Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Номер задания	Правильный ответ
1	35
2	4
3	7
4	0,08
5	4,5
6	7,5
7	3
8	66
9	0,8
10	0,18
11	78
12	15
13	а) $6; -7$ б) 6
14	$\frac{\sqrt{30}}{5}$
15	$(-3; -2) \cup [0; +\infty)$
16	30
17	119 700
18	$(-2; -6); (6; 2)$
19	а) да б) нет в) все чётные натуральные числа

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение

$$\log_4(2x^2-2x-40)+\log_{0,25}(x^2-3x+2)=0.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

Источники:

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2-2x-40>0 \quad |:2 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}$

① $x^2-x-20>0$ ② $x^2-3x+2>0$

-4, 5; 1, 2

Найдём пересечение

-4, 1, 2, 5

$\Rightarrow (-\infty; -4) \cup (5; +\infty)$

$\log_4(2x^2-2x-40)-\log_4(x^2-3x+2)=0$

$\log_4(2x^2-2x-40)=\log_4(x^2-3x+2)$

$2x^2-2x-40=x^2-3x+2$

$x^2+x-42=0$

$x_1=-7 \qquad x_2=6$

б) $-2\pi \approx -2\cdot 3,14 \approx -6,28$

$2\pi \approx 6,28$

$\Rightarrow -7 \notin [-2\pi; 2\pi]$

$6 \in [-2\pi; 2\pi]$

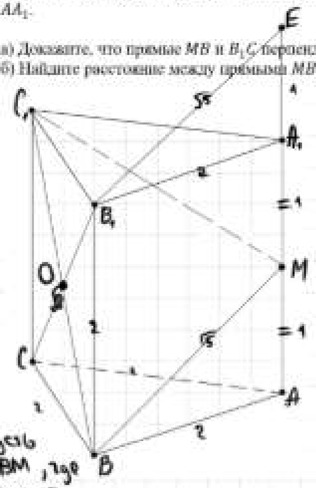
Ответ: а) $-7; 6$
б) 6

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 200525

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M — середина ребра AA_1.

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C.



а) ① Пусть $B_1E \parallel BM$, где $AA_1 \cap B_1E = E$

② $B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = \sqrt{8}$

$B_1E = \sqrt{A_1B_1^2 + A_1E^2} = \sqrt{5}$

$CE = \sqrt{AC^2 + AE^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

Заметим, что в $\triangle B_1CE$ вып. т. Пиф.

$\sqrt{13}^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{8}^2$

$\Rightarrow \angle CB_1E = 90°$

$\Rightarrow B_1E \perp B_1C$

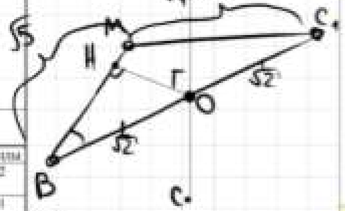
$BM \perp BC$ ■

б) ① Рассмотрим (BMC_1)

$B_1C \perp BM$ (см. пункт а)

$B_1C \perp BC_1$ (т.к. это диагонали кв-та)

$\Rightarrow B_1C \perp_{B_1} (BMC_1)$



OH — искомое расстояние

$\cos\angle B = \dfrac{5+8-5}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}} = \dfrac{8}{4\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

$\sin\angle B = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$\sin\angle B = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{OH}{OB}$

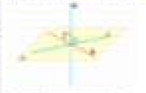
$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{OH}{\sqrt{2}}$ $OH = \sqrt{1{,}2}$

Ответ: $\sqrt{1{,}2}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Источники:

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

15 Решите неравенство

$$x\cdot\log_{x+3}(2x+7)\ge 0.$$

$x\cdot\dfrac{\log_{10}(2x+7)-0}{\log_{10}(x+3)-0}\ge 0$

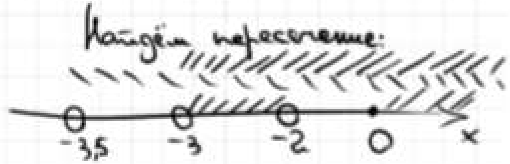
$x\cdot\dfrac{\log_{10}(2x+7)-\lg 1}{\log_{10}(x+3)-\lg 1}\ge 0$

