Ответы и решения для варианта 33006760

1)

В доме, в котором живет Маша, на девяти этажах каждого подъезда $9 \cdot 4 = 36$ квартир. Разделим 130 на 36:

$$\frac{130}{36} = \frac{65}{18} = 3\frac{11}{18}.$$

Значит, Маша живет в 4-м подъезде.

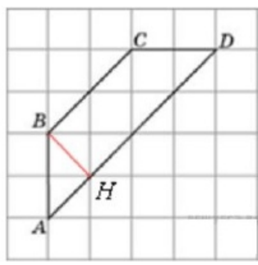
Ответ: 4.

2) Из графика видно, что наибольшей цена была 10 сентября (см. рисунок). Ответ: 10.

3)

По теореме Пифагора

$$BH = \sqrt{2+2} = 2.$$



Ответ: 2.

4)

Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий: A = батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или B = батарейка исправна, но по ошибке забракована. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Имеем:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,02 \cdot 0,99 + 0,98 \cdot 0,01 = 0,0198 + 0,0098 = 0,0296.$$

Ответ: 0,0296.

5)

Перейдем к одному основанию степени:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13} = 3 \Leftrightarrow (3^{-2})^{x-13} = 3^1 \Leftrightarrow 3^{-2x+26} = 3^1 \Leftrightarrow -2x+26 = 1 \Leftrightarrow x = 12,5.$$

Ответ: 12,5.

6)

Сумма углов n-угольника равна $180°(n - 2)$. Каждый из них равен $108°$, поэтому, с другой стороны, эта сумма равна $108°n$. Решим уравнение $180°(n - 2) = 108°n$. Получим $72°n = 360°$, откуда $n = 5$.

7)

Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна $1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 =$ **44**.

Ответ: 44.

8)

Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра основания на высоту боковой грани. Высота боковой грани у исходной призмы и отсеченной призм совпадает. Поэтому площади боковых граней относятся как периметры оснований. Треугольники в основании исходной и отсеченной призм подобны, все их стороны относятся как 1 : 2. Поэтому периметр основания отсеченной призмы вдвое меньше исходного. Следовательно, площадь боковой поверхности исходной призмы равна 16.

Ответ: 16.

9)

Выполним преобразования:

$$\frac{\log_3 5}{\log_3 7} + \log_7 0,2 = \log_7 5 + \log_7 0,2 = \log_7 1 = 0.$$

Ответ: 0.

10)

Найдем, при какой скорости длина ракеты станет равна 4 м. Задача сводится к решению уравнения $l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 4$ при заданном значении длины покоящейся ракеты $l_0 = 5$ м и известной величине скорости света $c = 3 \cdot 10^5$ км/с:

$$5\sqrt{1 - \frac{v^2}{9 \cdot 10^{10}}} = 4 \Leftrightarrow 1 - \frac{v^2}{9 \cdot 10^{10}} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \frac{v^2}{9 \cdot 10^{10}} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow v^2 = \frac{81}{25} \cdot 10^{10} \Leftrightarrow v = 180000 \text{ км/с}.$$

Если скорость будет превосходить найденную, то длина ракеты будет менее 4 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180 000 км/с.

Ответ: 180000.

11)

Рабочий выполняет 1/15 часть заказа в час, поэтому за 3 часа он выполнит 1/5 часть заказа. После этого к нему присоединяется второй рабочий, и, работая вместе, два рабочих должны выполнить 4/5 заказа. Чтобы определить время совместной работы, разделим этот объём работы на совместную производительность:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{2}=6 \text{ часов.}$$

Тем самым, на выполнение всего заказа потребуется 6 + 3 = 9 часов.

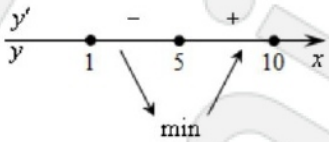
Ответ: 9.

