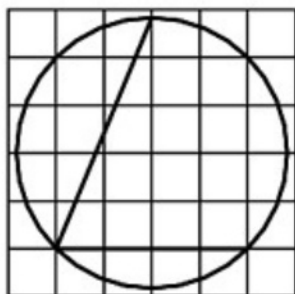




3. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображена окружность и вписанный в неё острый угол. Найдите градусную меру данного угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

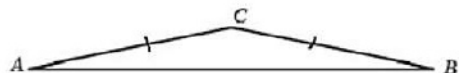
4. Из множества натуральных чисел от 20 до 39 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 4?

Ответ: \_\_\_\_\_.

5. Решите уравнение  $7^{3-x} = 49^x$ .

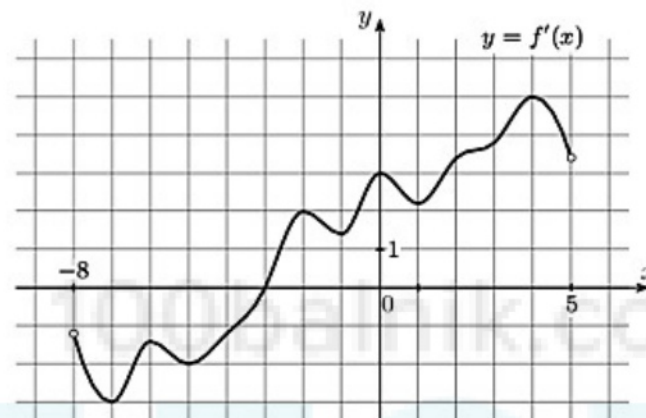
Ответ: \_\_\_\_\_.

6. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника равен  $150^\circ$ , найдите боковую сторону этого треугольника, если его площадь равна 36.



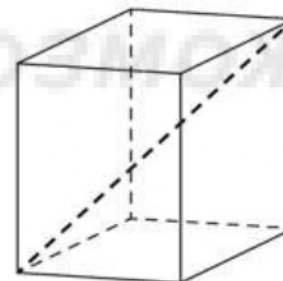
Ответ: \_\_\_\_\_.

7. На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 5)$ . В какой точке отрезка  $[-2; 1]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?



Ответ: \_\_\_\_\_.

8. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 2 и образует с плоскостью этой грани угол  $30^\circ$ . Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: \_\_\_\_\_.

*Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.*

**Часть 2.**

9. Найдите  $\log_a(a^4b^3)$ , если  $\log_a b = 8$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

10. При нормальном падении света с длиной волны  $\lambda = 400$  нм на дифракционную решётку с периодом  $d$  нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол  $\varphi$ , под которым наблюдается максимум, и номер максимума  $k$  связаны соотношением  $d \sin \varphi = k\lambda$ . Под каким наименьшим углом  $\varphi$  (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решётке с периодом 1600 нм?

Ответ: \_\_\_\_\_.

11. Плиточник должен уложить 240 м<sup>2</sup> плитки. Если он будет укладывать на 10 м<sup>2</sup> в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 4 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

Ответ: \_\_\_\_\_.

12. Найдите точку минимума функции  $y = 12x - x^3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

13. а) Решите уравнение  $\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 2 \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \sin x + \frac{1}{2} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .

14. Дана правильная четырехугольная пирамида  $SKLMN$ . На ребре  $SN$  выбрана точка  $B$  так, что  $BL \perp SN$ . Через прямую  $BL$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $KM$  и пересекающая боковые рёбра  $SK$  и  $SM$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $SN$ .

б) Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью основания пирамиды, если известно, что  $KL = 3\sqrt{2}$ , а высота пирамиды  $SH = 12$ .

15. Решите неравенство

$$3^{x-1} + \frac{14}{3x} - \frac{2 \cdot 3^{x-1}}{x} \leq \frac{7}{3}.$$

16. В прямоугольнике  $MNHK$  длины сторон  $MN$  и  $MK$  относятся как 1 : 7. На отрезке  $MK$  как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали  $NK$  и  $MH$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно.

а) Докажите, что прямые  $AB$  и  $MK$  параллельны.

б) Найдите площадь четырехугольника  $MABK$ , если  $MN = 2$ .

17. Борис Петрович пользуется банковским вкладом на следующих условиях: ежегодно 16 марта банк начисляет 20% на остаток и добавляет их к сумме вклада, 17 марта Борис Петрович может пополнить вклад на любую сумму или снять любую сумму с вклада, вплоть до полного его закрытия.

