK* — высота и медиана правильного треугольника *PAC*. Следовательно, *M* — точка пересечения медиан этого треугольника, откуда и получаем $PM:MH=2:1$, что и требовалось доказать.

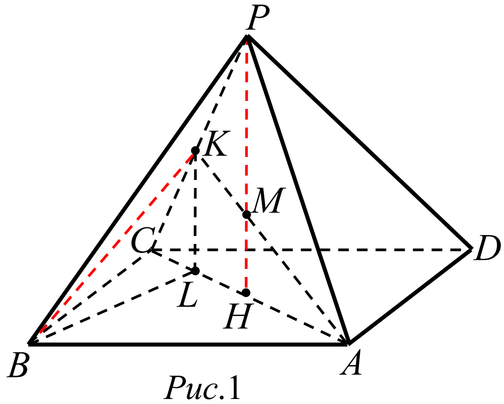


*Рис.*1

б) Пусть точка L — проекция точки K на плоскость ABC, $L \in AC$. Так как $KL \parallel PH$ и $PK = KC$, то L — середина CH. Отрезок BL — проекция отрезка BK на плоскость ABC. Далее, поскольку $(ABC) \perp PH$, точка H — проекция прямой PH на плоскость ABC. Значит, расстояние между прямыми PH и BK равно расстоянию от точки H до прямой BL, т.е., высоте HF треугольника BHL. (см. рисунок 2).

Далее имеем: $BH = \frac{BD}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$, $LH = \frac{AC}{4} = \frac{12\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2}$,

$BL = \sqrt{BH^2 + LH^2} = 3\sqrt{10}$, $HF = \frac{2S_{\Delta BHL}}{BL} = \frac{BH \cdot LH}{BL} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$.

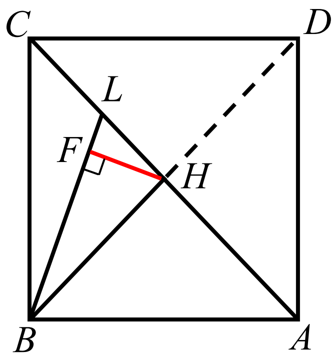


*Рис.*2

Ответ: б) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

Критерии оценивания выполнения задания 14	Баллы
Имеется верное доказательство в пункте *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство в пункте *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* **(даже в том случае, если учащийся опирался на невыполненное или выполненное неверно задание *а*)** ИЛИ Имеется верное доказательство в пункте *а* и обоснованно получен ответ в пункте *б*, неверный из-за **арифметической** ошибки (описки)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

15. Решите неравенство $\log_{x^2+1} \frac{2 \cdot 4^x - 15 \cdot 2^x + 23}{4^x - 9 \cdot 2^x + 14} \geq 0$.

Решение. Заметим, что $x^2 + 1 > 1$ при $x \neq 0$. На этом множестве данное неравенство равносильно неравенству $\frac{2 \cdot 4^x - 15 \cdot 2^x + 23}{4^x - 9 \cdot 2^x + 14} \geq 1$.

Положив $2^x = t$, имеем: $\frac{2t^2 - 15t + 23}{t^2 - 9t + 14} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 6t + 9}{t^2 - 9t + 14} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-3)^2}{t^2 - 9t + 14} \geq 0$, откуда находим $t < 2,\ t = 3,\ t > 7$.

Далее имеем: $2^x < 2,\ 2^x = 3,\ 2^x > 7$, откуда $x < 1,\ x = \log_2 3,\ x > \log_2 7$.

Учитывая условие $x \neq 0$, окончательно получаем $x < 0,\ 0 < x < 1,\ x = \log_2 3,\ x > \log_2 7$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup \{\log_2 3\} \cup (\log_2 7; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания 15	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного потерей точки $x = \log_2 3$. Если в ответ или в ОДЗ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов». ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***2***

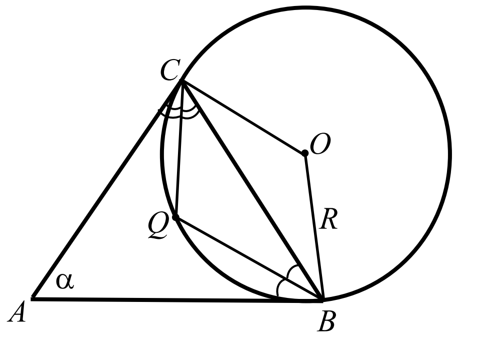
16. Угол BAC треугольника ABC равен α. Сторона BC является хордой окружности с центром O и радиусом R, проходящей через центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABOC$ можно описать окружность.

