Ответы и решения для варианта 33006752

1)Расход электроэнергии за ноябрь составляет 12 802 − 12 625 = 177 киловатт-часов. Значит, за ноябрь нужно заплатить 1,8 · 177 = 318,6 рубля. Ответ: 318,6.

2) Ответ: 4

3)Площади кругов относятся как квадраты их радиусов. Поскольку радиус большего круга вдвое больше радиуса меньшего круга, площадь большего круга вчетверо больше площади меньшего. Следовательно, она равна 204. Площадь заштрихованной фигуры равна разности площадей кругов: 204 − 51 = 153. Ответ: 153.

4)Вероятность того, что стекло сделано на первой фабрике и оно бракованное: 0,45 · 0,03 = 0,0135. Вероятность того, что стекло сделано на второй фабрике и оно бракованное: 0,55 · 0,01 = 0,0055. Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна 0,0135 + 0,0055 = 0,019. Ответ: 0,019.

5)

Используем формулы квадрата суммы и разности:

$$(x-6)^2=-24x \Leftrightarrow x^2-12x+36=-24x \Leftrightarrow x^2+12x+36=0 \Leftrightarrow (x+6)^2=0 \Leftrightarrow x=-6.$$

Ответ: −6.

6)

Имеем:

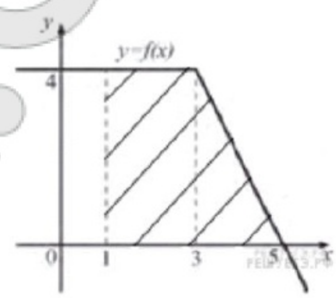
$$BC = AC\,\mathrm{tg}\,A = \frac{AC\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{1-\frac{17}{289}}} = 2\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\frac{17}{\sqrt{272}} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

7)

Определенный интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[1;5]$ дает значение площади подграфика функции $f(x)$ на отрезке. Область под графиком разбивается на прямоугольный треугольник, площадь которого $S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4$, и прямоугольник, площадь которого $S_{\text{пр}} = 2\cdot 4 = 8$. Сумма этих площадей дает искомый интеграл

$$\int_1^5 f(x)\,dx = S_{\text{пр}} + S_{\text{тр}} = 8 + 4 = 12.$$



Ответ: 12.

8)

Удобно считать треугольник ASB основанием пирамиды, тогда отрезок SC будет являться её высотой. Заметим, что

$$S_{ASB} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

Поскольку $SC = 3$, далее имеем:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}S_{ASB}\cdot SC = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

9)

Используем формулу косинуса двойного угла $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$:

$$\sqrt{50}\cos^2\frac{9\pi}{8} - \sqrt{50}\sin^2\frac{9\pi}{8} = \sqrt{50}\cos\frac{9\pi}{4} = \sqrt{50}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{50}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5.$$

Ответ: 5.

10)

Задача сводится к решению неравенства $Q \geq 50$ Дж на интервале $2\alpha \in (0°;\ 180°)$ при заданных значениях массы тел $m = 2$ кг и их скоростей $v = 10$ м/с:

$$mv^2 \sin^2\alpha \geq 50 \Leftrightarrow 200\sin^2\alpha \geq 50 \Leftrightarrow \sin^2\alpha \geq \frac{1}{4} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} \sin\alpha \geq \frac{1}{2} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 30° \leq \alpha < 90°.$$

Значит, наименьший угол $2\alpha = 2 \cdot 30° = 60°$.

Ответ: 60.

11)

Скорость движения минутной стрелки 12 делений/час (под одним делением здесь подразумевается расстояние между соседними цифрами на циферблате часов), а часовой – 1 деление/час. До четвертой встречи минутной и часовой стрелок минутная должна сначала 3 раза «обогнать» часовую, то есть пройти 3 круга по 12 делений. Пусть после этого до четвертой встречи часовая стрелка пройдет L делений. Тогда общий путь минутной стрелки складывается из найденных 36 делений, ещё 8 изначально разделяющих их делений (поскольку часы показывают 8 часов) и последних L делений. Приравняем время движения часовой и минутной стрелок:

$$\frac{L}{1} = \frac{L+8+36}{12} \Leftrightarrow 12L = L + 44 \Leftrightarrow L = 4.$$

Часовая стрелка пройдет 4 деления, что соответствует 4 часам, то есть 240 минутам.

