Ответы и решения для варианта 33006751

1)

Пусть заработная плата Марии Константиновны составляет x рублей. Тогда

$$x - 0{,}13x = 9570 \Leftrightarrow 0{,}87x = 9570 \Leftrightarrow x = 9570 : 0{,}87 \Leftrightarrow x = 11\,000.$$

Значит, зарплата Марии Константиновны составляет 11 000 рублей.

Ответ: 11 000.

2) Из рисунка видно, что наибольшая аудитория − 3 450 000 посетителей сайт − была октябре, а наименьшая в мае — 2 800 000 посетителей. Найдем разность: 3 450 000 − 2 800 000 = 650 000 посетителей. Ответ: 650 000.

3)Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую. Тем самым, искомое расстояние равно 4. Ответ: 4.

4)По результатам первой жеребьёвки команда «Барселона» находится в одной из 8 групп. Вероятность того, что команда «Зенит» окажется в той же игровой группе равна одной восьмой. Ответ: 0,125.

5)

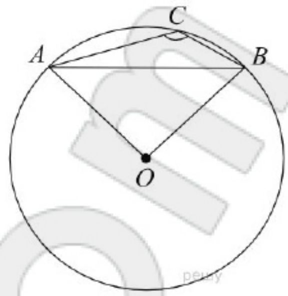
Извлекая кубический корень из обеих частей уравнения, получаем $x - 1 = -2$, откуда $x = -1$.

Ответ: -1.

6)

Применим теорему синусов к треугольнику ABC:

$$AB = 2R\sin C = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$



Ответ: 3.

Приведём другое решение.

Вписанный угол дополняет половину центрального угла, опирающегося на ту же хорду, до 180°, значит, $\angle AOB = 2(180^\circ - 120^\circ) = 120^\circ$. По теореме косинусов:

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2 - 2AO\cdot OB\cos\angle AOB} = \sqrt{3+3+6\cdot\frac{1}{2}} = 3.$$

7)

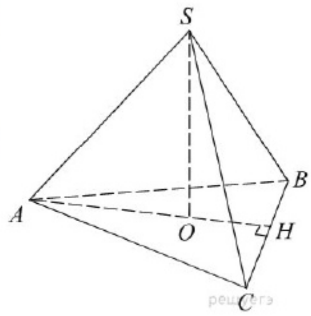
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 7x - 5$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y' = 7$:

$$(x^2 + 6x - 8)' = 7 \Leftrightarrow 2x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

8)

Введём обозначения, как показано на рисунке. Выразим длину стороны AC через длину боковой стороны AS. Высота правильного треугольника выражается через его сторону: $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$. Точкой O высота AH делится в отношении 2 : 1, поэтому $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{\sqrt{3}}{3}AC$, $OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{6}AC$. Угол SHO равен углу между боковой гранью и плоскостью основания. Из прямоугольного треугольника SOH :



$$SO = OH\,\mathrm{tg}\angle SHO = \frac{1\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{11}}{4}AC = \frac{\sqrt{33}}{24}AC.$$

Из прямоугольного треугольника AOS по теореме Пифагора:

$$AS = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\frac{1}{3}AC^2 + \frac{11}{192}AC^2} = AC\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{11}{192}} = AC\sqrt{\frac{64+11}{192}} = AC\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}AC.$$

Откуда $AC = \frac{8}{5}AS = 8.$

Ответ: 8.

9)

Поскольку $p(x) = x - 3$ имеем: $p(x-7) = x - 7 - 3 = x - 10, p(2x) = 2x - 3,$. Тогда

$$2p(x-7) - p(2x) = 2(x-10) - (2x-3) = -17.$$

Ответ: -17.

10)

Задача сводится к решению неравенства $P(v) \geq 0$ при заданной длине верёвки $L = 0,4$ м:

$$P \geq 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{v^2}{L} - g\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{v^2}{0{,}4} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow v^2 \geq 4 \Leftrightarrow v \geq 2 \text{ м/с}.$$

Ответ: 2.