б) Известно, что в четырёхугольник $ABOC$ можно вписать окружность. Найдите радиус r этой окружности, если $R=6$, $\alpha=60^\circ$.

Решение.

а) Пусть точка Q — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (см.рисунок). Тогда $\angle ACQ=\angle BCQ$ и $\angle ABQ=\angle CBQ$, откуда получаем $\angle BCQ+\angle CBQ=\frac{\angle ACB+\angle ABC}{2}=\frac{\pi-\alpha}{2}$. Углы BCQ и CBQ вписаны в окружность $O(R)$, поэтому $\overset{\frown}{BQC}=\overset{\frown}{CQ}+\overset{\frown}{BQ}=. \quad =\pi-\alpha$. Значит, $\angle BOC=\pi-\alpha$ и $\angle BAC+\angle COB=\pi$. Следовательно, около четырёхугольника $ABOC$ можно описать окружность, что и требовалось доказать.



б) В четырёхугольник $ABOC$ можно вписать окружность, следовательно, $AC+OB=AB+OC$, откуда $AC=AB$. Таким образом, ΔABC — правильный треугольник со стороной $BC=OB\sqrt{3}=R\sqrt{3}$. Далее имеем:

$$S_{ABOC}=S_{ABC}+S_{BOC}=\frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}+\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=R^2\sqrt{3},\quad p_{ABOC}=R(\sqrt{3}+1),\quad r=\frac{S}{p}=\frac{R^2\sqrt{3}}{R(\sqrt{3}+1)}=\frac{R(3-\sqrt{3})}{2}.$$

Учитывая, что $R=6$, окончательно получаем $r=3(3-\sqrt{3})$.

Ответ: $3(3-\sqrt{3})$.

Критерии оценивания выполнения задания 16	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Не доказано утверждения пункта а), но обоснованно получен верный ответ в пункте б) без использования утверждения пункта а) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а), получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при неверном доказательстве утверждения пункта а) и обоснованном решении пункта б) без использования утверждения пункта а) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен или выполнен неверно ИЛИ получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

17. Светлана Михайловна взяла кредит в банке на 4 года на сумму 4 420 000 рублей. Условия возврата кредита таковы: в конце каждого года банк увеличивает текущую сумму долга на 10%. Светлана Михайловна хочет выплатить весь долг двумя равными платежами — в конце второго и четвертого годов. При этом платежи в каждом случае выплачиваются после начисления процентов. Сколько рублей составит каждый из этих платежей?

Решение. Пусть S = 4 420 000 рублей — сумма, взятая в кредит, x рублей — величина каждого из платежей, $k = 1{,}1$. Тогда после первого года долг в рублях составит kS, после второго — (k^2S-x), после третьего — $(k(k^2S-x))$, после четвёртого — $(k^2(k^2S-x)-x)$. По условию, последнее выражение должно равняться нулю.

$$k^2(k^2S-x)-x=0;\quad k^4S=x(k^2+1);\quad x=\frac{k^4S}{k^2+1}.$$

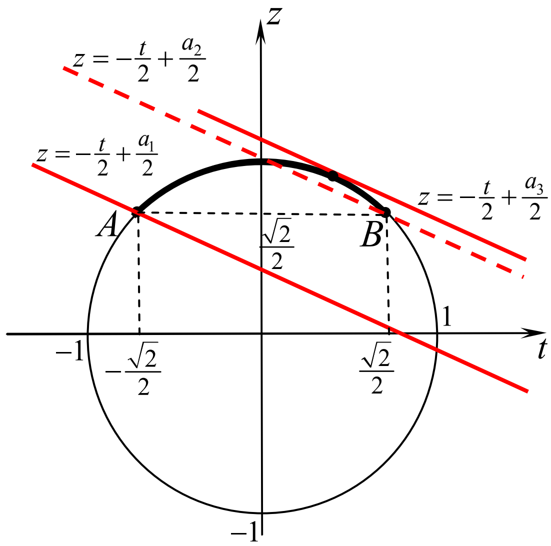
Подставляя в последнее выражение значения S и k, получаем $x=\dfrac{1{,}1^4\cdot 4420000}{2{,}21}=2\,928\,200$.

Ответ: 2 928 200 рублей.

