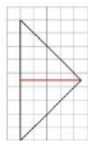
# Ответы и решения для варианта 33006758

1)За 3 кг помидоров отдыхающие заплатили $4 \cdot 3 = 12$ гривен. Значит, в рублях они заплатили: $12 \cdot 3{,}7 = 44{,}4$ рубля. Округляем до целого числа, получаем 44. Ответ: 44.

2) Из графика видно, что курс евро был ровно 41,4 рубля 1 и 7 октября. Ответ: 2.

3)

Медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине. Поэтому она равна 4,5.



Ответ: 4,5.

4)

Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$.

Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$.

Ответ: 0,9975.

5)

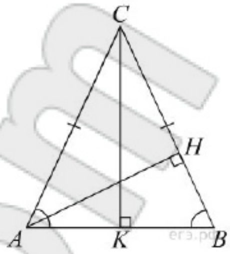
Выполним преобразования, используя формулы $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$:

$$(2x+7)^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 28x + 49 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 32x = -48 \Leftrightarrow x = -1{,}5.$$

Ответ: −1,5.

6)

Треугольник $ABC$ равнобедренный, значит, углы $BAC$ и $ABH$ равны как углы при его основании, а высота, проведенная из точки $C$, делит основание $AB$ пополам. Имеем:




$$BH = AB\cos\angle ABH = AB\cos\angle BAC = 2AK\cos\angle BAC = 2AC\cos^2\angle BAC =$$
$$= 2AC(1-\sin^2\angle BAC) = 2\cdot 27\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right) = 30.$$

Ответ: 30.

7)На заданном отрезке производная функции положительна, поэтому функция на этом отрезке возрастает. Поэтому наименьшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке Ответ: −7.

8)

Объём шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Поэтому сумма объёмов трёх шаров равна

$$\frac{4}{3}\pi\cdot 6^3 + \frac{4}{3}\pi\cdot 8^3 + \frac{4}{3}\pi\cdot 10^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot 2^3\cdot(3^3+4^3+5^3) = \frac{4}{3}\pi\cdot 2^3\cdot 6^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot 12^3.$$

Следовательно, искомый радиус равен 12.

Ответ: 12.

9)

Используем формулу

$$\log_a b\cdot\log_c d = \log_a d\cdot\log_c b$$

.

Имеем:

$$\log_{0,8}3\cdot\log_3 1,25 = \log_{0,8}1,25\cdot\log_3 3 = \log_{\frac{4}{5}}\frac{5}{4} = -1.$$

Ответ: −1.

# 10)

Задача сводится к нахождению наименьшего решения неравенства $P \geq 9,12 \cdot 10^{25}$ при известном значениях постоянной $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ и заданной площади звезды $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20}$ :

$$P \geq 9,12 \cdot 10^{25} \Leftrightarrow \sigma S T^4 \geq 9,12 \cdot 10^{25} \Leftrightarrow T^4 \geq \frac{9,12 \cdot 10^{25}}{\sigma S} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T \geq \sqrt[4]{\frac{9,12 \cdot 10^{25}}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 10^{20}}} \Leftrightarrow T \geq \sqrt[4]{25,6 \cdot 10^{13}} = \sqrt[4]{256 \cdot 10^{12}} = 4000 \text{ K}.$$

Ответ: 4000.

# 11)

Пусть автомобили встретятся на расстоянии $S$ км от города $A$, тогда второй автомобиль пройдет расстояние $435 - S$ км. Второй автомобиль находился в пути на 1 час меньше первого, отсюда имеем:

$$\frac{S}{60} = \frac{435 - S}{65} + 1 \Leftrightarrow \frac{S}{60} = \frac{435 - S + 65}{65} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 65S = 60 \cdot 500 - 60S \Leftrightarrow 125S = 30000 \Leftrightarrow S = 240.$$

Ответ: 240.

# 12)

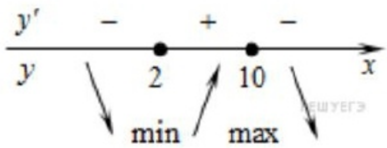
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x^2 - 10x + 10)' e^{5-x} + (x^2 - 10x + 10)(e^{5-x})' =$$
$$= (2x - 10)e^{5-x} - (x^2 - 10x + 10)e^{5-x} = -(x^2 - 12x + 20)e^{5-x} = -(x-2)(x-10)e^{5-x}.$$

Найдем нули производной:

$$(x-2)(x-10)e^{5-x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:

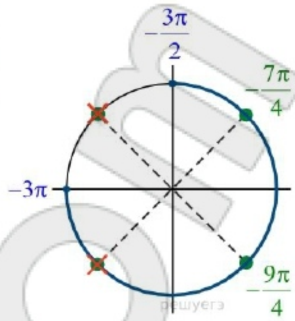



Искомая точка максимума $x = 10$.

Ответ: 10.