12)

Найдем производную заданной функции:

$$y'=\left(\frac{x^2+25}{x}\right)'=\left(x+\frac{25}{x}\right)'=1-\frac{25}{x^2}=\frac{x^2-25}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 5 и -5. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет ее значение в точке 5. Найдем его:

$$y(5)=\frac{25+25}{5}=10.$$

13)

а) Используя формулу $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$, заменим выражение в скобках на $\cos x$, получаем однородное тригонометрическое уравнение первой степени:

$$\sin x+\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=0.$$

Если $\cos x=0$, то из уравнения следует $\sin x=0$, что невозможно в силу основного тригонометрического тождества. Значит, на множестве корней уравнения $\cos x\neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

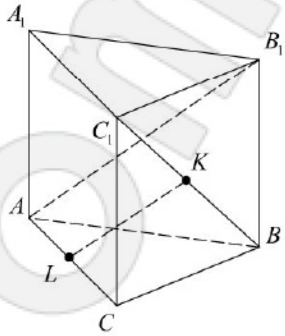
$$\operatorname{tg} x+1=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

б) Составим двойное неравенство: $\pi\leq-\frac{\pi}{4}+\pi k\leq\frac{5\pi}{2}$, откуда $\frac{5}{4}\leq k\leq 2\frac{3}{4}$. Следовательно, $k=2$. Поэтому на данном отрезке получаем единственный корень $-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

14)

а) Поскольку $CC_1 = C_1B_1 = B_1B = BC$ и $ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма, то CC_1B_1B — квадрат. Тогда K — точка пересечения диагоналей CC_1B_1B, так как делит одну из диагоналей на две равные части. Значит, $B_1K = KC$. Тогда KL — средняя линия треугольника AB_1C, поэтому $KL \parallel AB_1$.



б) Поскольку $KL \parallel AB_1$, необходимо найти угол LKB. По теореме Пифагора $AB_1 = C_1B = \sqrt{2}$. Тогда $BK = LK = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Высота LB правильного треугольника ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. По теореме косинусов $LB^2 = KL^2 + KB^2 - 2KL \cdot KB \cos LKB$, то есть $\cos LKB = \frac{1}{4}$.

Ответ: б) $\frac{1}{4}$.

15)

Данное неравенство можно записать в виде:

$$\lg^2\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}-\lg^2\frac{x+5}{20}<0.$$

Воспользовавшись формулой разности квадратов и преобразуя выражение $\lg\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}\pm\lg\frac{x+5}{20}$ по формулам суммы и разности логарифмов, получаем

$$\left(\lg\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}+\lg\frac{x+5}{20}\right)\left(\lg\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}-\lg\frac{x+5}{20}\right)<0$$

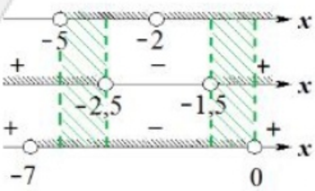
$$\begin{cases}x+5>0,\\ \lg\dfrac{(x+2)^2(x+5)^2}{100}\cdot\lg\left(4(x+2)^2\right)<0\end{cases}$$

Что равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}x+5>0\\ \lg\dfrac{(x+2)^2(x+5)^2}{100}<0,\\ \lg\left(4(x+2)^2\right)>0.\end{cases}(1)\qquad \begin{cases}x+5>0,\\ \lg\dfrac{(x+2)^2(x+5)^2}{100}>0,\\ \lg\left(4(x+2)^2\right)<0.\end{cases}(2)$$

Решим систему (1), произведя её равносильные преобразования:

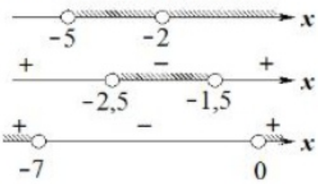
$$\begin{cases}x+5>0,\\ x\neq-2,\\ (2(x+2))^2>1,\\ \left(\dfrac{x^2+7x+10}{10}\right)^2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-5,\\ x\neq-2,\\ (2x+4-1)(2x+4+1)>0,\\ \left(\dfrac{x^2+7x+10}{10}-1\right)\left(\dfrac{x^2+7x+10}{10}+1\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>-5,\ x\neq-2,\\ (2x+3)(2x+5)>0,\\ (x^2+7x)(x^2+7x+20)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-5,\ x\neq-2,\\ (2x+3)(2x+5)>0,\\ x(x+7)<0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-5<x<-2,5,\\ -1,5<x<0.\end{array}\right.$$

Из приведённых выкладок легко усмотреть, что преобразованная аналогичным образом система (2), равносильна системе

$$\begin{cases}x>-5,\ x\neq-2,\\ (2x+3)(2x+5)<0,\\ (x+7)x>0,\end{cases}$$

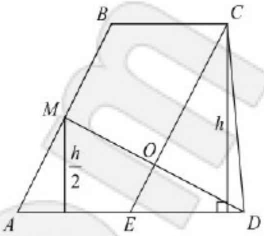


которая не имеет решений. Таким образом, ответ: $(-5;\ -2,5)\cup(-1,5;\ 0)$.