11)

Пусть x (км/ч) — собственная скорость катера, y (км/ч) — скорость течения реки весной. Тогда летом она составит $y - 1$ (км/ч); $x > y > 1$. Составим таблицу по данным задачи:

	Весна	Лето
По течению	$x+y$	$x+y-1$
Против течения	$x-y$	$x-y+1$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{x+y-1}{x-y+1} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y) = 5(x-y), \\ 2(x+y-1) = 3(x-y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y, \\ x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 5. \end{cases}$$

Таким образом, скорость течения весной равна 5 км/ч.

Ответ: 5.

12)

Выделим полный квадрат:

$$y=\sqrt{x^2-6x+13}=\sqrt{(x-3)^2+4}.$$

Отсюда имеем:

$$y=\sqrt{(x-3)^2+4}\geq\sqrt{4}=2.$$

Поэтому наименьшее значние функции достигается в точке 3, и оно равно 2.

Ответ: 2.

13)

а) Сделаем замену переменной: $y=\sqrt{x-4}$. Получаем $y^2=x-4$ или $x=y^2+4$. Тогда:

$$\sqrt{y^2+4y+4}+\sqrt{y^2-4y+4}=4\Leftrightarrow|y+2|+|y-2|=4.$$

Заметим, что $y\geq 0$ и поэтому, $y+2>0$, получаем:

$$y+2+|y-2|=4\Leftrightarrow|y-2|=2-y.$$

Равенство $|a|=-a$ верно только для неположительных значений a. Поэтому $y-2\leq 0$, откуда

$$\sqrt{x-4}\leq 2\Leftrightarrow 4\leq x\leq 8.$$

б) В силу цепочки неравенств $4=3+1=\sqrt{9}+1<\sqrt{12}+1=2\sqrt{3}+1<\sqrt{49}+1=8<10$ из всех решений уравнения на отрезке $[2\sqrt{3}+1;\,10]$ лежат только решения $[2\sqrt{3}+1;\,8]$.

Ответ: а) $[4;\ 8]$ б) $[2\sqrt{3}+1;8]$.

14)

а) Проведём KE — среднюю линию треугольника $BB'D'$. E — середина $B'D'$, следовательно, точка пересечения диагоналей верхнего основания и сечение содержит диагональ $A'C'$. Треугольник $A'C'K$ является искомым сечением по признаку параллельности прямой и плоскости.

Прямоугольные треугольники $A'B'K$ и $C'B'K$ равны по двум катетам, поэтому $A'K=C'K$, следовательно, треугольник $A'C'K$ — равнобедренный.

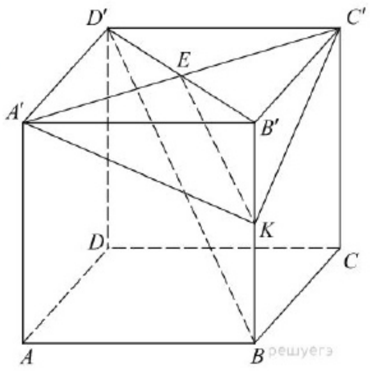
б) Далее имеем:

$$B'K=\frac{1}{2}\cdot BB_1=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7}=\sqrt{7},$$

$$A'K=C'K=\sqrt{B'K^2+B'C_1^2}=\sqrt{\sqrt{7}^2+(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{7+18}=5,$$

$$A'C'=\sqrt{A'B'^2+B'C'^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{18+18}=6,$$

$$P_{A'KC'}=5+5+6=16.$$



Ответ: б) 16.

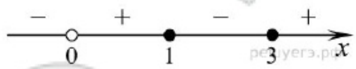
15)

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 5-x \geq 0, \\ 5-x \neq 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2-6x+9}=1$, т. е. $|x-3|=1$ и, значит, $x=2$ или $x=4$. Тем самым, $x=2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2-6x+9} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$, получим: $x+\dfrac{3}{x} \geq 4$, откуда $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$.



