Ответы и решения для варианта 33006756

1)

Разделим 200 на 35:

$$\frac{200}{35} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}.$$

Значит, можно будет купить 5 шоколадок. Еще 2 будут даны в подарок. Всего можно будет получить 7 шоколадок.

Ответ: 7.

2) Из графика видно, что напряжение падает с 1,4 вольта до 1 вольта за 15 − 1 = 14 часов. Ответ: 14.

3)

Треугольник прямоугольный, значит, радиус описанной вокруг него окружности равен половине гипотенузы.

$$R = \frac{AC}{2} = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

4)

Общее количество выступающих на фестивале групп для ответа на вопрос неважно. Сколько бы их ни было, для указанных стран есть 6 способов взаимного расположения среди выступающих (Д — Дания, Ш — Швеция, Н — Норвегия):

...Д...Ш...Н..., ...Д...Н...Ш..., ...Ш...Н...Д..., ...Ш...Д...Н..., ...Н...Д...Ш..., ...Н...Ш...Д...

Дания находится после Швеции и Норвегии в двух случаях. Поэтому вероятность того, что группы случайным образом будут распределены именно так, равна

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Ответ: 0,33.

5)

Перейдём к одному основанию степени:

$$7^{18,5x+0,7}=\frac{1}{343}\Leftrightarrow 7^{18,5x+0,7}=7^{-3}\Leftrightarrow 18,5x+0,7=-3\Leftrightarrow 18,5x=-3,7\Leftrightarrow x=-\frac{37}{185}=-0,2.$$

Ответ: −0,2.

6)

Стороны искомого четырехугольника равны средним линиям треугольников, образуемых диагоналями и сторонами данного четырехугольника. Таким образом, стороны искомого четырехугольника равны половинам диагоналей. Соответственно,

$$P=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}DB+\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}CA=AC+BD=9.$$

Ответ: 9.

7)

Производная функции положительна на тех интервалах, на которых функция возрастает, т. е. на интервалах (−3; 0) и (4,2; 7). В них содержатся целые точки −2, −1, 5 и 6, всего их 4.

Ответ: 4.

8)

Меньший конус подобен большему с коэффициентом 0,5. Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем большего конуса в 8 раз больше объема меньшего конуса, он равен 560 мл. Следовательно, необходимо долить 560 − 70 = 490 мл жидкости.

Ответ: 490.

9)

Последовательно получаем:

$$\frac{19}{\cos^2 37^\circ+1+\cos^2 53^\circ}=\frac{19}{\cos^2 37^\circ+1+\cos^2(90-37)^\circ}=\frac{19}{\cos^2 37^\circ+1+\sin^2 37^\circ}=\frac{19}{2}=9,5.$$

Ответ: 9,5.

10)

Определим моменты времени, когда камень находился на высоте ровно 9 метров. Для этого решим уравнение $h(t) = 9$:

$$h(t) = 9 \Leftrightarrow -5t^2 + 18t = 9 \Leftrightarrow -5t^2 + 18t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3; \\ t = 0,6. \end{array}\right.$$

Проанализируем полученный результат: поскольку по условию задачи камень брошен снизу вверх, это означает, что в момент времени $t = 0,6$(с) камень находился на высоте 9 метров, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t = 3$(с) камень находился на этой высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее девяти метров 2,4 секунды.

Ответ: 2,4.

11)

Пока сухогрузы перейдут из первого положения во второе, второй сухогруз переместился относительно первого на

$$120 + 400 + 80 + 600 = 1200 \text{ м}.$$

Пусть u – разность скоростей сухогрузов, тогда

$$u = \frac{1200}{12} = 100 \text{ м/мин} = 6 \text{ км/ч}.$$

Ответ: 6.

12)

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = 3\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 3\mathrm{tg}^2 x.$$

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является

$$y(0) = 3\,\mathrm{tg}\,0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Ответ: 5.

13)

а) Преобразуем уравнение:

$$4\cdot 4^{x^2-2x}+4^{x^2-2x}=20\Leftrightarrow 4^{x^2-2x}=4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x=1\Leftrightarrow x^2-2x-1=0.$$

Откуда $x=1\pm\sqrt{2}$.