1 марта 2020 года сумма вклада Бориса Петровича составляла 55 тыс. рублей. Борис Петрович планирует следующие операции по вкладу:

– 17 марта 2020 года и 17 марта 2021 года пополнить вклад на некоторую сумму  $x$  тыс. рублей;

– 17 марта 2022 года и 17 марта 2023 года снять с вклада по 144 тыс. рублей, причем последняя операция должна закрыть вклад.

Найдите  $x$ .

18. Найдите все такие значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $27x^3 - 9(2a + 1)x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$  имеет ровно два различных действительных корня.

19. Юля любит все натуральные числа, которые делятся на 44, но не делятся на 18. А Гоше нравятся только те натуральные числа, цифры в десятичной записи которых не повторяются.

а) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 2 цифр?

б) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 6 цифр?

в) Из какого наибольшего количества цифр может состоять десятичная запись числа, которое нравится и Гоше, и Юле?

## Ключи к заданиям 2 варианта профильного экзамена

№ задания	Ответ
1	23,4
2	16
3	67,5
4	0,25
5	1
6	12
7	1
8	1,5
9	28
10	30
11	20
12	-2
13	а) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б) $-\frac{3\pi}{4}$
14	б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{4}$
15	$(-\infty; 0) \cup [\log_3 7; 2]$
16	26,8912
17	64 тыс. рублей
18	$a = -\frac{1}{4}$ ; $a = 0$ ; $a = \frac{3}{4}$
19	а) нет, б) да, в) 9



**Решения и критерии оценивания выполнения заданий 13—19**

13 а) Решить уравнение:  $\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 2 \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \sin x + \frac{1}{2} = 0$ ;

б) Найти корни данного уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .

Решение.

а)  $\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 2 \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \sin x + \frac{1}{2} = 0$ ;  $\cos^2 x + \sqrt{2} \cdot \sin x + \frac{1}{2} = 0$ ;

$$\sin^2 x - \sqrt{2} \sin x - \frac{3}{2} = 0; \begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \sin x = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

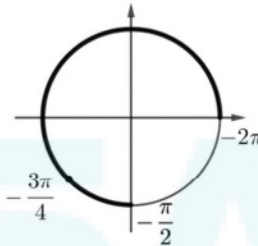
Из первого уравнения  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$  или  $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Второе уравнение не имеет решений, так как его правая часть больше 1.

б) Указанному промежутку принадлежит только одна точка:

$$-\frac{3\pi}{4}$$

Ответ: а)  $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{3\pi}{4}$ .



1/4

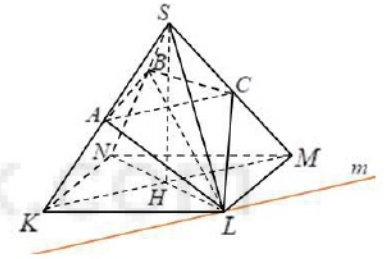
14. Дана правильная четырехугольная пирамида  $SKLMN$ . На ребре  $SN$  выбрана точка  $B$  так, что  $BL \perp SN$ . Через прямую  $BL$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $KM$  и пересекающая боковые рёбра  $SK$  и  $SM$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $SN$ .

б) Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью основания пирамиды, если известно, что  $KL = 3\sqrt{2}$ , а высота пирамиды  $SH = 12$ .

Решение

а) Имеем:  $KM \parallel (LAC)$  и  $(KSM) \cap (LAC) = AC$ , следовательно,  $AC \parallel KM$ . Пусть отрезок  $SH$  – высота пирамиды  $SKLMN$ . Тогда, поскольку данная пирамида правильная, точка  $H$  – точка пересечения диагоналей квадрата  $KLMN$ . Прямая  $NH$  – проекция прямой  $NS$  на плоскость  $KLM$  и  $NH \perp KM$ , значит, и  $NS \perp KM$ , а, следовательно,  $NS \perp AC$ . Таким образом,  $NS \perp BL$  и  $NS \perp AC$ , следовательно,  $NS \perp (LAC)$ , что и требовалось доказать.



б)  $KM \parallel AC$ , откуда  $AC \parallel (KLM)$ . Значит,  $(LAC) \cap (KLM) = m, m \parallel AC, L \in m$ . Так как  $LN \perp m$  и  $BL \perp m$ , то  $\angle BLN$  – линейный угол искомого двугранного угла. Прямоугольные треугольники  $NSH$  и  $NLB$  имеют общий угол  $N$ , следовательно, они подобны, а, значит,  $\angle BLN = \angle NSH = \beta$ .

