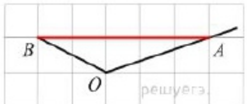
Ответы и решения для варианта 33006750

1)Средняя скорость бегуна 50 : 5 = 10 м/с. Переводим метры в секунду в километры в час: 1 м/с = 60 м/мин = 3600 м/ч = 3,6 км/ч. Поэтому 10 м/с = 36 км/ч. Ответ: 36.

2) Ответ: 4

3)



Достроим угол до треугольника BOA. Из рисунка находим: $OA=\sqrt{10}$, $OB=\sqrt{5}$, $AB=5$. Воспользуемся теоремой косинусов:

$$AB^2=OB^2+OA^2-2OB\cdot OA\cdot\cos AOB.$$

Тогда:

$$\cos AOB=\frac{OB^2+OA^2-AB^2}{2OB\cdot OA}=\frac{5+10-25}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поэтому угол AOB равен 135°, а его тангенс равен −1.

Ответ: −1.

4)

Найдем вероятность противоположного события, состоящего в том, что цель не будет уничтожена за n выстрелов. Вероятность промахнуться при первом выстреле равна 0,6, а при каждом следующем — 0,4. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятности этих событий. Поэтому вероятность промахнуться при n выстрелах равна: $0,6\cdot 0,4^{n-1}$.

Осталось найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$0,6\cdot 0,4^{n-1}<0,02\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}<\frac{1}{30}.$$

Последовательно проверяя значения n, равные 1, 2, 3 и т. д. находим, что искомым решением является $n=5$. Следовательно, необходимо сделать 5 выстрелов.

Ответ: 5.

5)

Последовательно получаем:

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(x-7)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n \Leftrightarrow x-7=\pm 1+6n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8+6n; \\ x=6+6n,\ n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Значениям $n \geq 0$ соответствуют положительные корни.
Если $n=-1$, то $x=2$ и $x=0$.
Если $n=-2$, то $x=8-12=-4$ и $x=6-12=-6$.
Значениям $n \leq -3$ соответствуют меньшие значения корней.
Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -4.

Ответ: −4.

6)

Имеем:

$$AH=AC\cos A=AB\cos^2 A=AB\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 A}=13\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{25}}=13\cdot\frac{25}{26}=12,5.$$

Ответ: 12,5.

7)

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y=-2x-11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны –2. Найдем количество точек, в которых $f'(x)=-2$, это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой $y=-2$. На данном интервале таких точек 5.

Ответ: 5.

8)

Искомый объем равен разности объемов параллелепипеда и четырех пирамид, основания которых являются гранями данной треугольной пирамиды. Объём каждой из этих пирамид равен одной трети произведения площади основания на высоту, а площадь основания вдвое меньше площади основания параллелепипеда:

$$V_{\text{пир}} = V_{\text{пар}} - 4\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot V_{\text{пар}}\right) = \frac{1}{3}V_{\text{пар}} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

9)

Выполним преобразования:

$$p(x) + p(6-x) = \frac{x(6-x)}{x-3} + \frac{(6-x)(x)}{3-x} = 0.$$

Ответ: 0.

10)

Задача сводится к решению уравнения $l(t^\circ) - l_0 = 3$ мм при заданных значениях длины $l_0 = 10$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}$ $(^\circ\mathrm{C})^{-1}$:

$$l(t^\circ) - l_0 = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0(1+\alpha\cdot t^\circ) - l_0 = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow l_0\alpha t^\circ = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5} t^\circ = 3\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow t^\circ = \frac{3\cdot 10^{-3}}{1{,}2\cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow t^\circ = 25\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Ответ: 25.

11)

Пусть v км/ч – скорость третьего велосипедиста, а t ч – время, которое понадобилось ему, чтобы догнать второго велосипедиста. Таким образом,

$$vt = 10\cdot(t+1) \Leftrightarrow v = \frac{10\cdot(t+1)}{t}.$$

А через 2 часа 20 минут после этого догнал первого. Таким образом,

$$v\cdot\left(t+\frac{7}{3}\right) = 15\cdot\left(t+\frac{7}{3}+2\right) \Leftrightarrow \frac{10\cdot(t+1)\cdot(3t+7)}{3t} = \frac{15}{3}\cdot(3t+13) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6t^2+20t+14 = 9t^2+39t \Leftrightarrow 3t^2+19t-14=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-19+\sqrt{19^2+4\cdot3\cdot14}}{6} = \dfrac{2}{3}; \\ t = \dfrac{-19-\sqrt{19^2+4\cdot3\cdot14}}{6} = -7 \end{array}\right. \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, $v = \dfrac{10\cdot\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = 25.$

Ответ: 25.