Ответ: $(-5;\ -2,5)\cup(-1,5;\ 0)$.

16)

а) Обозначим высоту трапеции через h (рис. 1). Тогда расстояние от точки M до прямой AD равно $\frac{h}{2}$. Значит,



$$S_{AMD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot AD = \frac{1}{2}\cdot h\cdot\frac{AD}{2} = S_{CED}.$$

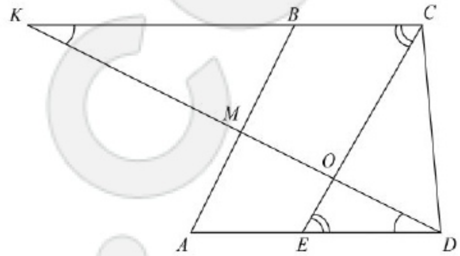
При этом

$$S_{AMD} = S_{AMOE} + S_{EOD},$$

$$S_{CED} = S_{COD} + S_{EOD},$$

поэтому $S_{AMOE} = S_{COD}$.

б) Пусть прямые BC и MD пересекаются в точке K (рис. 2). Тогда $\angle KBM = \angle MAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых KC и AD и секущей AB, $\angle BMK = \angle AMD$ как вертикальные, $AM = BM$. Значит, треугольники AMD и BMK равны, откуда $BK = AD = 4$.



Углы KOC и DOE равны как вертикальные, $\angle OED = \angle OCK$ как накрест лежащие при параллельных прямых KC и AD и секущей CE. Значит, треугольники KOC и DOE подобны по двум углам, откуда $\frac{OE}{OC} = \frac{ED}{CK} = \frac{2}{7}$. Следовательно,

$$S_{AMOE} = S_{COD} = \frac{7}{9}S_{CDE} = \frac{7}{9}\cdot h = \frac{2}{9}\cdot\frac{7h}{2} = \frac{2}{9}S_{ABCD}.$$

Ответ: б) $\frac{2}{9}$.

17)

Пусть x — количество перевозимых контейнеров типа А, y — количество контейнеров типа В, $x,\ y \in \mathbb{N}$. Тогда вес контейнеров типа А составит $2x$ т, типа В — $5y$ т. В соответствии с условием задачи $2x+5y \le 134$. Кроме того, должно выполняться условие: $y \ge \frac{5}{4}x$.

Пусть S — суммарная стоимость всех контейнеров. Тогда $S = 5x + 7y$. Нам предстоит исследовать функцию $S(x,\ y)$ на наибольшее значение при заданных условиях.

Имеем: $S = 5x+7y \Leftrightarrow x = \frac{S-7y}{5}$, значит,

$$\begin{cases} \frac{2(S-7y)}{5}+5y \le 134, \\ y \ge \frac{5(S-7y)}{4\cdot 5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S-14y+25y \le 670, \\ 4y \ge S-7y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y \le 670-2S, \\ 11y \ge S \end{cases} \Leftrightarrow \frac{S}{11} \le y \le \frac{670-2S}{11}.$$

Найдем, при каком значении y выполняется неравенство $\frac{S}{11} \le \frac{670-2S}{11}$.

$$3S \le 670 \Leftrightarrow S \le 223\frac{1}{3}.$$

Поскольку $x,\ y$, а также стоимости контейнеров — числа натуральные, то $S \in \mathbb{N}$. Значит, $S \le 223$.

Если $S = 223$, то $\frac{223}{11} \le y \le \frac{670-446}{11} \Leftrightarrow 20\frac{3}{11} \le y \le 20\frac{4}{11}$. Натуральных решений нет.

