

Ответы и решения для варианта 33006755

1) Рост человека составляет $(6 \cdot 12 + 1) \cdot 2,54 = 185,42$ см.
Округляя, получаем 185 см. Ответ: 185.

2) Из диаграммы видно, что наименьшая среднемесячная температура составляет -14°C (см. рисунок). Ответ: -14 .

3)

По теореме Пифагора найдем сторону четырехугольника:

$$AB = \sqrt{(3\sqrt{10})^2 + \sqrt{10}^2} = 10,$$

тогда периметр равен $4AB = 40$.

Ответ: 40.

4)

Пусть A — событие, состоящее в том, что мишень поражена стрелком с первого выстрела, B — событие, состоящее в том, что первый раз стрелок промахнулся, а со второго выстрела поразил мишень. Вероятность события A равна $P(A) = 0,7$. Событие B является произведением двух независимых событий, поэтому его вероятность равна произведению вероятностей этих событий: $P(B) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$. События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,7 + 0,21 = 0,91.$$

Ответ: 0,91.

5)

Если две дроби с равным знаменателем равны, то равны их числители. Имеем:

$$\frac{x+89}{x-7} = \frac{-5}{x-7} \Leftrightarrow \begin{cases} x+89 = -5, \\ x-7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -94, \\ x \neq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = -94.$$

Ответ: -94.

6)

Угол между двумя секущими равен полуразности высекаемых ими дуг:

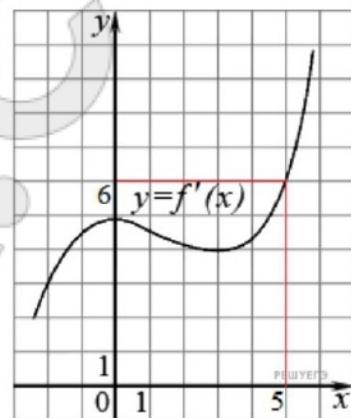
$$\angle ACB = \frac{\cup AB - \cup DE}{2} = \frac{118^\circ - 38^\circ}{2} = 40^\circ.$$

Ответ: 40.

7)

Поскольку касательная параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 6. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Осталось найти, в какой точке x производная принимает значение 6: искомая точка $x = 5$.

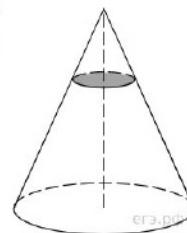
Ответ: 5.



8)

Сечение плоскостью, параллельной основанию, представляет собой круг, радиус которого относится к радиусу основания конуса как 3 : 9. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому площадь сечения в 9 раз меньше площади основания. Тем самым, она равна 2.

Ответ: 2.



9)

Выполним преобразования:

$$\frac{8}{\sin(-\frac{27\pi}{4}) \cos(\frac{31\pi}{4})} = \frac{8}{\sin(-7\pi + \frac{\pi}{4}) \cos(8\pi - \frac{\pi}{4})} = \frac{8}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = -16.$$

Ответ: -16.

10)

Задача сводится к решению неравенства $H \geq 5$ на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 20$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с²:

$$\begin{aligned}\frac{20^2}{40}(1 - \cos 2\alpha) \geq 5 &\Leftrightarrow 1 - \cos 2\alpha \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2\alpha \leq \frac{1}{2} \quad 0^\circ < 2\alpha < 180^\circ \\ &\Leftrightarrow 60^\circ \leq 2\alpha < 180^\circ \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ.\end{aligned}$$

Ответ: 30.

11)

Обозначим n — число задач, которые решает за час Гоша, тогда Вова за час решает $n+2$ задач. Вместе они решают 33 задачи на 1 час 15 минут быстрее, чем это сделал бы один Вова, отсюда имеем:

$$\begin{aligned}\frac{33}{n+2} - 1,25 &= \frac{33}{n+n+2} \Leftrightarrow \frac{33(n+2) - 33(2n+2) + 1,25(2n+2)(n+2)}{(2n+2)(n+2)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 33n + 66 - 66n - 66 + 2,5n^2 + 7,5n + 5 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5n^2 - 51n + 10 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{51+49}{10} = 10; \\ n = \frac{51-49}{10} = 0,2. \end{cases} \quad n > 3\end{aligned}$$

Поскольку за час мальчики решают целое количество задач $n = 10$.

Таким образом, Гоша решит 20 задач за $\frac{20}{10} = 2$.

Ответ: 2.