В силу монотонного возрастания $y=\lg x$

$\begin{cases} \dfrac{x\cdot(\cancel{10-1})\cdot(2x+7-1)}{(\cancel{10-1})\cdot(x+3-1)}\ge 0 \\ 2x+7>0 \\ x+3>0 \\ x+3\ne 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -3,\ -2,\ 0 \\ x>-3{,}5 \\ x>-3 \\ x\ne -2 \end{cases}$

Найдём пересечение:



Ответ: $(-3;-2)\cup[0;+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

Источники:

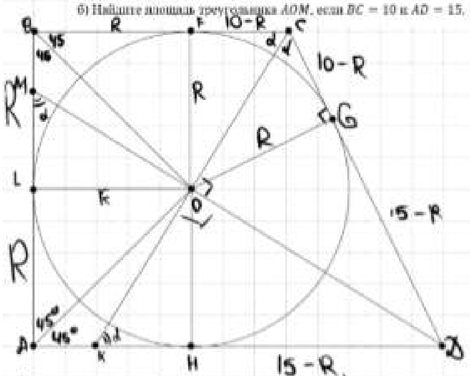
МЕТОД ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

16 В прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом при вершине A и острым углом при вершине D вписана окружность с центром O. Прямая DO пересекает сторону AB в точке M, а прямая CO пересекает сторону AD в точке K.

а) Докажите, что $\angle AMO = \angle DKO$.

б) Найдите площадь треугольника AOM, если $BC = 10$ и $AD = 15$.



а) ① CO и DO — биссектрисы одност. углов при пар. пр.

$\Rightarrow \angle COD = 90°$

$\Rightarrow \angle KOD = 90°$ (смежн)

② $\angle KDO = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$

③ $\angle AMD = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$

$\Rightarrow \angle AMO = \alpha = \angle DKO$ ■

б) ① $\angle OAM = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$

$\angle OBC = \frac{1}{2} \cdot 90 = 45°$

② $\triangle AOM = \triangle BOC$ по 2 пр.

$\left(\begin{array}{l} AO = BO \\ \angle AOM = \angle BOC \end{array} \right.$ и $\angle OAM = 45° = \angle CBO$)

③ $\triangle COD$:

$R^2 = (10-R)(15-R)$

$\cancel{R^2} = 150 - 10R - 15R + \cancel{R^2}$

$R = 6$

④ $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$

Источники:

Основная волна 2017

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

ВЫСОТА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

$h^2 = de$

Ответ: 30

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 78 030 рублей больше суммы взятого кредита.

Источники:

ФИПИ

[illegible]

Основная волна 2017

Досрочная волна 2018

Пусть S — сумма долга

март — месяц платежа

x — ежегодный платёж

Дата		Сумма долга
Июль	20	S
Янв	21	$1{,}3 \cdot S$
М	21	$1{,}3 \cdot S - x$
Я	22	$1{,}3^2 \cdot S - 1{,}3 \cdot x$
М	22	$1{,}3^2 \cdot S - 1{,}3 \cdot x - x$
Я	23	$1{,}3^3 \cdot S - 1{,}3^2 \cdot x - 1{,}3 \cdot x$
М	23	

$\begin{cases} ① \; 1{,}3^3 \cdot S - 1{,}3^2 \cdot x - 1{,}3 \cdot x - x = 0 \\ ② \; 3x - S = 78630 \end{cases}$

② $S = 3x - 78030$

$3x = S + 78030$

$x = \frac{1}{3} S + 26010$

① $\frac{13^3}{10^3} \cdot S = 1{,}69x + 1{,}3x + 1 \cdot x$

$\frac{13^3}{10^3} \cdot S = \frac{399}{100} \cdot x$

$\frac{13^3}{10^3} \cdot S = \frac{\overset{133}{\cancel{399}}}{100} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot S + \frac{399}{1\cancel{00}} \cdot 2601\cancel{0}$

$\frac{13^3}{10^3} \cdot S = \frac{133}{100} \cdot S + \frac{399 \cdot 2601}{10} \Big| \cdot 1000$

$13^3 \cdot S = 1330 \cdot S + 399 \cdot 2601 \cdot 100$

$2197 \cdot S - 1330 \cdot S = 399 \cdot 2601 \cdot 100$

$867 \cdot S = 399 \cdot 2601 \cdot 100$

$S = \frac{399 \cdot \overset{3}{\cancel{2601}} \cdot 100}{\cancel{867}} = 119700$

Ответ: 119 700

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условие выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи.