Из прямоугольного треугольника  $SNH$  находим:  $\operatorname{tg} \beta = \frac{NH}{SH} = \frac{KL}{\sqrt{2}SH} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ .

Ответ: б)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{4}$ .

Критерии оценивания выполнения задания 13	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) и верно отобраны корни в пункте б)	2
Верно выполнен пункт а) ИЛИ Полученный в пунктах а) и б) ответ неверен в результате ОДНОЙ допущенной арифметической ошибки (описки), не повлиявшей принципиально на ход решения и не упростившей задачу ИЛИ Пункт а) доведен до верных простейших уравнений, которые решены с ошибкой. При этом конкретные решения простейших уравнений, необходимые для пункта б), отобраны верно, и, следовательно, ответ в пункте б) верен Замечание. Отбор корней может быть произведен любым способом: на единичной окружности, перебором значений $k$ и т.д., но обязательно показан!	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Критерии оценивания выполнения задания 14	Баллы
Имеется верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Имеется верное доказательство в пункте а) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) (даже в том случае, если учащийся опирался на невыполненное или выполненное неверно задание а) ИЛИ Имеется верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен ответ в пункте б), неверный из-за арифметической ошибки (описки)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

2/4

2/4

15. Решите неравенство:  $3^{x-1} + \frac{14}{3x} - \frac{2 \cdot 3^{x-1}}{x} \leq \frac{7}{3}$ .

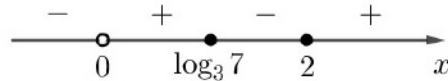
Решение.

$$3^{x-1} + \frac{14}{3x} - \frac{2 \cdot 3^{x-1}}{x} \leq \frac{7}{3}; \quad \frac{1}{3} \cdot 3^x - \frac{7}{3} + \frac{14}{3x} - \frac{2 \cdot 3^{x-1}}{3x} \leq 0;$$

$$(3^x - 7) \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{3x} \right) \leq 0; \quad \frac{(3^x - 7)(x - 2)}{3x} \leq 0.$$

Нули числителя:  $x = \log_3 7$  и  $x = 2$ . При этом  $\log_3 7 < \log_3 9 = 2$ .

Отметим на оси нули числителя и знаменателя и расставим знаки.



Таким образом,  $x \in (-\infty; 0) \cup [\log_3 7; 2]$ .

Ответ:  $(-\infty; 0) \cup [\log_3 7; 2]$

Критерии оценивания выполнения задания 15	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного потерей нулей числителя. Если в ответ включено значение $x = 0$ , то следует выставять оценку «0 баллов» ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16. В прямоугольнике  $MNHK$  длины сторон  $MN$  и  $MK$  относятся как 1 : 7. На отрезке  $MK$  как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали  $MN$  и  $NK$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно.

а) Докажите, что прямые  $AB$  и  $MK$  параллельны.

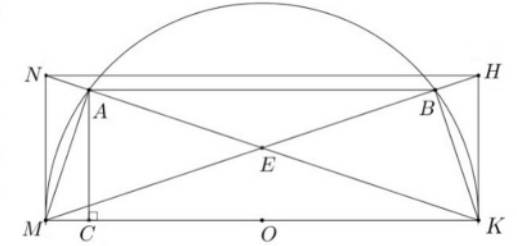
б) Найдите площадь четырехугольника  $MABK$ , если  $MN = 2$ .

Решение:

а) Точка  $E$  пересечения диагоналей прямоугольника находится внутри данного круга, так как расстояние от нее до центра окружности  $O$ , равно средней линии  $OE$  треугольника  $MNK$ , меньше радиуса окружности.

$$OE = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}MK = \frac{1}{14}MK < \frac{1}{2}MK.$$

Отрезки  $ME$  и  $KE$ , а, следовательно, и углы  $NKM$  и  $HMK$  равны, так как  $MNHK$  – прямоугольник, углы  $MAK$  и  $MBK$  равны по  $90^\circ$ , как вписанные, опирающиеся на диаметр окружности. Тогда треугольники  $AMK$  и  $BMK$  равны, так как имеют общую гипотенузу и равные острые углы. Тогда отрезки  $AE$  и  $BE$  равны, как разности равных отрезков.



Точки  $A$  и  $B$  делят отрезки  $EN$  и  $EH$  в равном отношении, значит, треугольники  $ABE$  и  $NHE$  подобны, так как имеют общий угол  $NEH$  и пропорциональные стороны. Тогда углы  $EAB$  и  $ENH$  равны, а, значит, прямые  $AB$  и  $NH$ , а, следовательно, и  $AB$  и  $NK$  параллельны.