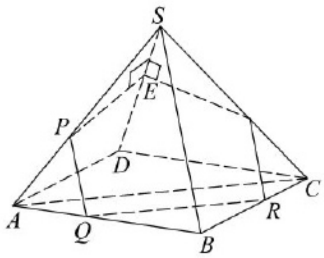
б) Оценим $\sqrt{2}$ сверху целыми числами: $1<\sqrt{2}<2$. Тогда

$$2<1+\sqrt{2}<3 \text{ и } -1<1-\sqrt{2}<0.$$

Значит, отрезку $[-1;2]$ принадлежит только $x=1-\sqrt{2}$.

Ответ а) $x=1\pm\sqrt{2}$; б) $x=1-\sqrt{2}$.

14)



а) Стороны треугольника SBD равны 5, 5 и $5\sqrt{2}$, поэтому он прямоугольный, то есть прямая SD перпендикулярна прямой SB. Очевидно, что прямые SB и PQ параллельны как стороны равносторонних треугольников, тогда прямая SD перпендикулярна прямой PQ. Прямая AC перпендикулярна прямой BD, и по теореме о трёх перпендикулярах прямая AC перпендикулярна прямой SD, а значит, и прямая QR перпендикулярна прямой SD. Таким образом, плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Пусть плоскость PQR пересекает ребро SD в точке E. Из доказанного следует, что прямая PE перпендикулярна прямой SD, откуда

$$SE=SP\cos 60^\circ=\frac{3}{2}.$$

Значит, $DE=SD-SE=\dfrac{7}{2}$. Поскольку плоскость PQR перпендикулярна ребру SD, искомое расстояние равно DE.

Ответ: б) $\dfrac{7}{2}$.

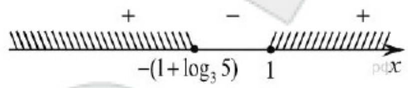
15)

Логарифмируем обе части, используем свойства логарифма, получаем квадратное неравенство:

$$3^{x^2}\cdot 5^{x-1}\geq 3\Leftrightarrow \log_3(3^{x^2}\cdot 5^{x-1})\geq \log_3 3\Leftrightarrow \log_3 3^{x^2}+\log_3 5^{x-1}\geq 1\Leftrightarrow x^2+(x-1)\log_3 5-1\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x\log_3 5-(\log_3 5+1)\geq 0.$$

Замечаем, что один из корней уравнения, соответствующего полученному неравенству, равен 1; второй корень находим по теореме, обратной теореме Виета; затем применяем метод интервалов:



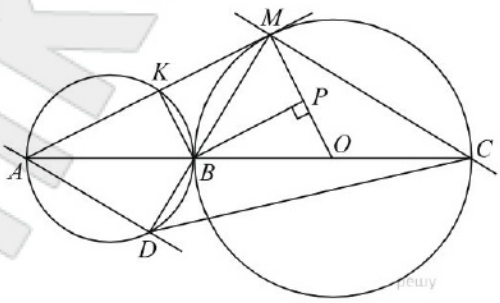
Ответ: $(-\infty;-(\log_3 5+1)]\cup[1;\infty)$.

16)

а) Точки M и D лежат на окружностях с диаметрами BC и AB соответственно, поэтому

$$\angle BMC=\angle BDA=90^\circ.$$

Прямые AD и MC перпендикулярны одной и той же прямой MD, следовательно, прямые AD и MC параллельны.



б) Пусть O — центр окружности с диаметром BC. Тогда прямые OM и AM перпендикулярны. Учитывая, что прямые BK и AM перпендикулярны, получаем, что прямые OM и BK параллельны. Обозначим BK через x. Треугольник AMO подобен треугольнику AKB с коэффициентом 5, поэтому $OB = OM = 5x$. Опустим перпендикуляр BP из точки B на прямую OM. Так как четырёхугольник $BKMP$ — прямоугольник,

$$BP=KM=12,$$
$$OP=OM-MP=OM-BK=5x-x=4x.$$

По теореме Пифагора $OB^2 = BP^2 + OP^2$, откуда $25x^2 = 144 + 16x^2$. Получаем, что $x = 4$. Поскольку прямые AD и MC параллельны,

$$S_{DBC}=S_{MDC}-S_{MBC}=S_{MAC}-S_{MBC}=S_{ABM}.$$

Значит, треугольники DBC и AMB равновелики. Следовательно,

$$S_{DBC}=S_{AMB}=\frac{1}{2}AM\cdot BK=\frac{1}{2}\cdot 15x=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 4=30.$$

Ответ: 30.