12)

Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом достигает наименьшего значения в точке $x = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3. Функция $y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$ в этой точке определена и принимает значение $\log_3(3^2 - 6 \cdot 3 + 10) + 2 = 2$. Поскольку логарифмическая функция с основанием, большим 1, возрастает, найденное значение является искомым наименьшим значением заданной функции.

Ответ: 2.

13)

а) Запишем исходное уравнение в виде $x+1 = 3\sqrt{x-1}$. При $x+1 < 0$ уравнение не имеет корней. При $x+1 \geq 0$ уравнение принимает вид:

$$x^2 + 2x + 1 = 9x - 9 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=5. \end{cases}$$

Оба корня удовлетворяют условию $x+1 \geq 0$.

б) Заметим, что $\sqrt{3} < 2, \sqrt{20} < 5$. Значит, указанному отрезку принадлежит корень $x = 2$.

Ответ: а) 2; 5; б) 2.

Примечание.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

14)

а) В плоскости ABP через точку K проведем прямую, параллельную прямой PB до пересечения ее с прямой AB в точке L — середине AB . В основании $ABCD$ через точку L проведем прямую, параллельную прямой BC до пересечения ее с ребром CD в точке M — его середине. По признаку параллельности прямой и плоскости плоскость KLM параллельна прямым PB и BC . Прямая LM параллельна прямой AD , следовательно, она параллельна плоскости APD , а, значит, плоскость KLM пересекает плоскость APD по прямой, параллельной LM и пересекает ребро PD в его середине N .

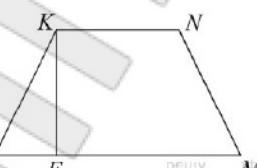
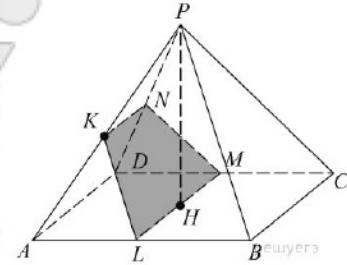
Таким образом, искомое сечение — трапеция $KLMN$.

б) Отрезки KL и MN равны, как средние линии равных правильных треугольников ABP и DCP , а отрезок LM — средняя линия квадрата $ABCD$, следовательно, построенное сечение — равнобедренная трапеция, в которой $LM = 4$, $KL = KN = MN = 2$. Проведем высоту KF этой трапеции. Тогда

$LF = \frac{LM - KN}{2} = 1$, и из прямоугольного треугольника KLF находим $KF = \sqrt{KL^2 - LF^2} = \sqrt{3}$.

Окончательно получаем $S_{KLMN} = \frac{LM + KN}{2} \cdot KF = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.



решу

15)

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\log_2^2(3x-1) + \frac{1}{\log_2^2(3x-1)} \right) - 2 \left(\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)} \right) + 2 \leq 0.$$

Пусть $\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)} = t$, тогда $\log_2^2(3x-1) + \frac{1}{\log_2^2(3x-1)} + 2 = t^2$ и, следовательно,

$$\log_2^2(3x-1) + \frac{1}{\log_2^2(3x-1)} = t^2 - 2.$$

Тогда исходное неравенство равносильно: $t^2 - 2t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2$, откуда

$$0 \leq \log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_2(3x-1)} \leq 2 \Leftrightarrow \log_2(3x-1) = 1 \Leftrightarrow 3x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

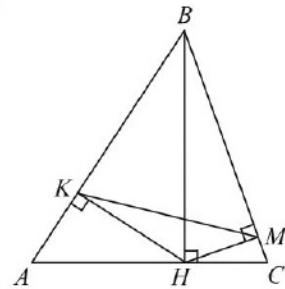
16)

а) Пусть угол $BAC = \alpha$. Углы BAC и KHB равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим четырёхугольник $BKHM$: в нем $\angle BKH + \angle BMH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, следовательно, четырёхугольник $BKHM$ вписан в окружность. Значит, углы KHB и KMB — вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Таким образом, $\angle BAC = \angle KHB = \angle KMB$. Треугольники ABC и MBK имеют общий угол B , а $\angle BAC = \angle KMB$, значит, эти треугольники подобны по двум углам.

