Ответы и решения для варианта 33006762

1)

Разделим 87 на 8:

$$\frac{87}{8} = 10\frac{7}{8}.$$

Значит, Женя живет на 11 этаже.

Ответ: 11.

2) Из диаграммы видно, что наибольшая среднемесячная температура составляла 20 °С (см. рисунок). Ответ: 20.

3)

Площадь круга определяется по формуле $S = \pi r^2$. Т. к. из рисунка видно, что радиус внешнего круга в 2 раза больше внутреннего, значит, его площадь в 4 раза больше площади внутреннего круга и равна 136.

Площадь закрашенной фигуры равна разности площади внешнего круга и площади внутреннего и равна $136 - 34 = 102$.

4)

В среднем неисправны 18 из каждых 3000 насосов, поэтому вероятность случайно выбрать неисправный насос равна

$$\frac{18}{3000} = \frac{6}{1000} = 0{,}006.$$

Ответ: 0,006.

5)

Логарифмы двух выражений равны, если сами выражения равны и при этом положительны:

$$\log_4(x+3) = \log_4(4x-15) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 4x-15, \\ 4x-15 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ 4x > 15 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: 6.

6)

Площадь параллелограмма равна произведению его сторон на синус угла между ними. Площадь прямоугольника равна произведению длины на ширину. Пусть одна сторона параллелограмма и прямоугольника равна a, а вторая равна b, а острый угол параллелограмма равен α. Тогда площадь параллелограмма равна $S_1 = a \cdot b \cdot \sin\alpha$, а площадь прямоугольника равна $S_2 = a \cdot b$.

По условию площадь прямоугольника вдвое больше: $S_2 = 2S_1$. Следовательно,

$$a \cdot b = 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = 0{,}5 \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Ответ: 30.

7)

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A $(-2; -9)$, B $(-2; -3)$, C $(-5; -3)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB. Поэтому

$$y'(x_0) = \mathrm{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\mathrm{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Ответ: −2.

8)

Объем куба с ребром a равен $V = a^3$. Увеличение объема равно 19:

$$V - V_0 = (a+1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1 = 19.$$

Решим уравнение:

$$3a^2 + 3a + 1 = 19 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, \\ a = -3. \end{array}\right.$$

Тем самым, $a = 2$.

Ответ: 2.

9)

Способ 1: $\operatorname{tg}\alpha = 3 \Leftrightarrow \sin\alpha = 3\cos\alpha$. Тогда:

$$\frac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{3\cos\alpha - 12\cos\alpha}{6\cos\alpha - 5\cos\alpha} = -9.$$

Способ 2: разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$. Тогда:

$$\frac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{3 - 4tg\alpha}{2tg\alpha - 5} = \frac{3-12}{6-5} = -9.$$

Ответ: -9.

10)

Найдем, в какой момент времени после начала работы температура станет равной 1760 К. Задача сводится к решению неравенства $T(t) \le 1760$ при заданных значениях параметров a и b:

$$1400 + 200t - 10t^2 \le 1760 \Leftrightarrow t^2 - 20t + 36 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le 2; \\ t \ge 18. \end{array}\right.$$

Через 2 минуты после включения прибор нагреется до 1760 К, и при дальнейшем нагревании может испортиться. Таким образом, прибор нужно выключить через 2 минуты.

Ответ: 2.

11)

Скорость товарного поезда меньше, чем скорого на 750 м/мин или на

$$\frac{0,75\text{км}}{\frac{1}{60}\text{ч}} = 45\text{км/ч}.$$

Пусть v км/ч — скорость товарного поезда, тогда скорость скорого поезда $v + 45$ км/ч. На путь в 180 км товарный поезд тратит времени на 2 часа больше, чем скорый, отсюда имеем:

$$\frac{180}{v} = \frac{180}{v+45} + 2 \Leftrightarrow \frac{180}{v} = \frac{180 + 2v + 90}{v+45} \Leftrightarrow 180v + 180 \cdot 45 = 270v + 2v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2v^2 + 90v - 180 \cdot 45 = 0 \Leftrightarrow v^2 + 45v - 90 \cdot 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 45; \\ v = -90 \end{array}\right. \underset{v>0}{\Leftrightarrow} v = 45.$$

Ответ: 45.