## 13)

а) Заметим, что первый множитель содержит тангенс, поэтому $\cos x \neq 0$. Второй множитель — квадратный корень, поэтому подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Следовательно, область определения уравнения задается неравенством $\cos x > 0$. На это области второй множитель не обращается в нуль. Рассмотрим случай, когда нулю равен первый множитель. Последовательно получаем:




$$(\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13\cos x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 1, \\ \cos x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \pm 1, \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

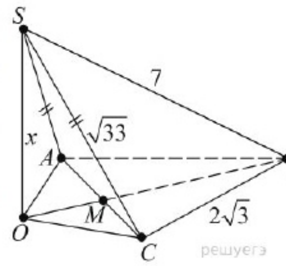
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) Корни из отрезка $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$ отберём с помощью единичной окружности. Получаем $-\frac{9\pi}{4}$ и $-\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{\pi}{4} + 2\pi k:\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{9\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4}$.

## 14)

а) Поскольку $SA = SC$, точка $S$ лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку $AC$ и проходящей через его середину $M$. Следовательно, $O$ лежит на прямой $BM$. Обозначим высоту пирамиды за $x$, тогда $AO = \sqrt{33 - x^2}$, $BO = \sqrt{49 - x^2}$. Следовательно, $x^2 \leq 33$ и $BO \geq \sqrt{49 - 33} = 4$. При этом $BM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3$, поэтому точка $O$ лежит вне треугольника. Более того, поскольку $AO < BO$, она лежит на продолжении $BM$ за точку $M$.




б) Из треугольника $SMA$ найдем $SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{30}$. Теперь, из треугольника $SMO$ находим $MO = \sqrt{SM^2 - SO^2} = \sqrt{30 - x^2}$. Тогда из треугольника $BOS$ имеем

$$\left(3 + \sqrt{30 - x^2}\right)^2 + x^2 = 49 \Leftrightarrow 6\sqrt{30 - x^2} = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30 - x^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{245}{9} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}\sqrt{5}.$$

Тогда $MO = \frac{5}{3}$, $BO = \frac{14}{3}$ и

$$V_{ABCOS} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCO} = \frac{7}{9}\sqrt{5} \cdot AC \cdot BO \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{18}\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{14}{3} = \frac{98\sqrt{15}}{27}.$$

Ответ: $\frac{98\sqrt{15}}{27}$.

## 15)

Заметим, что выражение, стоящее под знаком логарифма, не меньше 1:

$$x^2-12|x|+37=(|x|-6)^2+1\geq 1.$$

Кроме того, при ненулевых значениях переменной справедливы неравенства $1-\frac{x^2}{37}<1$ и $1+\frac{x^2}{37}>1$, а значит,

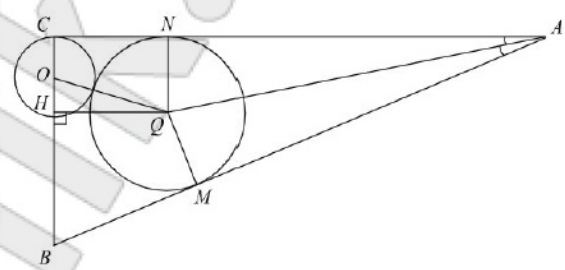
$$\log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2-12|x|+37)\leq 0, \text{ и } \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2-12|x|+37)\geq 0.$$

Тем самым, неравенство выполнено в том и только в том случае, когда оба логарифма равны нулю, а $x$ отличен от нуля. Имеем:

$$x^2-12|x|+37=1\Leftrightarrow(|x|-6)^2+1=1\Leftrightarrow|x|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6,\\x=-6.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-6;\ 6\}$.

## 16)




а) Пусть $Q$ — центр второй окружности, $M$ и $N$ — её точки касания со сторонами $AB$ и $AC$ соответственно, а точка $H$ — проекция точки $Q$ на $BC$. Имеем: $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=13$, следовательно, $\cos\angle A=\frac{12}{13}$, $\sin\angle A=\frac{5}{13}$. Тогда $\operatorname{tg}\angle NAQ=\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}=\frac{\sin\angle A}{1+\cos\angle A}=\frac{1}{5}$. Поэтому $AC>AN=5NQ$, что и требовалось доказать.

б) Пусть $x$ — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник $OHQ$:

$$QH=CN=12-5x>0,\ OQ=x+\frac{1}{2},\ OH=|OC-CH|=\left|\frac{1}{2}-x\right|.$$

По теореме Пифагора $OH^2+QH^2=OQ^2$, откуда:

$$(12-5x)^2+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=\left(\frac{1}{2}+x\right)^2\Leftrightarrow 25x^2-122x+144=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\x=2,88.\end{array}\right.$$

Условию $12-5x>0$ удовлетворяет только $x=2$.

Ответ: 2.