б) Из треугольника  $MNK$  находим, что  $MK = 14, NK = \sqrt{MN^2 + MK^2} = 10\sqrt{2}, EN = EH = 5\sqrt{2}$ . По теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике  $\sqrt{AK \cdot NK} = MK$ , значит,  $AK = \frac{49\sqrt{2}}{5}$ , а  $AE = AK - EK = \frac{24\sqrt{2}}{5}$ . Из подобия треугольников  $ABE$  и  $NHE$  (см. пункт а) находим:

$$AB = \frac{AE}{NE} \cdot NH = \frac{24\sqrt{2}}{25\sqrt{2}} \cdot 14 = 13,44.$$

Четырехугольник  $MABK$  – трапеция (см. пункт а), ее высота  $AC$  может быть найдена из подобия треугольников  $AKC$  и  $NKM$ :

$$AC = \frac{AK}{NK} \cdot MN = \frac{49\sqrt{2}}{50\sqrt{2}} \cdot 2 = 1,96.$$

По формуле площади трапеции получим:

$$S_{MABK} = \frac{14 + 13,44}{2} \cdot 1,96 = 26,8912 = 26 \frac{557}{625}.$$

Ответ: 26,8912.

Возможно другое решение (без использования пункта а), б) Из треугольника  $MEK$ :

$$\sin \angle MEK = 2 \sin \angle MEO \cos \angle MEO = 2 \cdot \frac{MO}{ME} \cdot \frac{EO}{ME} = 2 \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} = 0,28.$$

$$S_{AMND} = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot AK \cdot \sin \angle AED = \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{5} \sqrt{2} \cdot \frac{49}{5} \sqrt{2} \cdot 0,28 = 26,8912.$$

Ответ: 26,8912.



3/4

Критерии оценивания выполнения задания 16	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Не доказано утверждения пункта а), но обоснованно получен верный ответ в пункте б) без использования утверждения пункта а) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а), получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно, либо обоснования содержат неточности.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при неверном доказательстве утверждения пункта а) и обоснованном решении пункта б) без использования утверждения пункта а) получен неверный ответ в результате арифметической ошибки (описки) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен или выполнен неверно ИЛИ получен верный ответ в пункте б), но решение недостаточно обоснованно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17. Борис Петрович пользуется банковским вкладом на следующих условиях: ежегодно 16 марта банк начисляет 20% на остаток и добавляет их к сумме вклада, 17 марта Борис Петрович может пополнить вклад на любую сумму или снять любую сумму с вклада, вплоть до полного его закрытия.

1 марта 2020 года сумма вклада Бориса Петровича составляла 55 тыс. рублей. Борис Петрович планирует следующие операции по вкладу:

– 17 марта 2020 года и 17 марта 2021 года пополнить вклад на некоторую сумму  $x$  тыс. рублей;

– 17 марта 2022 года и 17 марта 2023 года снять с вклада по 144 тыс. рублей, причем последняя операция должна закрыть вклад.

Найдите  $x$ .

**Решение.**

После совершения описанных в условии задачи операций по вкладу (начисление процентов, пополнение вклада, снятие средств с вклада), остатки на вкладе 17 марта 2020, 2021, 2022 и 2023 годов будут последовательно составлять:

$$55 \cdot 1,2 + x; (55 \cdot 1,2 + x) \cdot 1,2 + x; ((55 \cdot 1,2 + x) \cdot 1,2 + x) \cdot 1,2 - 144;$$

$$(((55 \cdot 1,2 + x) \cdot 1,2 + x) \cdot 1,2 - 144) \cdot 1,2 - 144.$$

Зная, что 17 марта 2023 года вклад планируется закрыть, составим уравнение:

$$(((55 \cdot 1,2 + x) \cdot 1,2 + x) \cdot 1,2 - 144) \cdot 1,2 - 144 = 0;$$

$$55 \cdot (1,2)^4 + x \cdot (1,2)^3 + x \cdot (1,2)^2 - 144 \cdot 1,2 - 144 = 0;$$

Разделим правую и левую части на 144:

$$0,55 \cdot 1,44 + x \cdot 0,012 + x \cdot 0,01 - 1,2 - 1 = 0;$$

$$0,022x = 1,408;$$

$$x = 64.$$

Ответ: 64 тыс. рублей.