12)

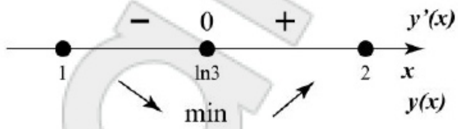
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2e^{2x} - 6e^x = 2e^x(e^x-3).$$

Найдем нули производной:

$$2e^x(e^x-3) = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3.$$

Отметим на рисунке нули производной и поведение функции на заданном отрезке:



Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является ее значение в точке минимума. Найдем его:

$$y(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 6e^{\ln 3} + 3 = 3^2 - 6\cdot 3 + 3 = -6.$$

Ответ: −6.

13)

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin 4\pi x\cos 4\pi x+1=\cos 4\pi x+\sqrt{2}(\cos 4\pi x\cos\frac{\pi}{4}+\sin 4\pi x\sin\frac{\pi}{4})$$

$$2\sin 4\pi x\cos 4\pi x+1-2\cos 4\pi x-\sin 4\pi x=0$$

$$2\cos 4\pi x(\sin 4\pi x-1)-(\sin 4\pi x-1)=0$$

$$(2\cos 4\pi x-1)(\sin 4\pi x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos 4\pi x=1\\ \sin 4\pi x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\pi x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ 4\pi x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{1}{12}+\frac{n}{2}, n\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{1}{8}+\frac{k}{2}, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Ограничим каждое полученное решение из пункта «а» и решим эти неравенства:
1)

$$2-\sqrt{7}\le\frac{1}{12}+\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-2$$
$$\frac{23}{12}-\sqrt{7}\le\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-\frac{25}{12}$$

$$\frac{23}{6}-2\sqrt{7}\le n\le 2\sqrt{7}-\frac{25}{6}\Rightarrow n=-1,0,1\Rightarrow x=\frac{-5}{12},\frac{1}{12},\frac{7}{12}$$

2)

$$2-\sqrt{7}\le-\frac{1}{12}+\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-2$$
$$\frac{25}{12}-\sqrt{7}\le\frac{n}{2}\le\sqrt{7}-\frac{23}{12}$$
$$\frac{25}{6}-2\sqrt{7}\le n\le 2\sqrt{7}-\frac{23}{6}\Rightarrow n=-1,0,1\Rightarrow x=-\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{5}{12}$$

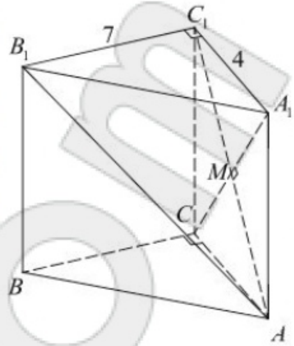
3)

$$2-\sqrt{7}\le\frac{1}{8}+\frac{k}{2}\le\sqrt{7}-2$$
$$1.875-\sqrt{7}\le\frac{k}{2}\le\sqrt{7}-2.125$$
$$3.75-2\sqrt{7}\le k\le 2\sqrt{7}-4.25\Rightarrow k=-1,0,1\Rightarrow x=-\frac{3}{8},\frac{1}{8},\frac{5}{8}$$

Ответ: а) $\{x=\pm\frac{1}{12}+\frac{n}{2}, x=\frac{1}{8}+\frac{k}{2} : n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}\}$, б) $\pm\frac{5}{12},\pm\frac{1}{12},\pm\frac{7}{12},-\frac{3}{8},\frac{1}{8},\frac{5}{8}$.

14)

а) Заметим, что $B_1C_1 \perp C_1A_1$ как катеты прямоугольного треугольника, и $B_1C_1 \perp C_1C$, поскольку призма прямая. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $B_1C_1 \perp (ACA_1)$. Кроме того, $A_1C \perp C_1A$ как диагонали квадрата.



