Ответы и решения для варианта 33006757

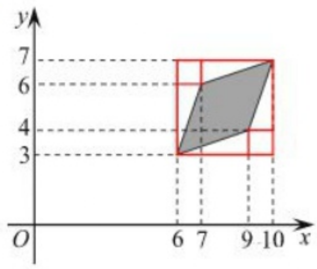
1)Поезд находился в пути 10 минут до полуночи и еще 7 часов 50 минут после полуночи. Всего 8 часов.

2) Из графика видно, что двигатель нагревался от температуры 60 °C до температуры 90 °C с пятой по восьмую минуту, таким образом, он нагревался 3 минуты. Ответ: 3.

3)

Площадь четырехугольника равна разности площади квадрата 4x4, четырех равных прямоугольных треугольников с катетами 1 и 3 и двух равных квадратов 1x1. Поэтому

$$S = 4\cdot 4 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1 = 8\text{ см}^2.$$



Ответ: 8.

4)Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий: 0,94·0,94 = 0,8836. Ответ: 0,8836.

5)

Избавимся от знаменателя:

$$\frac{x-119}{x+7} = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-119 = -5(x+7), \\ x \neq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 84, \\ x \neq -7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 14.$$

Ответ: 14.

6)

Сумма двух равных углов при основании треугольника равна 60°, поэтому каждый из них равен 30°. Тогда по теореме синусов

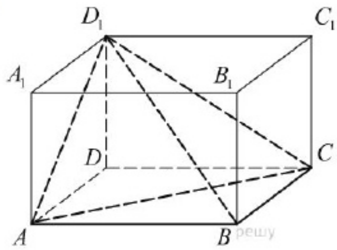
$$d = \frac{BC}{\sin A} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2.$$

Ответ: 2.

7)На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке −3. Ответ: −3.

8)

Площадь основания пирамиды в два раза меньше площади основания пареллелепипеда, а высота у них общая. Поэтому



$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{\text{пар}}h = \frac{1}{6}S_{\text{пар}}h = \frac{1}{6}\cdot 4\cdot 3\cdot 4 = 8.$$

Ответ: 8.

9)

Используем формулу косинуса двойного угла $2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$:

$$\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}\left(2\cos^2\frac{5\pi}{12} - 1\right) = \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} = \sqrt{3}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

Ответ: −1,5.

10)

Задача сводится к решению неравенства $y \geq 9$: при заданных значениях параметров a и b:

$$y \geq 9 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}x^2 + x \geq 9 \Leftrightarrow x^2 - 100x + 900 \leq 0 \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 90\text{м}.$$

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние – 90 метров.

Ответ: 90.

11)

Концентрация раствора равна

$$C = \frac{V_{\text{в−ва}}}{V_{\text{р−ра}}} \cdot 100\%.$$

Объем вещества в исходном растворе равен $0,12 \cdot 5 = 0,6$ литра. При добавлении 7 литров воды общий объем раствора увеличится, а объем растворенного вещества останется прежним. Таким образом, концентрация полученного раствора равна:

$$\frac{0,6}{5+7} \cdot 100\% = \frac{0,6}{12} \cdot 100\% = 5\%.$$

Ответ: 5.

12)

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{4}{\cos^2 x} - 4 = 4\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 4\operatorname{tg}^2 x.$$

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наименьшим значением функции на отрезке является

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \pi + 5 = 1.$$

Ответ: 1.

13)

а) Запишем исходное уравнение в виде:

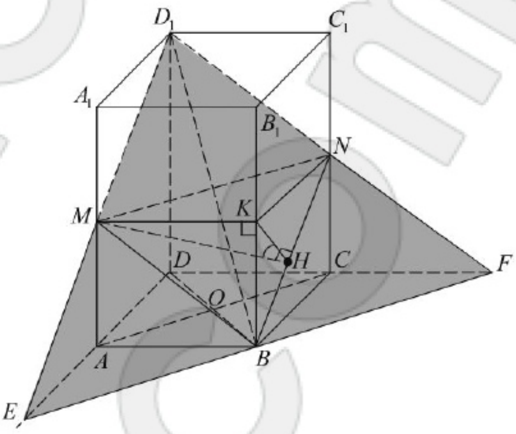
$$\log_5(2-x) = \log_5 x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = x^2, \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

б) Поскольку $\log_9 \frac{1}{82} < -2 < \log_9 8 < 1$, отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82};\ \log_9 8\right]$ принадлежит единственный корень -2.

Ответ: а) -2; 1, б) -2.

