Ответы и решения для варианта 33006761

1)

Разговор с Леной стоил Маше 53 − 8 = 45 рублей. Разделим 45 на 2,5:

$$\frac{45}{2,5} = \frac{450}{25} = \frac{90}{5} = 18.$$

Значит, разговор с Леной длился 18 минут.

Ответ: 18.

2) Из графика видно, что наименьшей цена была 6 марта (см. рисунок). Ответ: 6.

3)

Площадь закрашенной фигуры равна разности площади большого и маленького ромбов. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 32 - 8 = 24.$$

Ответ: 24.

4) Сумма очков может быть равна 5 в четырех случаях: «3 + 2», «2 + 3», «1 + 4», «4 + 1». Ответ: 4.

5)

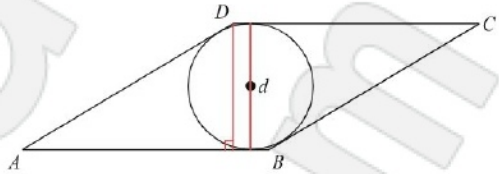
Переведем число в правой части уравнения в неправильную дробь и умножим обе части уравнения на 3, получаем:

$$\frac{1}{3}x^2 = 16\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 = \frac{49}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7; \\ x = -7. \end{array}\right.$$

Ответ: −7.

6)

Радиус r вписанной в ромб окружности вдвое меньше его высоты d. Поэтому



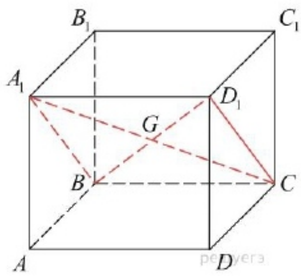
$$r = \frac{d}{2} = \frac{DH}{2} = \frac{AD\sin A}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

7)Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный. На отрезке [−6; 9] функция имеет одну точку максимума x = 7. Ответ: 1.

8)

Правильная четырёхугольная призма является прямоугольным параллелепипедом, диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, диагональное сечение является прямоугольником.



Рассмотрим прямоугольный треугольник A_1BC: в нем катет BC вдвое меньше гипотенузы A_1C, поэтому угол A_1CB равен 60°. Аналогично в треугольнике D_1CB угол D_1BC равен 60°.

Сумма углов треугольника BGC равна 180° получаем, поскольку два его угла равны 60°, третий угол тоже равен 60°.

Ответ: 60.

9)

Выполним преобразования:

$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 \frac{50}{2}} = 9^2 = 81.$$

Ответ: 81.

10)

Задача сводится к решению неравенства $L \geq 20$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 20$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2:

$$\frac{20^2}{10}\sin 2\alpha \geq 20 \Leftrightarrow \sin 2\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30° + 360°n \leq 2\alpha \leq 150° + 360°n \underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{0°<2\alpha<180°}{\Leftrightarrow} 30° \leq 2\alpha \leq 150° \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 15° \leq \alpha \leq 75°.$$

Ответ: 15.

11)

Пусть v км/ч — скорость первого автомобиля, тогда скорость второго автомобиля на второй половине пути равна $v+16$ км/ч. Примем расстояние между пунктами за 1. Автомобили были в пути одно и то же время, отсюда имеем:

$$\frac{1}{v} = \frac{0,5}{24} + \frac{0,5}{v+16} \underset{v>0}{\Leftrightarrow} 48(v+16) = v(v+16) + 24v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 - 8v - 768 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 32, \\ v = -24 \end{array}\right. \underset{v>0}{\Leftrightarrow} v = 32.$$

Таким образом, скорость первого автомобиля была равна 32 км/ч.

Ответ: 32.