Имеем: B_1A − наклонная, AC_1 − проекция на плоскость ACA_1, A_1C − прямая в плоскости ACA_1, перпендикулярная проекции. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $AB_1 \perp CA_1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть M − середина AC_1. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки M до прямой AB_1, поскольку прямая A_1C перпендикулярна AB_1C_1. Это расстояние равно половине высоты прямоугольного треугольника AB_1C_1, проведённой к гипотенузе:

$$\frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{2AB_1} = \frac{\sqrt{2}AC \cdot BC}{2\sqrt{2AC^2+BC^2}} = \frac{14\sqrt{2}}{9}.$$

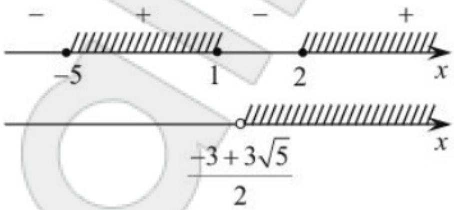
Ответ: б) $\frac{14\sqrt{2}}{9}$.

15)

Решим неравенство:

$$\log_3\frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3\left(x^2+3x+\frac{1}{x}-10\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2+3x-9) \le \log_3(x^3+3x^2+1-10x), \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

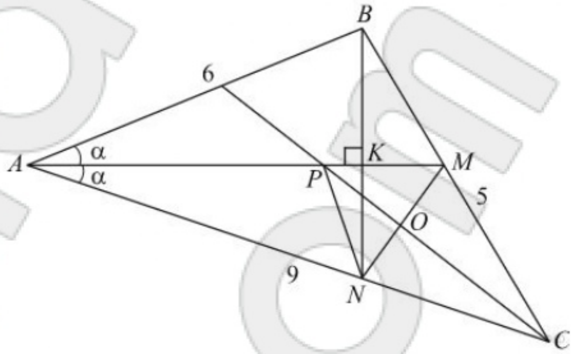
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-9 \le x^3+3x^2+1-10x, \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}, \\ x > \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}, \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2x^2-13x+10 \ge 0, \\ x > \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+3x-10) \ge 0, \\ x > \dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$$



Ответ: $[2; +\infty)$.

16)

а) Обозначим K точку пересечения отрезков AM и BN. Треугольник ABN равнобедренный, так как в нем AK является биссектрисой и высотой. Следовательно, AK является и медианой, то есть K — середина BN. Получаем, что $AN = AB = 6$, откуда $NC = AC - AN = 3$.



Рассмотрим треугольник ABC, биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $BM : MC = AB : AC$, учитывая, что длина BC равна 5, получаем: $BM = 2$; $MC = 3$.

В треугольнике MNC стороны NC и MC равны, следовательно, треугольник MNC — равнобедренный, с основанием MN. Значит, биссектриса угла C также является медианой и высотой. Таким образом, получаем, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

б) Рассмотрим треугольник PMN: отрезок PO перпендикулярен прямой MN и делит её пополам, следовательно, треугольник PMN — равнобедренный с основанием MN. Значит, $PM = PN$ и отношение $AP : PN = AP : PM$.

В треугольнике AMC отрезок CP — биссектриса, поэтому $AP : PM = AC : MC = 3 : 1$.

Ответ: 3 : 1.

17)

Пусть сумма кредита S у.е., процентная ставка банка x %.

Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину» означает: Антон взятую сумму возвращал в банк равными долями. Сумма, образованная применением процентной ставки, составляет:

$$0,01xS+0,01x\cdot\frac{5S}{6}+0,01x\cdot\frac{4S}{6}+\ldots+0,01x\cdot\frac{2S}{6}+0,01x\cdot\frac{S}{6}=0,01Sx\cdot\left(1+\frac{5}{6}+\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=$$

$$=0,01Sx\cdot\frac{1+\frac{1}{6}}{2}\cdot 6=0,01Sx\cdot\frac{6+1}{2}=0,035Sx. \text{ (у.е.)}$$

Общая сумма, выплаченная Антоном за 6 месяцев: $S+0,035Sx=(1+0,035x)\cdot S$ (у.е.). А эта сумма по условию задачи равна $1,63S$ у.е. Решим уравнение:

$$(1+0,035x)S=1,63S \Leftrightarrow 1+0,035x=1,63 \Leftrightarrow 0,035x=0,63 \Leftrightarrow x=18.$$

Ответ: 18.

18)

Заметим, что на области определения системы уравнений справедлива равносильность

$$\begin{cases} A\cdot B=0, \\ A\cdot C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0, \\ \begin{cases} B=0, \\ C=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда при условии существования логарифма $x^2+y^2<9$ имеем два случая:

$$(x+5)^2+y^2=a^2 \ (1) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+y^2=8, \\ y=-x+(a-5). \end{cases} \ (2)$$

Изобразим графики полученных уравнений и область определения — внутреннюю часть круга ω радиуса 3 с центром в начале координат (см. рис.) в одной системе координат. Определим, при каких значениях параметра уравнение (1) и система (2) совместно имеют ровно два решения, лежащие в области ω.