Здесь предполагается завершенное, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех шагов решения) или недостаточно полные обоснования.

Отметим, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по нашему мнению, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 200525

18 При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} 8x + (a^2 + ab + b^2)y = 4 \\ (a - b)x + 26y = 2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Источники: Интернет

$y = k \cdot x + b$

Уравнение прямых

Выразим y

$$\begin{cases} y = \dfrac{4 - 8x}{(a^2+ab+b^2)} \\ y = \dfrac{2 - (a-b)\cdot x}{26} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{-8}{(a^2+ab+b^2)}\cdot x + \dfrac{4}{(a^2+ab+b^2)} \\ y = \dfrac{(b-a)}{26}\cdot x + \dfrac{2}{26} \end{cases}$$

Система имеет беск. много реш., если прямые совпадают

$$\begin{cases} ① \ \dfrac{-8}{a^2+ab+b^2} = \dfrac{b-a}{26} \\ ② \ \dfrac{4}{a^2+ab+b^2} = \dfrac{1}{13} \end{cases}$$

② $a^2 + ab + b^2 = 52$

① $\dfrac{-8}{52} = \dfrac{b-a}{26}$

$b - a = -4$

$a = 4 + b$

$\boxed{b = a - 4}$

$a^2 + a\cdot(a-4) + (a-4)^2 = 52$

$a^2 + a^2 - 4a + a^2 - 8a + 16 = 52$

$3a^2 - 12a - 36 = 0 \quad |:3$

$a^2 - 4a - 12 = 0$

$a_1 = 6 \qquad a_2 = -2$

$b_1 = 2 \qquad b_2 = -6$

Взаимное расположение двух прямых

$y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$

1	Если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые совпадают. Пример: $y = 2x + 7$ и $y = 2x + 7$
2	Если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые параллельны. Пример: $y = 2x + 7$ и $y = 2x - 5$
3	Если $k_1 \neq k_2$, то прямые пересекаются. Пример: $y = 2x + 7$ и $y = 3x + 7$

Ответ: $(6;2)$; $(-2,-6)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Коля множил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число, и получил произведение, равное m. Вова умножил некоторое чётное натуральное число на соседнее чётное натуральное число и получил произведение, равное n.

а) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 6?
б) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 13?
в) Какие значения может принимать модуль разности чисел m и n?

Источники: Пробный ЕГЭ 2014

а) Коля — Вова

$1\cdot2 = 2 \qquad 2\cdot4 = 8$

$5\cdot6 = 30 \qquad 4\cdot6 = 24$

$6\cdot7 = 42 \qquad 6\cdot8 = 48$

б) Коля — Вова

$н\cdot7 = 7 \qquad 7\cdot7 = 2$

$|ч - ч| = 7$

$\Rightarrow |m - n| \neq 13$

в) ① Пусть Коля $a\cdot(a+1)$, Вова $a\cdot(a+2)$

$|a\cdot(a+2) - a\cdot(a+1)| = |a| = a$

② Может ли модуль разности $= 0$?

Коля — Вова

$x\cdot(x+1) = y\cdot(y+2)$

$x^2 + x = y^2 + 2y \quad |+1$

$\boxed{x^2 + x + 1 = (y+1)^2}$

Сравним x^2 и $(y+1)^2$

$x^2 < (y+1)^2$

$\boxed{x < y+1}$

$x^2 + x + 1 = (y+1)^2 \quad |+x$

$(x+1)^2 = (y+1)^2 + x$

$(x+1)^2 > (y+1)^2$

$x+1 > y+1$

$|y+1 < x+1|$

$x < y+1 < x+1$

Ответ:
а) Да, например Коля $1\cdot2=2$ Вова $2\cdot4=8$
б) нет
в) Все натуральные чётные

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4