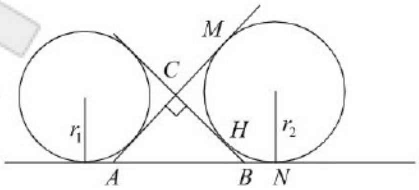
Решим это неравенство, получим: $0 < x \leq 1$ или $x \geq 3$.

Учитывая ограничения, получаем множество решений исходного неравенства: $(0;\ 1] \cup \{2\} \cup [3;\ 4) \cup (4;\ 5]$.

Ответ: $(0;\ 1] \cup \{2\} \cup [3;\ 4) \cup (4;\ 5]$.

16)

а) Введём обозначения, как показано на рисунке, пусть M, H, N — точки касания. Касательные, проведённые к окружности из одной точки равны: $AM = AN$, $CM = CH$, $HB = BN$. Поэтому:



$$P = AC + CH + HB + AB = AC + CM + BN + AB = AM + AN = 2AM,$$

откуда $p = AM$.

б) Для определения площади треугольника используем формулу, связывающую её с полупериметром, стороной и радиусом вневписанной окружности, касающейся этой стороны и продолжений двух других сторон треугольника:

$$S = (p - AC) \cdot r_1 = (AM - AC)r_1 = CMr_1 = r_2 r_1 = 8.$$

Ответ: $S_{ACB} = 8$.

Примечание: указанная в решении формула легко может быть получена из следующих соображений $S_{ACB} = S_{ABCO_1} - S_{ACO_1}$, где O_1 — центр окружности с радиусом r_1. При этом $S_{ACO_1} = \dfrac{1}{2}AC \cdot r_1$, $S_{ABCO_1} = S_{ABO_1} + S_{BCO_1} = \dfrac{1}{2}AB \cdot r_1 + \dfrac{1}{2}BC \cdot r_1 = \dfrac{1}{2}(AB + BC) \cdot r_1$.

Тогда $S_{ACB} = \dfrac{1}{2}(AB+BC) \cdot r_1 - \dfrac{1}{2}AC \cdot r_1 = \dfrac{1}{2}((AB+BC+AC)-2AC) = \dfrac{1}{2}(P_{ABC} - 2AC) \cdot r_1 = (p - AC) \cdot r_1$.

17)

Пусть начальная сумма кредита равна S_0, тогда переплата за первый месяц равна $\frac{r}{100}S_0$. По условию, ежемесячный долг перед банком должен уменьшиться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты, равной $S_0/19$, и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов, равной

$$\frac{r}{100}S_0,\ \frac{18}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0,\ \dots,\ \frac{2}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0,\ \frac{1}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0.$$

Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, найдём полную переплату по кредиту:

$$\frac{r}{100}S_0\left(1+\frac{18}{19}+\dots+\frac{2}{19}+\frac{1}{19}\right)=\frac{r}{100}S_0\cdot\frac{1+\frac{1}{19}}{2}\cdot 19=\frac{r}{10}S_0.$$

По условию общая сумма выплат на 30% больше суммы, взятой в кредит, тогда:

$$0,1rS_0=0,3S_0\Leftrightarrow r=3.$$

Ответ: 3.

18)

Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases}(x-1)^2=y+1,\\(y-a)^2+(x-1)^2=1.\end{cases}$$

Исходная система имеет решения, тогда и только тогда, когда относительно y имеет решения система:

$$\begin{cases}(y-a)^2+y+1=1,\\y+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+(1-2a)y+a^2=0,\\y\ge -1.\end{cases}$$

Решая уравнение этой системы, находим, что $y=\frac{2a-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$. Требование задачи будет выполнено, если последняя смешанная система имеет хотя бы одно решение. Искомые значения a находятся из совокупности неравенств

$$\frac{2a-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\ge -1\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\sqrt{1-4a}\ge -1-2a,\\&\sqrt{1-4a}\le 1+2a.\end{aligned}\right.$$