Критерии оценивания выполнения задания 17	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верный ответ получен, но недостаточно обоснован ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	2
Верно построена математическая модель, но дальнейшее решение неверно или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***3***

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\sin x+\cos x=a$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Положим $\sin x = z$, $\cos x = t$ и рассмотрим функцию $z(t)=-\frac{t}{2}+\frac{a}{2}$. Уравнение $2\sin x+\cos x=a$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ тогда и только тогда, когда прямая $z=-\frac{t}{2}+\frac{a}{2}$ имеет с дугой AB окружности $t^2+z^2=1$ ровно одну общую точку, т.е., при $a_1\le a<a_2$ и при $a=a_3$ (см. рисунок). Значения a_1 и a_2 находим подставляя координаты точек $A(-\frac{\sqrt2}{2};\frac{\sqrt2}{2})$ и $B(\frac{\sqrt2}{2};\frac{\sqrt2}{2})$ в уравнения $z=-\frac{t}{2}+\frac{a_1}{2}$ и $z=-\frac{t}{2}+\frac{a_2}{2}$ соответственно:



$$\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{2\cdot2}+\frac{a_1}{2}\text{, откуда } a_1=\frac{\sqrt2}{2};$$

$$\frac{\sqrt2}{2}=-\frac{\sqrt2}{2\cdot2}+\frac{a_2}{2}\text{, откуда } a_2=\frac{3\sqrt2}{2}.$$

Значение a_3 — положительное значение a, при котором система уравнений $z=-\frac{t}{2}+\frac{a}{2}$ и $t^2+z^2=1$ единственное решение.

Подставляя $z=-\frac{t}{2}+\frac{a_3}{2}$ в уравнение $t^2+z^2=1$, получаем квадратное уравнение $5t^2-2a_3t+(a_3^2-4)=0$, дискриминант которого должен равняться нулю.

Имеем: $\frac{D}{4}=a_3^2-5(a_3^2-4)=20-4a_3^2$; $20-4a_3^2=0$. Учитывая условие $a_3>0$, окончательно получаем $a_3=\sqrt{5}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}\le a<\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $a=\sqrt{5}$.

Критерии оценивания выполнения задания 18	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Обосновано получен ответ, отличающийся от верного только исключением и/или включением граничных точек ИЛИ Ответ неверен вследствие одной арифметической ошибки (описки), не повлиявшей на ход решения и не упростившей задачу	3
С помощью верного рассуждения получены искомые значения a, неверные из-за неверной оценки концов промежутков ИЛИ потерян случай касания	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения графиков уравнений $z=-\frac{t}{2}+\frac{a}{2}$ и $t^2+z^2=1$, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***

19. Назовем натуральное число хорошим, если в нем можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 11.

а) Является ли число 1234 хорошим?

б) Является ли число 12345 хорошим?

в) Найти наибольшее хорошее число, состоящее из различных нечетных цифр.

Решение.

а) Да, является: 1243 делится на 11

Замечание: Есть и другие верные примеры, например, 4312 .

б) По признаку делимости на 11, разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, должна делиться на 11. При этом в нашем случае эта разность не может быть равна нулю: так как сумма всех цифр в данном числе равна 15 (независимо от их перестановки), и, значит, разность между суммами чисел, стоящих на четных и нечетных местах, будет нечетной. При этом, эта разность по модулю не превосходит $(5+4+3)-(2+1)=9$, что меньше 11. Значит, указанная разность не делится на 11, а, следовательно, и число, полученное любой перестановкой цифр из числа 12345 не будет делиться на 11. Таким образом, 12345 не является хорошим.

в) Всего есть 5 нечетных цифр: 1, 3, 5, 7, 9. Докажем, что число, составленное из всех этих пяти цифр, не может делиться на 11. Обозначим сумму цифр, стоящих на нечетных местах искомого числа через a, а сумму цифр, стоящих на четных местах – через b. Тогда $a+b=1+3+5+7+9=25$, а, значит, их разность также нечетна, то есть не равна 0.
Заметим также, что $|a-b|<22$, так как $4\le a,\, b\le 21$. Пусть $|a-b|=11$, тогда одно из чисел a и b, равно 7, а второе — 18, (поскольку их сумма равна 25). Но 7 нельзя представить, ни в виде суммы двух, ни в виде суммы трёх нечетных чисел, значит данный случай невозможен.
Значит, разность этих чисел не делится на 11, то есть число 13579 не является хорошим. Таким образом, в искомом числе не более 4 цифр. В этом случае наибольшее возможное число — 9753. Оно является хорошим, так как 9735 делится на 11.

Ответ: а) да, б) нет, в) 9753.

Критерии оценивания выполнения задания 19	**Баллы**
Верно получены все перечисленные результаты (см. критерий на 1 балл)	4
Верно получены три из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	3
Верно получены два из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	2
Верно получен один из перечисленных результатов: — верный пример в пункте *а*); — обоснованное решение пункта *б*); — доказательство того, что в пункте *в*) количество цифр не превосходит четырёх; — приведён пример наибольшего хорошего четырёхзначного числа.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	***4***