17)

По условию, за первые 20 месяцев долг должен равномерно уменьшиться на 300 − 100 = 200 (тыс. руб), значит, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$300;\ 290;\ 280;\ \ldots\ 110;\ 100;\ 0.$$

Первое число каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$306;\ 295{,}8;\ \ldots\ 112{,}2;\ 102.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$16;\ 15{,}8;\ \ldots\ 12{,}2;\ \ 102\ .$$

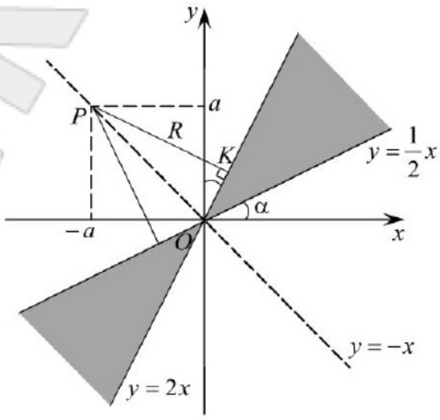
Значит, всего следует выплатить

$$\frac{20\cdot 28,2}{2}+102=384 \text{ (тыс. рублей).}$$

Ответ: 384 тысячи рублей.

18)

Неравенство задает пару вертикальных углов на координатной плоскости Oxy (см. рисунок). Графиком уравнения является окружность радиуса $R=\frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$, центр которой — точка $P(-a;a)$ — лежит на прямой $y=-x$. Поскольку оба графика симметричны относительно прямой $y=-x$, система будет иметь ровно два решения тогда и только тогда, когда расстояние PK от центра окружности до прямой $y=2x$ будет равняться радиусу $R=\frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$ данной окружности. Из треугольника POK находим: $PK=PO\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, где $\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент прямой $y=\frac{1}{2}x$. Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, откуда



$$PK=PO\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)=\sqrt{2a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{3|a|}{\sqrt{5}}.$$

Окончательно получаем: $\frac{3|a|}{\sqrt{5}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{5}}$, $3a=\pm(a+1)$, $a=\frac{1}{2}$ или $a=-\frac{1}{4}$.

Ответ: $a=\frac{1}{2}$ или $a=-\frac{1}{4}$.

19)

а) Например, если были написаны по 10 раз числа 11 и 1 и со всеми провели эти действия, то их среднее было равно 6, а после описанных действий оно станет равно 10.

б) Пусть x количество изначально написанных единиц, которые превратятся в нули, а y — количество прочих уменьшаемых чисел. Тогда сумма всех чисел равна $27 \cdot 20 = 540$, а сумма всех чисел, кроме будущих нулей, равна $540 - x$, и их $20 - x$ штук.

После описанных действий будет $20 - x$ чисел с общей суммой $540 - x - y$. Значит,

$$\frac{540 - x - y}{20 - x} = 34 \Leftrightarrow 540 - x - y = 680 - 34x \Leftrightarrow 140 = 33x - y.$$

Отсюда следует, что $x \geq 5$. Но тогда $y \geq 33 \cdot 5 - 140 = 25$, что невозможно.

в) Обозначая как в пункте б) получаем, что нужно максимизировать значение выражения $\frac{540 - x - y}{20 - x}$. Очевидно, следует взять $y = 0$ и максимизировать $1 + \frac{520}{20 - x}$, то есть следует максимизировать x.

Заметим однако, что сумма изначальных чисел не превосходит $x + 40(20 - x)$, откуда $800 - 39x \geq 540$, $20 > 3x$, $x \leq 6$. Тогда требуемое выражение будет равно $1 + \frac{520}{14} = 38\frac{1}{7}$. Это возможно, например, для набора из шести единиц, числа 14 и тринадцати чисел по 40, из которых уменьшают все единицы и только их, получая $\frac{14 + 13 \cdot 40}{14} = 38\frac{1}{7}$.

Ответ: а) да б) нет в) $38\frac{1}{7}$.