12)

Найдем производную заданной функции:

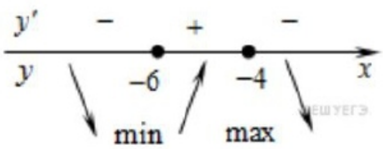
$$y' = ((x+6)^2)'e^{4-x} + ((x+6)^2)(e^{4-x})' = (2(x+6))e^{4-x} - ((x+6)^2)e^{4-x} =$$

$$= -(x+4)(x+6)e^{4-x}.$$

Найдем нули производной:

$$-(x+4)(x+6)e^{4-x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = -6. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:

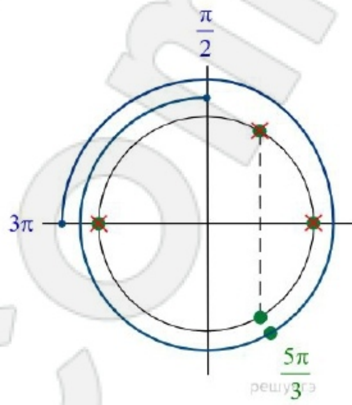


Искомая точка максимума $x = -4$.

Ответ: −4.

13)

а) Левая часть уравнения имеет смысл при $\operatorname{ctg} x \le 0$. Выражение $\sqrt{2}+\sqrt{-2\operatorname{ctg} x}$ положительно при всех допустимых x. Значит,



$$\begin{cases} \sin 2x - \sin x = 0, \\ \operatorname{ctg} x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x(2\cos x - 1) = 0, \\ \dfrac{\cos x}{\sin x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \dfrac{\cos x}{\sin x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\cos x}{\sin x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

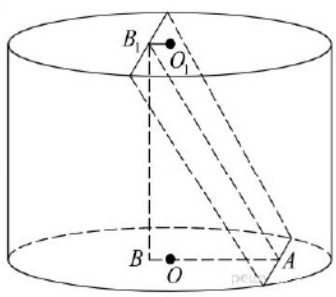
б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, лежащие на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$. Получим число $\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k:\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{3}$.

14)

Сразу отметим, что в окружности радиуса R расстояние от центра до хорды (то есть до середины хорды) длиной $2a$ равно $\sqrt{R^2 - a^2}$. Поэтому расстояния от центров оснований до хорд равны 5 и 12.

а) Пусть A и B_1 — середины хорд, B — проекция B_1 на другое основание цилиндра. Тогда $AB = 12 \pm 5$, $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{21^2 + (12 \pm 5)^2} = \sqrt{730}$, поэтому следует выбирать знак $+$, что как раз и означает, что хорды лежат по разные стороны от центров оснований, поэтому центры лежат по разные стороны от плоскости.



б) Указанные две плоскости пересекаются по хорде, содержащей точку A, при этом AB перпендикулярна этой хорде, следовательно, и AB_1 тоже. Поэтому

$$\alpha = \angle BAB_1 = \operatorname{arctg}\frac{BB_1}{AB} = \operatorname{arctg}\frac{21}{17}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{21}{17}$.

15)

Неравенство имеет смысл при $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \neq 0$, то есть при $x \neq 1$.

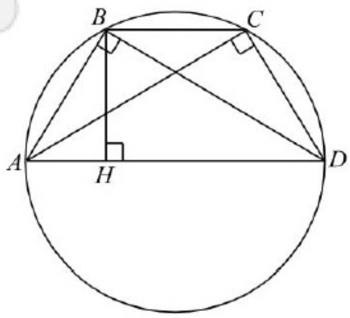
Пусть $\left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right|^{x-1,2} = t$. Тогда неравенство принимает вид $t + \frac{1}{t} \leq 2$, откуда $t = 1$ или $t < 0$. При всех допустимых x основание степени положительно и, следовательно, $t > 0$. Значит, неравенство выполняется только при $t = 1$.

Выясним, при каких x это происходит:

$$\left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right|^{x-1,2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right| = 1, \\ \begin{cases} x - 1,2 = 0, \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2,5, \\ x = 1,2, \\ x = -0,5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-0,5;\ 1,2;\ 2,5\}$.

16)



а) Углы ABD и ACD прямые, поэтому вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности диаметром AD. Значит, $AB = CD$, поскольку $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$.

б) Пусть BH — высота трапеции $ABCD$. Трапеция вписана в окружность, поэтому она равнобедренная. Следовательно, $AD = 2AH + BC$. Тогда

$$AH = AB\cos\widehat{BAD} = AB \cdot \frac{AB}{AD} = \frac{AB^2}{BC + 2AH} = \frac{4}{7 + 2AH},$$

откуда получаем уравнение $2AH^2 + 7AH - 4 = 0$. Его положительным корнем является $AH = 0,5$, и тогда $AD = 8$.