Ответ: 240.

12)

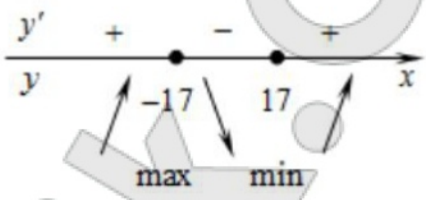
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x}{x^2+289}\right)' = -\frac{1\cdot(x^2+289) - x\cdot(2x)}{(x^2+289)^2} = \frac{x^2-289}{(x^2+289)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2 - 289 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 289 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 17, \\ x = -17. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



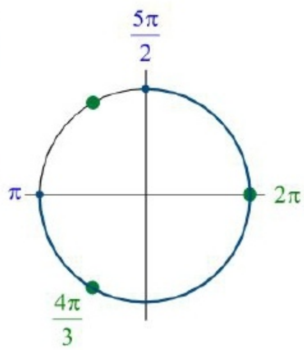
Искомая точка максимума $x = -17$.

Ответ: -17.

13)

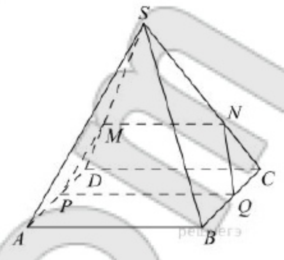
а) Преобразуем уравнение, получаем $\cos x = \cos 2x$. Значит, $2x = x + 2\pi k$ или $x = -2x + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. В первом случае $x = 2\pi k$, во втором случае $x = \frac{2\pi k}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Первая серия решений входит во вторую.

б) Отметим решения на тригонометрической окружности. Отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и 2π.



Ответ: а) $\left\{\frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{4\pi}{3}$; 2π.

14)



а) Пусть плоскость MPQ пересекает SC в точке N. Так как $PD = CQ$, $PD \parallel CQ$, то $PDCQ$ — параллелограмм, $PQ \parallel CD$. Поскольку $PQ \parallel CD$, $PQ \subset MPQ$, то $MN \parallel PQ \parallel CD$.

Тогда $\frac{SM}{MD} = \frac{SN}{NC}$, то есть $MD = NC$. Так как $MD = NC$, $CQ = PD$ и $\angle SCB = \angle SDA$, так как пирамида правильная, то $\triangle NCQ = \triangle PDM$, следовательно, $NQ = MP$.

Поскольку $NQ = MP$ и $MN \parallel PQ$, то $MNQP$ — равнобедренная трапеция, что и требовалось доказать.

б) Заметим, что $S_{DPQC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, расстояние от точки M до плоскости ABC втрое меньше расстояния от точки S до плоскости ABC. Тогда $\frac{V_{MPDCQ}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{6}$.

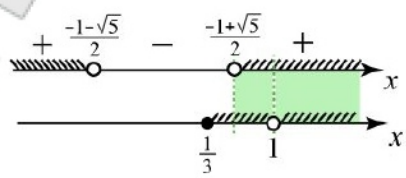
По теореме об отношении площадей треугольников с равными углами $\frac{S_{\triangle CQN}}{S_{\triangle CSB}} = \frac{CN}{CS} \cdot \frac{CQ}{CB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, расстояние от точки D до плоскости SBC, в 1,5 раза больше чем от точки M. Значит, $\frac{V_{MNCQ}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{MNCQ}}{2V_{SBCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$, из чего следует, что $V_{CQPDMN} = \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{6}\right) V_{SABCD} = \frac{2}{9} V_{SABCD}$, тогда $\frac{V_{CQPDMN}}{V_{PQNMSBA}} = \frac{2}{7}$.

Ответ: б) $\frac{2}{7}$.

15)

1) Если $x^2 + x > 1$, то

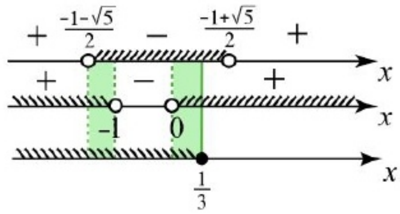
$$\begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ 0 < x^2 - 2x + 1 \le x^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 > 0, \\ x \ne 1, \\ 3x \ge 1, \end{cases}$$



откуда $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 1$ или $x > 1$.