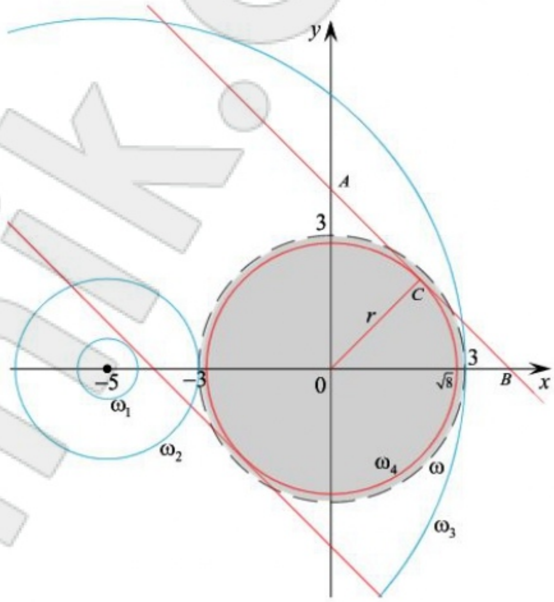
Рассмотрим уравнение (1). При $a=0$ уравнение $(x+5)^2+y^2=a^2$ имеет одно решение — пару $(-5;\ 0)$; точка $(-5;\ 0)$ не лежит в ω. При прочих значениях параметра уравнение имеет бесконечно много решений. Чтобы исходная система могла иметь ровно два решения, решения уравнения (1) должны лежать вне области определения системы: радиус окружности должен быть таким, что ни одна из ее точек не попадала в область ω. Находим (см. рис.): $|a|\le 2$ или $|a|\ge 8$.

Рассмотрим систему (2). Окружность, задаваемая первым уравнением, может иметь с прямой, задаваемой вторым уравнением, 0, 1 или 2 общие точки. Определим, какие значения параметра соответствуют касанию. Из равнобедренного прямоугольного треугольника AOC найдем

$$r=OC=AO\cdot\sin 45^\circ=\frac{|a-5|}{\sqrt{2}}=\sqrt{8},$$

откуда $a=1$ или $a=9$. Следовательно, при $1<a<9$ система имеет два решения. Оба они лежат в области ω.

Тем самым, при $(1;\ 2]\cup[8;\ 9)$ исходная система уравнений имеет ровно два решения.



Ответ: $(1;\ 2]\cup[8;\ 9)$.

19)

Пусть данное число равно $100a+10b+c$, где a, b и c — цифры сотен, десятков и единиц соответственно. Если частное этого числа и суммы его цифр равно k, то выполнено $100a+10b+c=ka+kb+kc$.

а) Если частное равно 90, то $100a+10b+c=90a+90b+90c$; $10a=80b+89c$, что верно, например, при $c=0$, $b=1$, $a=8$: частное числа 810 и суммы его цифр равно 90.

б) Если частное равно 88, то $100a+10b+c=88a+88b+88c \Leftrightarrow 12a=78b+87c$. Получаем: $a<10 \Leftrightarrow 12a<120 \Leftrightarrow 78b+87c<120$. Значит, $b=0, c=1$ или $b=1, c=0$. Но ни 78, ни 87 не делится на 12. Значит, частное трёхзначного числа и суммы его цифр не может быть равным 88.

в) Пусть k — наибольшее натуральное значение частного числа, не кратного 100, и суммы его цифр. Тогда

$$100a+10b+c=ka+kb+kc \Leftrightarrow (100-k)\,a=(k-10)\,b+(k-1)\,c.$$

Учитывая, что $b+c>0$, получаем:

$$9\,(100-k)\ge(100-k)\,a=(k-10)\,b+(k-1)\,c\ge(k-10)\,(b+c)\ge k-10,$$

откуда $9(100-k)\ge k-10 \Leftrightarrow 10k\le 910 \Leftrightarrow k\le 91$.

Частное числа 910 и суммы его цифр равно 91. Значит, наибольшее натуральное значение частного трёхзначного числа, не кратного 100, и суммы его цифр равно 91.

Ответ: а) да; б) нет; в) 91.