Критерии оценивания выполнения задания 17	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верный ответ получен, но недостаточно обоснован ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	2
Верно построена математическая модель, но дальнейшее решение неверно или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18. Найдите все такие значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $27x^3 - 9(2a + 1)x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$  имеет ровно два различных действительных корня.

**Решение.**

Переписав уравнение в виде  $2a^2 - (18x^2 - 3x)a + 27x^3 - 9x^2 = 0$  и решив его относительно  $a$ , получаем  $a = \frac{3x}{2}$  или  $a = 9x^2 - 3x$ .

4/4

Первое из полученных уравнений при любом значении  $a$  имеет единственный корень  $x = \frac{2a}{3}$ .

Второе уравнение  $9x^2 - 3x - a = 0$  имеет два действительных корня, если его дискриминант  $9 + 36a > 0$ , т.е., при  $a > -\frac{1}{4}$ , ровно один корень при  $a = -\frac{1}{4}$  и не имеет действительных корней при  $a < -\frac{1}{4}$ . Таким образом, исходное уравнение имеет

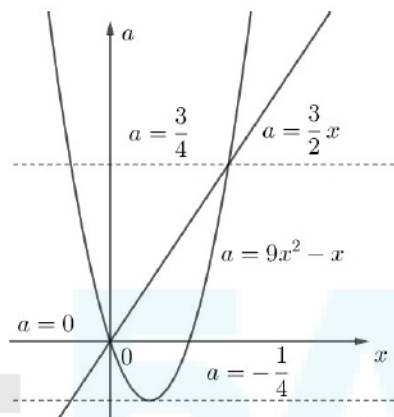
ровно два различных действительных корня в одном из двух случаев:

- 1) Число  $x = \frac{2a}{3}$  является одним из корней уравнения  $9x^2 - 3x - a = 0$ , т.е.,  $4a^2 - 2a - a = 0$ , откуда  $a = 0$  или  $a = \frac{3}{4}$ .
- 2) Уравнение  $9x^2 - 3x - a = 0$  имеет ровно один корень, отличный от числа  $\frac{2a}{3}$ .

В этом случае  $a = -\frac{1}{4}$ .

**Ответ:**  $a = -\frac{1}{4}$ ;  $a = 0$ ;  $a = \frac{3}{4}$ .

**Замечание.** Задача может быть решена и графоаналитическим способом (см. рисунок)



Критерии оценивания выполнения задания 18	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Выполнены все шаги решения, получен ответ, но решение недостаточно обосновано ИЛИ Выполнены все шаги решения, получен неверный ответ из-за одной арифметической ошибки или описки	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного отсутствием одного из значений $a = -\frac{1}{4}$ , $a = 0$ или $a = \frac{3}{4}$ .	2
Решение задачи сведено к исследованию квадратного уравнения, получено значение $a = -\frac{1}{4}$ или одно из значений $a = 0$ или $a = \frac{3}{4}$ . ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графиков функций $a = \frac{3x}{2}$ и $a = 9x^2 - 3x$ .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19. Юля любит все натуральные числа, которые делятся на 44, но не делятся на 18. А Гоше нравятся только те натуральные числа, цифры в десятичной записи которых не повторяются.

- а) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 2 цифр?
- б) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 6 цифр?
- в) Из какого наибольшего количества цифр может состоять десятичная запись числа, которое нравится и Гоше, и Юле?

**Решение.**

а) Так как искомое число делится на 44 и оно двузначное, то это либо 44, либо 88. В обоих этих числах цифры совпадают, а значит, они не нравятся Гоше. Значит, таких чисел не существует.

б) Да, например, 317548.

в) Так как цифры в искомом числе не повторяются, то их может быть не больше 10. Если их 10, то сумма цифр искомого числа равна 45, а значит, число делится на 9. С другой стороны, так как число нравится Юле, то оно делится на 44, а значит и на 2. Если число делится на 2 и на 9, то оно делится на 18, т.е., не нравится Юле – противоречие. Значит, в числе не более 9 цифр. Пример для 9 цифр: 980213564.

**Ответ:** а) нет, б) да, в) 9, пример: 980213564.

Критерии оценивания выполнения задания 19	Баллы
Верно получены все перечисленные результаты (см. критерий на 1 балл)	4
Верно получены три из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	3
Верно получены два из перечисленных результатов (см. критерий на 1 балл)	2
Верно получен один из перечисленных результатов: — обоснованное решение пункта а); — верный пример в пункте б); — доказательство, что запись данного числа не может состоять больше, чем из девяти цифр в пункте в); — верный пример числа, запись которого состоит из девяти цифр в пункте в).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4