2) Если $0 < x^2 + x < 1$, то

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 < 0, \\ x^2 + x > 0, \\ x^2 - 2x + 1 \ge x^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 < 0, \\ x(x+1) > 0, \\ 3x \le 1, \end{cases}$$



откуда $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < -1$ или $0 < x \le \frac{1}{3}$.

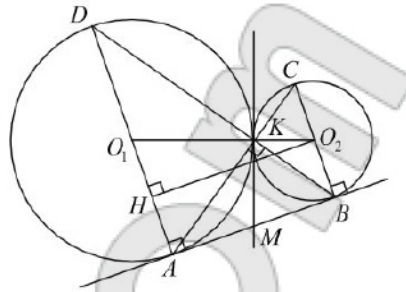
Объединяя найденные промежутки, получаем решение неравенства:

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < -1 \text{ или } 0 < x \le \frac{1}{3} \text{ или } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 1 \text{ или } x > 1.$$

Ответ: $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ -1\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty)$.

16)

а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, — прямоугольный.



Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определенности, первая окружность имеет радиус 4, а радиус второй равен 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{DK}{KB} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\dfrac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \dfrac{DK}{KB} = \dfrac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{\text{CKD}} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр $O2H$, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0{,}8$ и $S_{AKB} = 4S = 3{,}2$.

Ответ: 3,2.

17)

Пусть Баба Валя внесла в Спёрбанк S у. е. под $x\%$ годовых. Тогда за год хранения вклада внесенная сумма выросла до $S(1+0{,}01x)$ у. е. Баба Валя сняла со счета $\dfrac{S}{2}(1+0{,}01x)$ у. е. и поместила эту сумму в коммерческий банк. За год хранения вклада в коммерческом банке сумма выросла до $\dfrac{S}{2}(1+0{,}01x)\cdot(1+0{,}2x)$ у.е. А эта сумма по условию задачи составляет $1{,}65S$ у. е.

Решим уравнение $\dfrac{S}{2}(1+0{,}01x)\cdot(1+0{,}2x) = 1{,}65S$:

$$(1+0{,}01x)\cdot(1+0{,}2x) = 3{,}3 \Leftrightarrow (100+x)\cdot(10+2x) = 3300 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 210x + 1000 - 3300 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 105x - 1150 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -115, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

По условию задачи нам подходит только положительный корень $x = 10$. Значит, в Спёрбанке процент годовых для пенсионеров равен 10.

Ответ: 10.

18)

Заметим, что сумма корней уравнения $t^2-(a+9)t+2a(9-a)=0$ равна $a+9$, а их произведение равно $2a(9-a)$. Поэтому корни — числа $2a$ и $9-a$. Тогда для исходного уравнения имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x-a}=2a, \\ x+\dfrac{1}{x-a}=9-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a+\dfrac{1}{x-a}=a, \\ x-a+\dfrac{1}{x-a}=9-2a. \end{array}\right.$$

Каждое из уравнений совокупности может иметь не более двух корней.

Для того, чтобы исходное уравнение имело четыре корня, каждое из уравнений совокупности должно иметь по два корня и при этом уравнения не должны совпадать. Заметим, что если два взаимно обратных числа y и $\dfrac{1}{y}$ различны, то $\left|y+\dfrac{1}{y}\right|>2$. Используя это свойство, получаем, что четыре корня исходное уравнение будет иметь при

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a<-2, \\ a>2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 9-2a<-2, \\ 9-2a>2, \end{array}\right. \\ a\neq 9-2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a<-2, \\ a>2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a>\dfrac{11}{2}, \\ a<\dfrac{7}{2}, \end{array}\right. \\ a\neq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-2, \\ 2<a<3, \\ 3<a<\dfrac{7}{2}, \\ a>\dfrac{11}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -2;)\cup(2;\ 3)\cup\left(3;\ \dfrac{7}{2}\right)\cup\left(\dfrac{11}{2};\ +\infty\right)$.