12)

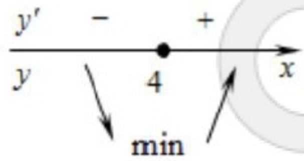
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (3-x)'e^{3-x} + (3-x)(e^{3-x})' = -e^{3-x} + (3-x)e^{3-x}(-1) = (x-4)e^{3-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x-4)e^{3-x} = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

13)

а) Запишем исходное уравнение в виде:

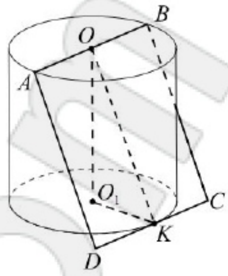
$$(3\log_8 x - 1)(2\log_8 x - 1) = 0.$$

Значит, $3\log_8 x = 1$, откуда $x = 2$, или $2\log_8 x = 1$, откуда $x = 2\sqrt{2}$.
б) Заметим, что $2 < 2,5 = \sqrt{6,25} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Значит, указанному отрезку принадлежит корень 2.

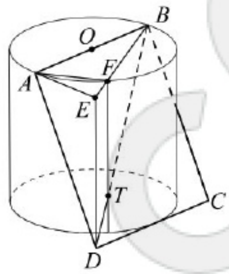
Ответ: а) 2 и $2\sqrt{2}$; б) 2.

14)

а) Пусть сторона CD прямоугольника касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр нижнего основания, а O — центр верхнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок O_1K перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трех перпендикулярах отрезок OK перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол $OKO_1 = 60°$ и $\cos\angle OKO_1 = \dfrac{O_1K}{OK} = \dfrac{r}{OK}$, где r — радиус цилиндра. При этом $\cos\angle OKO_1 = \dfrac{1}{2}$, поэтому $OK = AD = AB = 2r$, значит, $ABCD$ — квадрат.



б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\dfrac{DT}{TB} = \dfrac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр, $\dfrac{EF}{FB} = \dfrac{EF}{FA}\cdot\dfrac{FA}{FB} = \operatorname{tg}\angle EAF\cdot\operatorname{tg}\angle ABF = \operatorname{tg}^2\angle ABF = \left(\dfrac{EA}{AB}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$. Поэтому и $\dfrac{DT}{TB} = \dfrac{1}{4}$, т. е. $DT = \dfrac{1}{5}BD = \dfrac{1}{5}AD\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}r = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}\cdot\sqrt{2} = 0,8$.

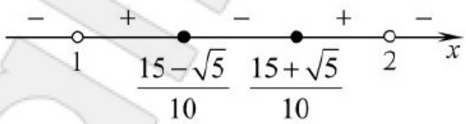


Ответ: 0,8.

15)

Используя метод интервалов, получаем:

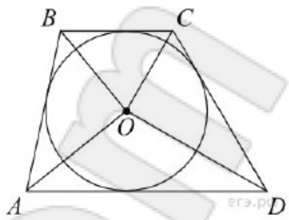
$$\frac{5x^2-15x+11}{(x-1)(2-x)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{5\left(x-\frac{15-\sqrt{5}}{10}\right)\left(x-\frac{15+\sqrt{5}}{10}\right)}{(x-1)(2-x)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1, \\ \dfrac{15-\sqrt{5}}{10} \le x \le \dfrac{15+\sqrt{5}}{10}, \\ x>2. \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup\left[\dfrac{15-\sqrt{5}}{10};\ \dfrac{15+\sqrt{5}}{10}\right]\cup(2;+\infty)$.

16)

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC. Сумма этих углов равна $180°$, поэтому сумма углов BAO и ABO равна $90°$. Аналогично, $\angle COD = 90°$. Тогда ##



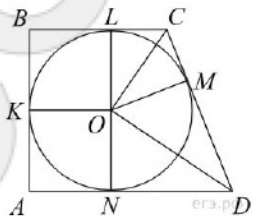
$$\angle AOD + \angle BOC = 360° - (\angle AOB + \angle COD) = 180°.$$

Следовательно, $\sin\angle AOD = \sin(180° - \angle BOC) = \sin\angle BOC$.

б) Окружность радиуса R, вписанная в прямоугольную трапецию $ABCD$, касается ее сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M и N соответственно. Тогда $AKON$ и $BKOL$ — квадраты, поэтому $BL = OL = R$, $AN = ON = R$. Значит,

$$CM = CL = BC - BL = 5 - R,\ DM = DN = AD - AN = 7 - R.$$

Биссектрисы углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, пересекаются под прямым углом, поэтому треугольник COD прямоугольный. Отрезок $OM = R$ — высота этого прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, поэтому $OM^2 = CM \cdot DM$, то есть $R^2 = (5-R)(7-R)$. Откуда находим, что $R = \frac{35}{12}$. Следовательно, площадь трапеции равна



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot 2R = 35.$$

Ответ: б) 35.