б) Из прямоугольного треугольника BKH находим, что $BH = \frac{BK}{\sin \angle KHB}$. Для треугольника ABC справедливо равенство $2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$. Учитывая, что $\angle KHB = \angle BAC$, получаем: $\frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH}$. Стороны BC и BK — сходственные в подобных треугольниках ABC и MBK , следовательно, их коэффициент подобия $k = \frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH} = 4$. Найдём отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AMKC}} = \frac{S_{MBK}}{S_{ABC} - S_{MBK}} = \frac{S_{MBK}}{k^2 S_{MBK} - S_{MBK}} = \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{16 - 1} = \frac{1}{15}.$$

Ответ: $\frac{1}{15}$.



17)

По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1000, 960, 920, \dots, 240, 200, 0.$$

$$\text{Значит, } n = \frac{1000 - 200}{40} = 20.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1000k, 960k, \dots, 240k, 200k.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$1000(k-1) + 40, 960(k-1) + 40, \dots, 240(k-1) + 40, 200k.$$

Всего следует выплатить

$$(k-1) \cdot \frac{20 \cdot 1240}{2} + 800 + 200k = 12600k - 11600 \text{ (тыс. рублей).}$$

Тогда $12600k - 11600 = 1378$, откуда $12600k = 12978$, и следовательно, $k = 1,03$, то есть $r = 3$.

Ответ: 3.

18)

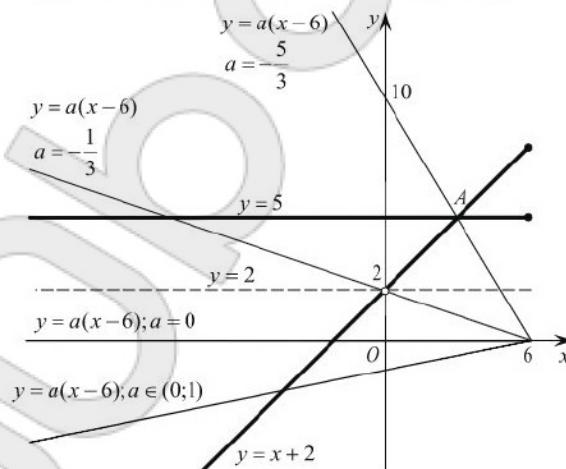
Заметим, что

$$y(y-7) = xy - 5(x+2) \Leftrightarrow y^2 - (x+7)y + 5(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5, \\ y = x+2. \end{cases}$$

Тогда исходная система равносильна следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} y = 5, \\ y = x+2, \\ y = a(x-6), \\ x \leq 6, y \neq 2. \end{cases}$$

Построим её график и определим, при каких значениях параметра пучок прямых $y = a(x-6)$ имеет единственную общую точку с объединением двух лучей $y = 5$ и $y = x+2$ при условиях $x \leq 6$, $y \neq 2$ (см. рис.)



Ответ: $a \in [0; 1) \cup \left\{-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$.

19)

- а) Если на доске написано по 15 чисел, оканчивающихся на 2 и на 6, то их сумма оканчивается на 0. Это противоречит тому, что сумма 2454.
- б) Пусть на доске ровно одно число, оканчивающееся на 6. Тогда на доске написано 29 чисел, оканчивающихся на 2. Их сумма не меньше, чем сумма 29 написанных чисел, оканчивающихся на 2: $2 + 12 + \dots + 282 = \frac{284 \cdot 29}{2} = 4118$. Это противоречит тому, что сумма равна 2454.
- в) Пусть на доске n чисел, оканчивающихся на 6 и $30 - n$, оканчивающихся на 2. Тогда сумма чисел, оканчивающихся на 2, не меньше суммы

$$2 + 12 + \dots + (2 + 10(29 - n)) = \frac{(4 + 10(29 - n))(30 - n)}{2} = 5n^2 - 297n + 4410.$$

Сумма чисел, оканчивающихся на 6, не меньше суммы

$$6 + 16 + \dots + (6 + 10(n - 1)) = \frac{(12 + 10(n - 1))n}{2} = 5n^2 + n.$$

Таким образом, $2454 \geq 10n^2 - 296n + 4410 \Leftrightarrow 5n^2 - 148n + 978 \leq 0$, откуда $n \geq 10$, так как $n \in \mathbb{N}$.

Если на доске 10 чисел, оканчивающаяся на 6, и 20 чисел, оканчивающихся на 2, то их сумма оканчивается на 0. Значит, чисел, оканчивающихся на 6, больше 10. Приведём пример 11 чисел, оканчивающихся на 6, и 19 чисел, оканчивающихся на 2, с суммой 2454: 6, 16, ..., 86, 96, 196, 2, 12, ..., 172, 182.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 11.