Если $S = 222$, то $\frac{222}{11} \le y \le \frac{670-444}{11} \Leftrightarrow 20\frac{2}{11} \le y \le 20\frac{6}{11}$. Натуральных решений нет.

Если $S = 221$, то $\frac{221}{11} \le y \le \frac{670-442}{11} \Leftrightarrow 20\frac{1}{11} \le y \le 20\frac{8}{11}$. Натуральных решений нет.

Если $S = 220$, то $\frac{220}{11} \le y \le \frac{670-440}{11} \Leftrightarrow 20 \le y \le 20\frac{10}{11}$. Натуральное решение: $y = 20$.

Вычислим значение x при $y = 20$. $x = \frac{220-140}{5} = 16 \in \mathbb{N}$.

Итак, искомое значение 220 млн. руб.

Ответ: 220 млн. руб.

18)

Заметим, что

$$y^2 - xy + 3x - y - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - (x+1)y + (3x-6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x-2, \\ y = 3. \end{array}\right.$$

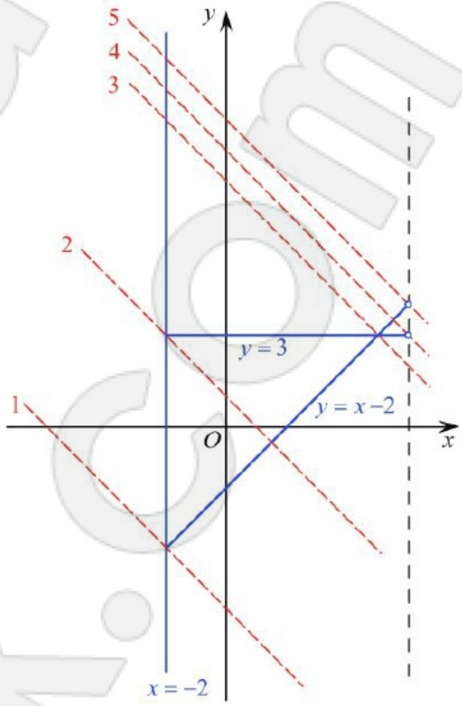
Поэтому исходная система равносильна смешанной системе

$$\begin{cases} -2 \le x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ y = 3, \\ y = x-2, \end{array}\right. \\ y = a - x. \end{cases}$$

Полученная смешанная система имеет ровно два решения в том и только в том случае, когда семейство прямых $y = a - x$ имеет с графиком системы

$$\begin{cases} -2 \le x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ y = 3, \\ y = x-2 \end{array}\right. \end{cases}$$

ровно две общие точки. Прямые соответствующие границам этих случаев пронумерованы на рисунке числами от 1 до 5. Нетрудно видеть, что этому соответствует следующий результат: $a \in (-6;\ 1] \cup \{8\} \cup [9;\ 10)$.



Ответ: $a \in (-6;\ 1] \cup \{8\} \cup [9;\ 10)$.

19)

а) Для выполнения условий задачи достаточно, чтобы произведение двух меньших чисел было больше 40, а произведение двух больших чисел было меньше 100. Пять чисел 6, 7, 8, 9, 10 удовлетворяют условию задачи.

б) Пусть числа на доске записаны в порядке возрастания: $a < b < c < d < e < f$. Заметим, что $b \ge 7$, $e \le 9$, иначе произведение ab будет меньше 40, а произведение ef будет больше 100. Другими словами, на доске может быть только одно число $a < 7$ и только одно число $f > 10$. Но тогда четырьмя различными числами b, c, d, e должны быть три числа 7, 8 и 9, что невозможно.

в) Пусть на доске написаны числа a, b, c и d, причём $a < b < c < d$. Как было показано в предыдущем пункте, соседние с крайними числа подчиняются условию $7 \le b < c \le 9$. Следовательно, возможны только три случая.

Если записаны числа a, 7, 8, d, то наибольшие возможные числа $a = 6$, $d = 12$. Сумма четырех записанных чисел равна 33.

Если записаны числа a, 7, 9, d, то $a = 6$, $d = 11$, сумма 33.

Если записаны числа a, 8, 9, d, то $a = 7$, $d = 11$, сумма 35.

Таким образом, наибольшее значение суммы четырех чисел равно 35.

Ответ: а) да; б) нет; в) 35.