## 17)

Пусть на первом заводе работают суммарно $x^2$, а на втором — $y^2$ часов в неделю. Требуется найти максимум суммы $s = 3x + 4y$ при условии

$$500(x^2+y^2) = 5\,000\,000 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 10\,000. \quad (*)$$

Выразим $y$ из первого соотношения: $y = \frac{1}{4}(s-3x)$, подставим в (*), получим уравнение:

$$x^2 + \left(\frac{1}{4}(s-3x)\right)^2 = 10\,000 \Leftrightarrow 25x^2 - (6s)x + (s^2 - 160\,000) = 0. \quad (**)$$

Полученное уравнение имеет решения, если неотрицателен его дискриминант, а значит, и четверть дискриминанта:

$$\frac{D}{4} = 9s^2 - 25(s^2 - 160\,000) \geq 0 \Leftrightarrow -500 \leq s \leq 500.$$

Тем самым, наибольшее возможное значение $s = 3x + 4y$ равно 500. Покажем, что оно достигается при натуральных значениях переменных: действительно, из (**) находим, что значению $s = 500$ соответствует $x = 60$, а тогда $y = 80$.

Ответ: 500 единиц товара.

## 18)

Уравнение равносильно следующей системе:

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a-7)(x+a-2) = 0, \\ 10x-x^2-a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x = a+7, \\ &x = 2-a, \end{aligned}\right. \\ 10x - x^2 - a^2 > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первый случай, когда корни совпадают: $a + 7 = 2 - a \Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}$. Тогда корень $x = \frac{9}{2}$ принадлежит отрезку [4; 8] и удовлетворяет ОДЗ.

Рассмотрим второй случай, когда первый корень $x = a + 7$ принадлежит отрезку [4; 8] и удовлетворяет ОДЗ. Тогда уравнение имеет единственное решение на заданном отрезке, если второй корень не принадлежит отрезку [4; 8] или не удовлетворяет ОДЗ. Имеем:

$$\begin{cases} 4 \leq a+7 \leq 8, \\ 10(a+7)-(a+7)^2-a^2 > 0, \\ \left[\begin{aligned} &2-a > 8, \\ &2-a < 4, \\ &10(2-a)-(2-a)^2-a^2 \leq 0 \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a^2-4a+21 > 0, \\ -3 \leq a \leq 1, \\ \left[\begin{aligned} &a < -6, \\ &a > -2, \\ &-a^2-3a+8 \leq 0 \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2-\sqrt{46}}{2} < a < \frac{-2+\sqrt{46}}{2}, \\ -3 \leq a \leq 1, \\ \left[\begin{aligned} &a > -2, \\ &a \geq \frac{-3+\sqrt{41}}{2}, \\ &a \leq \frac{-3-\sqrt{41}}{2} \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -2 < a \leq 1.$$

Рассмотрим второй случай, когда второй корень $x = 2 - a$ принадлежит отрезку [4; 8] и удовлетворяет ОДЗ. Тогда уравнение имеет единственное решение на заданном отрезке, если первый корень не принадлежит отрезку [4; 8] или не удовлетворяет ОДЗ. Имеем:

$$\begin{cases} 4 \leq 2-a \leq 8, \\ 10(2-a)-(2-a)^2-a^2 > 0, \\ \left[\begin{aligned} &7+a > 8, \\ &7+a < 4, \\ &10(7+a)-(7+a)^2-a^2 \leq 0 \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2-3a+8 > 0, \\ -6 \leq a \leq -2, \\ \left[\begin{aligned} &a < -3, \\ &a > 1, \\ &-2a^2-4a+21 \leq 0 \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3-\sqrt{41}}{2} < a < \frac{-3+\sqrt{41}}{2}, \\ -6 \leq a \leq -2, \\ \left[\begin{aligned} &a < -3, \\ &a \geq \frac{-2+\sqrt{46}}{2}, \\ &a \leq \frac{-2-\sqrt{46}}{2} \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{41}}{2} < a < -3.$$

19)

а) Подходящим примером являются прогрессии $1, 3, 5, \ldots$ и $1, 4, 7, \ldots$ соответственно. Для этих прогрессий имеем $a_1b_1 + a_3b_3 = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 36 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3a_2b_2$.

б) Обозначим через $c$ и $d$ разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ соответственно. Тогда

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 = a_1b_1 + 2(a_1 + 3c)(b_1 + 3d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 18cd,$$
$$3a_3b_3 = 3(a_1 + 2c)(b_1 + 2d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 12cd$$
$$\text{и } a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd.$$

Если $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$, то $cd = 0$. Пришли к противоречию, ведь по условию $c > 0$ и $d > 0$.

в) Как и ранее, обозначим через $c$ и $d$ разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ соответственно. Тогда по условию $c \geq 1$ и $d \geq 1$. По доказанному в пункте б имеем $a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd$. Значит,

$$a_3b_3 = \frac{a_1b_1 + 2a_4b_4 - 6cd}{3} \leq \frac{300 - 6}{3} = 98.$$

Если прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ являются прогрессиями $5, 6, 7, 8, \ldots$ и $12, 13, 14, 15, \ldots$ соответственно, то

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 = 5 \cdot 12 + 2 \cdot 8 \cdot 15 = 300 \text{ и } a_3b_3 = 7 \cdot 14 = 98.$$

Этот пример показывает, что наибольшее возможное значение произведения $a_3b_3$ равно 98.

Ответ: а) да, например, $1, 3, 5, \ldots$ и $1, 4, 7, \ldots$ соответственно; б) нет; в) 98.

Скачано с 100balnik.com