19)

а) Пусть Петя в первый день решил x задач. Тогда в оставшиеся дни он решил $x+2, x+4, x+6, x+8$ задач. Всего в сборнике оказывается $5x+20$ задач. Вася в первый день решил $x-1$ задачу. В следующие дни он решал $x, x+1, x+2, x+3, x+4, \ldots$ задач. За пять дней решить все задачи Вася не мог. Если Вася решил все задачи сборника за шесть дней, то он решил $6x+9$ задач. Уравнение $5x+20=6x+9$ имеет решение $x=11$. Тем самым приведен пример, удовлетворяющий условию: Вася решил в первый день 10 задач, Петя — 11 задач.

б) Вновь обозначим за x число задач, решенных Петей в первый день. Тогда всего Петя решил $4x+12$ задач. Вася решал $x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, \ldots$ задач. Если Вася решил все задачи сборника за четыре дня или менее, то он решил не более $4x+10$ задач. Но тогда Вася решил меньше задач, чем Петя. Противоречие. Если Вася решал задачи пять дней или более, то он решил как минимум $5x+15$ задач. Тогда Вася решил больше задач, чем Петя. Противоречие.

в) Петя решал задачи не менее семи дней. Начнем со случая, когда он решал задачи ровно семь дней.

Тогда в сборнике оказывается $7x+42$ задачи. Если Вася решил в первый день на одну задачу больше, чем Петя, то за семь дней он решил $7x+28$ задач. Следовательно, Вася решал задачи более семи дней. За восемь дней он бы решил $8x+36$ задач. Уравнение $7x+42=8x+36$ имеет решение $x=6$. За девять дней или более Вася бы решил как минимум $9x+45$ задач, что превосходит число задач в сборнике. Если Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, то вновь ему, очевидно, придется решать задачи более семи дней. За восемь дней он бы решил $8x+20$ задач, за девять дней $9x+27$ задач, за десять дней $10x+35$ задач, за большее число дней как минимум $11x+44$ задачи (что заведомо больше числа задач в сборнике). Уравнения $7x+42=8x+20$, $7x+42=9x+27$, $7x+42=10x+35$ не имеют целых решений, меньших 6.

Тем самым, в случае, когда Петя решал задачи ровно семь дней, в сборнике не могло оказаться меньше $7x+42=7\cdot 6+42=84$ задач (напомним, что такое могло быть, если Петя решил в первый день 6 задач, а Вася 7; Петя решал задачи 7 дней, а Вася 8).

Перейдем к случаям, когда Петя решал задачи более семи дней. Перечислим всевозможные значения, которые может принимать сумма $1+2+\ldots+n$: это 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, ... (так называемые «треугольные числа»).

Если Петя решил весь сборник за 8 дней, то он решил $8x+56$ задач. Нас интересует, может ли это число быть меньше 84. Необходимо проверить $x=1, x=2, x=3$.

При $x=1$ задач в сборнике $8\cdot 1+56=64$.Вася в первый день решил 2 задачи, то есть всего Вася решил $2+3+4+5+\ldots$ задач. Следовательно, 64 должно быть меньше треугольного числа на 1. Противоречие.

При $x=2$ задач в сборнике $8\cdot 2+56=72$. Вася в первый день решил или 1 задачу, или 3 задачи. Следовательно, 72 должно или совпадать с треугольным числом, либо быть меньше него на 1 + 2 = 3. Противоречие.

При $x=3$ задач в сборнике $8\cdot 3+56=80$. Вася в первый день решил или 2, или 4 задачи. Следовательно, 80 должно быть меньше треугольного числа или на 1, или на 1 + 2 + 3 = 6. Противоречие.

Если же Петя решил весь сборник за 9 дней, то он решил $9x+72$ задач. Единственная подходящая возможность, чтобы задач в сборнике было меньше 84, это $x=1$. Но тогда в сборнике 81 задача. В первый день Вася решил 2 задачи. Следовательно, 81 должно быть на 1 меньше треугольного числа. Противоречие.

Если Петя решал сборник более 9 дней, то он решил как минимум $10x+90$ задач, что заведомо больше 84.

Ответ: а) да; б) нет; в) 84.