14)

Плоскость α проходит через точку B, лежащую в плоскости основания, и параллельна прямой AC, лежащей в плоскости основания. Следовательно, плоскость α пересекает плоскость основания по прямой, содержащей точку B и параллельной AC. Пусть эта прямая пересекает продолжения сторон DA и DC основания в точках E и F соответственно. Тогда α пересекает плоскость боковых граней по прямым D_1E и D_1F. Пусть M и N — точки пересечения этих прямых с боковыми ребрами параллелепипеда, тогда BMD_1N — сечение параллелепипеда плоскостью α.



Поскольку плоскость сечения проходит через прямую EF, параллельную плоскости ACC_1A_1 и пересекает её по прямой MN, прямая MN параллельна EF, а значит, параллельна AC.

По условию, сечение является ромбом, диагонали ромба перпендикулярны, поэтому $D_1B \perp MN$ и $D_1B \perp AC$. По теореме о трёх перпендикулярах, из перпендикулярности наклонной D_1B и прямой AC следует перпендикулярность прямой AC проекции наклонной — прямой DB. Этим показано, что диагонали лежащего в основании прямоугольника взаимно перпендикулярны. Следовательно, этот прямоугольник является квадратом, что и требовалось доказать.

15)

Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{\lg(5y^2-2y+1)}{\lg(4y^2-5y+1)^3} \le \frac{\log_{5^3} 7}{\log_5 7} \Leftrightarrow \frac{\lg(5y^2-2y+1)}{3\lg(4y^2-5y+1)} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_{4y^2-5y+1}(5y^2-2y+1) \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{4y^2-5y+1}\left(\frac{5y^2-2y+1}{4y^2-5y+1}\right) \le 0.$$

Перейдём к системе:

$$\begin{cases} 4y^2-5y+1>0, \\ 4y^2-5y+1 \ne 1, \\ 5y^2-2y+1>0, \\ (4y^2-5y+1-1)\left(\dfrac{5y^2-2y+1}{4y^2-5y+1}-1\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4y-1)(y-1)>0, \\ y(4y-5) \ne 0, \\ (4y-5)(y+3) \le 0. \end{cases}$$

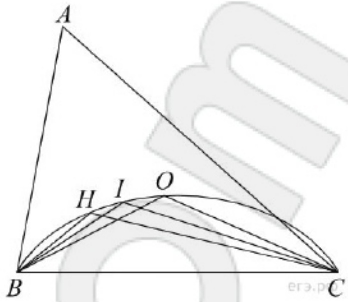
Решение первого неравенства: $y<\frac{1}{4}$ или $y>1$. Из второго равенства получаем, что $y \ne 0$ и $y \ne \frac{5}{4}$. Решение третьего неравенства: $-3 \le y \le \frac{5}{4}$.

Таким образом, решением неравенства является множество $[-3;\ 0) \cup \left(0;\ \frac{1}{4}\right) \cup \left(1;\ \frac{5}{4}\right)$.

Ответ: $[-3;\ 0) \cup \left(0;\ \frac{1}{4}\right) \cup \left(1;\ \frac{5}{4}\right)$.

16)

Точка O — центр описанной окружности около треугольника ABC, поэтому $\angle BOC = 2\angle BAC$. Значит,



$$180^\circ = \angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 2\angle BAC + \angle BAC = 3\angle BAC,$$

откуда $\angle BAC = 60^\circ$; $\angle ABC + \angle ACB = 120^\circ$; $\angle BOC = 120^\circ$.

Найдём угол BIC:

$$\angle BIC = 180^\circ - \angle IBC - \angle ICB =$$

$$= 180^\circ - \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = 180^\circ - \frac{120^\circ}{2} = 120^\circ.$$

Значит, $\angle BOC = \angle BIC$, поэтому точки B, O, I и C лежат на одной окружности.

б) Найдём угол BHC:

$$\angle BHC = 180^\circ - \angle HBC - \angle HCB = 180^\circ - (90^\circ - \angle ACB) - (90^\circ - \angle ABC) = \angle ACB + \angle ABC = 120^\circ.$$

Значит, $\angle BOC = \angle BIC = \angle BHC$, поэтому точки B, O, I, H и C лежат на одной окружности.

Поскольку $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 75^\circ$, получаем $\angle ACB = 45^\circ$. В равнобедренном треугольнике BOC имеем

$$\angle OBC = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = 30^\circ.$$

Прямая BH перпендикулярна AC, поэтому $\angle HBC = 90^\circ - \angle ACB = 45^\circ$.

Значит, $\angle HBO = \angle HBC - \angle OBC = 15^\circ$. Биссектриса угла треугольника лежит внутри угла, образованного медианой и высотой, исходящими из той же вершины, поэтому лучи BH, BI и BO пересекают дугу окружности в указанном на рисунке порядке. Четырёхугольник $BOIH$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle OIH = 180^\circ - \angle HBO = 165^\circ.$$

Ответ: б) 165°.