Ответ: 8.

17)

Пусть сумма кредита A тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$A,\ A - 30,\ A - 60,\ \ldots,\ A - 570,\ A - 600,\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}03A,\ 1{,}03(A - 30),\ \ldots,\ 1{,}03(A - 570),\ 1{,}03(A - 600).$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0{,}03A + 30,\ 0{,}03(A - 30) + 30,\ \ldots,\ 0{,}03(A - 570) + 30,\quad 1{,}03(A - 600).$$

Всего следует выплатить

$$20 \cdot 0,03 \cdot \frac{2A - 570}{2} + 20 \cdot 30 + 1,03(A - 600) = 1,63A - 189 \text{ (тыс. рублей).}$$

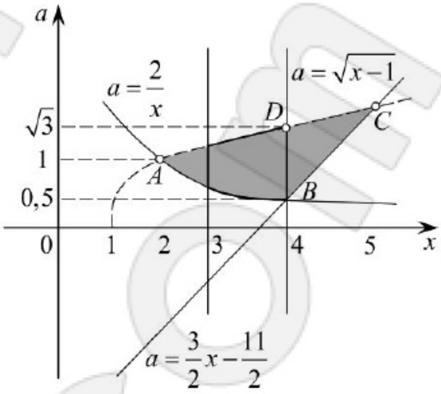
Откуда $1,63A - 189 = 1604 \Leftrightarrow 1,63A = 1793 \Leftrightarrow A = 1100$.

Значит, сумма, которую планируется взять в кредит равна 1100 тыс. рублей.

Ответ: 1 100 000 рублей.

18)

Изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств, на координатной плоскости xOa. Гипербола $a = \frac{2}{x}$ и график корня $a = \sqrt{x-1}$ пересекаются в точке $A(2;\ 1)$. Гипербола и прямая $a = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$ пересекаются в точке $B\left(4;\ \frac{1}{2}\right)$. График корня и прямая пересекаются в точке $C(5;\ 2)$. Множество точек, координаты которых удовлетворяют заданной системе (выделено штриховкой на рисунке), состоит из точек криволинейного треугольника ABC, не включая границу, лежащую на дуге AC.



Поскольку система должна иметь хотя бы одно решение на отрезке $[3;\ 4]$, осталось определить наименьшую и наибольшую ординаты проекции выделенного на рисунке четырехугольника на ось ординат. Проекции точек B и $D(4;\ \sqrt{3})$ дают искомое множество: заданная система неравенств имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;\ 4]$ при $\frac{1}{2} \le a < \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2} \le a < \sqrt{3}$.

19)

а) Например, из числа 2847 получается 2108124117.

б) Заметим, что если в изначальном числе была цифра 9 (не в последнем разряде), то в получившемся числе справа от нее должна стоять цифра 1 или 9. Значит, цифра 9 в числе 37494128 могла получиться только в результате сложения соседних цифр. Но сумма $4 + 4$ не равна 9, поэтому такое число не могло получиться.

в) Пусть изначальное трехзначное число равно $100a + 10b + c$, где a, b и c — цифры. Получившееся число будет семизначным, только если $a + b \ge 10$ и $b + c \ge 10$, а во всех остальных случаях полученное число будет меньше 1 000 000.

Если $a + b \ge 10$ и $b + c \ge 10$, то полученное число будет равно

$$a \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + (a + b - 10) \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + (b + c - 10) \cdot 10 + c.$$

Знакочередующая сумма цифр полученного числа равна

$$a - 1 + (a + b - 10) - b + 1 - (b + c - 10) + c = 2a - b.$$

При $a = 9$ получившееся число будет больше, чем при любом другом a, вне зависимости от b и c. В этом случае $2a - b$ делится на 11 только при $b = 7$ и любом c. При $a = 9$ и $b = 7$ максимальное число получится для $c = 9$.

Таким образом, максимальное число получается из числа 979 и равно 9167169.

Ответ: а) 2847; б) нет; в) 9167169.