Иррациональные неравенства можно решить, используя теоремы о равносильности:

$$\sqrt{x}\le y\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\y\ge 0,\\x\le y^2\end{cases}\quad\text{и}\quad\sqrt{x}\ge y\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}y<0,\\x\ge 0,\end{cases}\\&\begin{cases}y\ge 0,\\x\ge y^2\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}y<0,\\x\ge 0,\end{cases}\\&x\ge y^2\end{aligned}\right.$$

Получим: $-2\le a\le\frac{1}{4}$ или $0\le a\le\frac{1}{4}$, что дает $-2\le a\le\frac{1}{4}$.

Другой путь решения неравенств — ввести замену $t=\sqrt{1-4a}$. В этом случае $a=\frac{1}{4}(1-t^2)$. Тогда:

$$t\ge -1-\frac{1}{2}(1-t^2),\ \text{откуда}\ t^2-2t-3\le 0\underset{t\ge 0}{\Leftrightarrow}0\le t\le 3$$

и

$$t\le 1+\frac{1}{2}(1-t^2),\ \text{что дает}\ t^2+2t-3\le 0\underset{t\ge 0}{\Leftrightarrow}0\le t\le 1.$$

Тем самым, $0\le t\le 3$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$0\le\sqrt{1-4a}\le 3\Leftrightarrow 0\le 1-4a\le 9\Leftrightarrow -1\le -4a\le 8\Leftrightarrow -2\le a\le\frac{1}{4}.$$

Ответ: $a\in\left[-2,\frac{1}{4}\right]$.

19)

Пусть количества единиц, двоек, троек и четвёрок среди $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ равны m_1, m_2, m_3, m_4 соответственно. Тогда $m_1+m_2+m_3+m_4=350$ и $m_1+2m_2+3m_3+4m_4=513$.

а) По условию

$$S_1=m_1+2m_2+3m_3+4m_4=513, \quad S_2=m_1+4m_2+9m_3+16m_4=1097,$$

$$S_3=m_1+8m_2+27m_3+64m_4=3243, \text{ где } m_1+m_2+m_3+m_4=350.$$

Решая систему четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными, находим: $m_1=282$, $m_2=7$, $m_3=27$, $m_4=34$. Значит,

$$S_4=282+16\cdot 7+81\cdot 27+256\cdot 34=11285.$$

б) Если $S_4=m_1+16m_2+81m_3+256m_4=4547$, где $m_1+m_2+m_3+m_4=350$, то $15m_2+80m_3+255m_4=4197$. В последнем равенстве левая часть кратна 5, а правая — нет, поэтому S_4 не может быть равным 4547.

в) Если $S_4=m_1+16m_2+81m_3+256m_4=4745$, где $m_1+m_2+m_3+m_4=350$, то $15m_2+80m_3+255m_4=4395$. Кроме того, поскольку $m_1+2m_2+3m_3+4m_4=513$, получаем:

$$m_2+2m_3+3m_4=163 \Leftrightarrow 15m_2+30m_3+45m_4=2445.$$

Вычтем из первого полученного равенства второе: $50m_3+210m_4=1950 \Leftrightarrow 5m_3+21m_4=195$. Значит, m_4 делится на 5 и может равняться только 0 или 5. При $m_4=0$ получаем:

$$m_3=\frac{195-21m_4}{5}=39,\ m_2=163-2m_3-3m_4=85, m_1=350-m_2-m_3-m_4=226,\ S_2=m_1+4m_2+9m_3+16m_4=917.$$

При $m_4=5$ получаем:

$$m_3=\frac{195-21m_4}{5}=18,\ m_2=163-2m_3-3m_4=112, m_1=350-m_2-m_3-m_4=215,\ S_2=m_1+4m_2+9m_3+16m_4=905.$$

Ответ: а) 11285; б) нет; в) 905 или 917.