17)

Пусть x — доля мощностей завода, занятых под производство блинчиков с ягодной начинкой, а y — доля мощностей, занятых под производство блинчиков с творожной начинкой. Тогда $x + y = 1$, при этом блинчиков с ягодной начинкой производится $90x$ тонн, а с творожной начинкой — $75y$ тонн. Кроме того, из условия ассортиментности следует, что $90x \geq 15$ откуда $x \geq \frac{1}{6}$, а $75y \geq 15$, откуда $y \geq \frac{1}{5}$. Прибыль завода с одной тонны продукции с ягодной начинкой равна $100 - 70 = 30$ тыс. руб., прибыль с одной тонны продукции с творожной начинкой равна $135 - 100 = 35$ тыс. руб., общая прибыль с произведённой за месяц продукции равна $S(x,\ y) = 30 \cdot 90x + 35 \cdot 75y = 2700x + 2625y = 75 \cdot (36x + 35y)$. Таким образом, нам необходимо найти наибольшее значение функции $S(x,\ y) = 75 \cdot (36x + 35y)$ при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x \geq \frac{1}{6},\ y \geq \frac{1}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Подставляя $y = 1 - x$ в выражение $36x + 35y$, получаем: $36x + 35(1 - x) = x + 35$. Наибольшее значение этого выражения при условии $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}$ достигается при $x = \frac{4}{5}$, тогда $y = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Поэтому максимально возможная прибыль завода за месяц равна:

$$75 \cdot \left(36 \cdot \frac{4}{5} + 35 \cdot \frac{1}{5}\right) = 75 \cdot \frac{179}{5} = 2685 \text{ тыс.руб.}$$

при этом фабрика производит 72 тонны блинчиков с ягодной начинкой и 15 тонн блинчиков с творожной начинкой.

Ответ: 2685 тыс. руб.

18)

Рассмотрим функцию $f(x) = 4\sqrt[3]{3,5x-2,5} + 3\log_2(3x-1) + 2a$. Она определена при $x > \frac{1}{3}$, возрастает на области определения и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение. Это решение принадлежит отрезку $[1; 3]$ тогда и только тогда, когда $f(1) \le 0$ и $f(3) \ge 0$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 4+3+2a \le 0, \\ 8+9+2a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+7 \le 0, \\ 2a+17 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{17}{2} \le a \le -\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\left[-\frac{17}{2}; -\frac{7}{2}\right]$.

19)

а) Например, если 20 студентов писали обе контрольные работы и получили по 18 баллов за каждую, 4 студента писали только первую контрольную работу и получили по 0 баллов, 4 студента писали только вторую контрольную работу и получили по 0 баллов, то средний балл по каждой из контрольных работ в отдельности составил 15, а $S = \frac{20 \cdot 18 + 0}{28} = \frac{90}{7} < 15$.

б) Поскольку средние баллы по каждой контрольной в отдельности равны 15, средний балл по обеим контрольным работам тоже равен 15. Всего было написано 28 + 2 = 30 контрольных работ. Значит, общее количество набранных студентами баллов равно $15 \cdot 30 = 450$. При этом сумма наивысших баллов равна 13 · 28 = 364. Следовательно, сумма наименьших баллов, набранных двумя студентами, писавшими обе работы, равна 450 − 364 = 86. Но сумма наименьших баллов двух студентов не может превосходить 40. Противоречие.

в) Пусть k — количество студентов, писавших обе контрольные работы, a — сумма баллов студентов, которые писали только одну контрольную работу, b — сумма наибольших баллов студентов, которые писали обе контрольные работы, c — сумма наименьших баллов студентов, которые писали обе контрольные работы.

Тогда сумма всех набранных баллов: $a+b+c = 15 \cdot (28+k) = 420+15k$, сумма наивысших баллов $a+b = 13 \cdot 28 = 364$. Тогда $c = 56+15k$. С другой стороны, $c \le 20k$, поэтому $56+15k \le 20k$, откуда $k \ge 12$.

Приведём пример, когда $k = 12$, то есть если $c = 236$, $b = 240$, $a = 124$. Например, 11 студентов написали обе контрольные работы на 20 баллов, один студент написал обе контрольные, получив за первую 20 баллов, а за вторую 16 баллов, 8 студентов писали только первую контрольную, причем 3 из них написали ее на 20 баллов, а 5 из них — на 0 баллов, и 8 студентов писали только вторую контрольную, каждый на 8 баллов. Тогда обе контрольные писали по 20 студентов, набрав за первую 3 · 20 + 12 · 20 = 300 баллов и за вторую 8 · 8 + 11 · 20 + 16 = 300 баллов.

Ответ: а) Например, если 20 студентов написали обе контрольные работы и получили по 18 баллов, а по 4 студента написали только одну из двух контрольных работ и получили по 0 баллов; б) нет; в) 12.