17)При удорожании коммунальных услуг на 100%, общая сумма увеличилась бы на 70%. А если бы электричество подорожало на 100%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 20%. Значит, в общем платеже на коммунальные услуги приходится 70%, а на электричество — 20%. Поэтому на телефон приходятся оставшиеся 10%.

18)

Левая часть исходного уравнения неотрицательна при любом допустимом значении x, поэтому при $a < 0$ корней нет.
Пусть $a \geq 0$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$$x + 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2a-x} + 2a - x = a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(2a-x)x} = a^2 - 2a, \\ 0 \leq x \leq 2a \end{cases}$$

Левая часть полученного уравнения неотрицательна при любом допустимом значении x, поэтому при $0 < a < 2$ корней нет.
При $a = 0$ уравнение $2\sqrt{-x^2} = 0$ имеет единственный корень $x = 0$.
При $a \geq 2$ получаем:

$$\begin{cases} 4(2a-x)x = a^4 - 4a^3 + 4a^2, \\ 0 \leq x \leq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 8ax + (a^4 - 4a^3 + 4a^2) = 0, \\ 0 \leq x \leq 2a. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения равен

$$64a^2 - 16(a^4 - 4a^3 + 4a^2) = 64a^3 - 16a^4,$$

значит, это уравнение имеет два корня при $0 < a < 4$. В этом случае корни квадратного уравнения $4x^2 - 8ax + (a^4 - 4a^3 + 4a^2) = 0$ равны

$$x_1 = a\left(1 - \frac{\sqrt{4a-a^2}}{2}\right),$$

$$x_2 = a\left(1 + \frac{\sqrt{4a-a^2}}{2}\right)$$

и всегда принадлежат отрезку $[0;\ 2a]$, поскольку

$$a^2 - 4a + 4 \geq 0;\ \frac{4a-a^2}{4} \leq 1;\ \frac{\sqrt{4a-a^2}}{2} \leq 1.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при $2 \leq a < 4$.

Ответ: $2 \leq a < 4$.

19)

Назовём результатом число, написанное на доске после 9 ходов.

а) Если на доске написаны числа

$$0{,}99;\ 0{,}01;\ 0{,}99;\ 0{,}01;\ 0{,}99;\ 0{,}01;\ 0{,}99;\ 0{,}01;\ 0{,}99;\ 0{,}01,$$

то при любой последовательности ходов результат равен 5 и равен сумме чисел.

б) Заметим, что за каждый ход вновь написанное число отличается от суммы стёртых не более чем на 0,5. Значит, результат будет отличаться от суммы исходных чисел не более чем на 4,5. Значит, не существует 10 чисел таких, что результат отличается от их суммы на 7.

в) Можем считать, что все числа меньше 1 и не меньше 0, поскольку целые части каждого из чисел при сложении не влияют на разницу между их суммой и её округлённым значением.

Каждое изначальное число участвует ровно в одном ходе. Если в этом ходе также участвовало целое число, не написанное на доске изначально, то назовём вкладом изначально числа в результат разность записанного после хода числа и стёртого целого числа. Если оба числа, участвовавших в ходе, были написаны на доске изначально, то назовём вкладом каждого из них в результат половину записанного после хода числа.

Заметим, что результат равен сумме вкладов изначальных чисел. С другой стороны, вклад каждого числа, меньшего 0,5, равен 0 или 0,5, а вклад каждого числа, не меньшего 0,5, равен 0,5 или 1.

Пусть n — количество чисел, не меньших 0,5.

Тогда сумма вкладов будет не меньше $\frac{n}{2}$ и не больше $\frac{10-n}{2}+n=\frac{n}{2}+5$.

То есть наибольшая разность двух различных результатов не превосходит 5.

Рассмотрим 10 чисел: два числа 0,5 и восемь чисел 0,4. Если вначале сложить два числа 0,5, а затем делать ходы с полученной единицей и числом 0,4, то результат будет равен 1. Если сделать четыре хода, попарно сложив числа 0,4, затем сложить четыре полученные единицы, а потом делать ходы с полученным числом и числом 0,5, то результат будет равен 6.

Таким образом, наибольшая возможная разность двух различных результатов равна 5.

Ответ: а) например, числа 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01 и любая последовательность ходов; б) нет; в) 5.