

ПРОБНЫЙ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут. Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение.

Ответ

–0,3

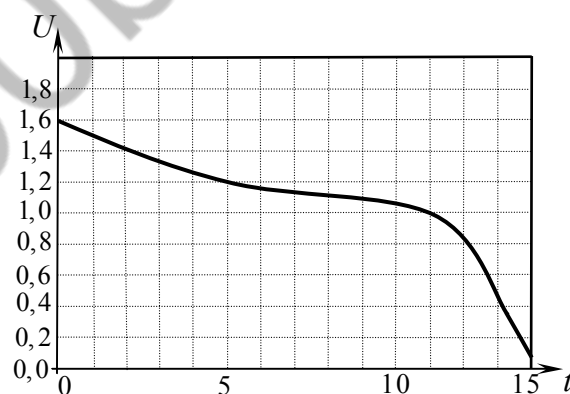
Запись в бланк ответов

5	–	0	,	3		
---	---	---	---	---	--	--

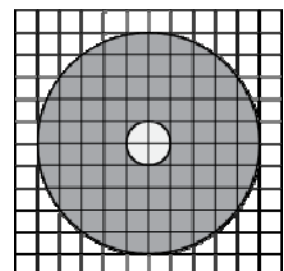
ВАРИАНТ 1

Ответом на задания 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- Одна таблетка лекарства весит 70 мг и содержит 4% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,05 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте пяти месяцев и весом 8 кг в течение суток?
- При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, за сколько часов напряжение упадёт с 1,2 вольта до 1 вольта.



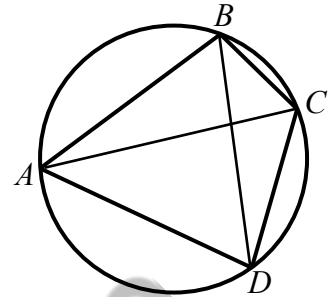
- На клетчатой бумаге нарисованы два круга. Площадь внутреннего круга равна 12. Найдите площадь закрашенной фигуры.



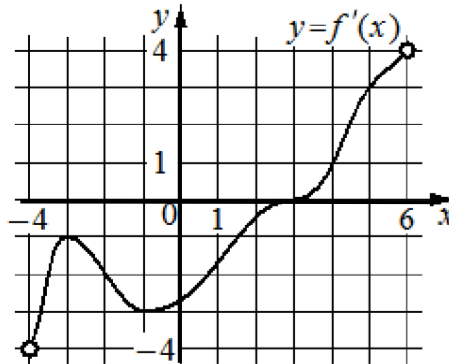
4. В классе 16 учащихся, среди них два друга — Вадим и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Сергей окажутся в одной группе.

5. Решите уравнение $\log_4 2^{8x+8} = 4$.

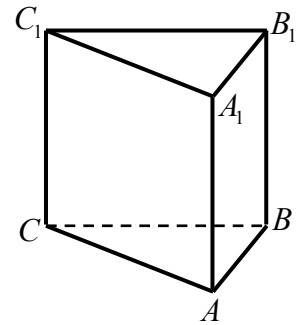
6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 98° , угол CAD равен 44° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.



8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, C, A_1, B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Площадь основания призмы равна 9, а боковое ребро равно 4.



9. Найдите значение выражения $7\sqrt{2} \cdot \sin \frac{15\pi}{8} \cos \frac{15\pi}{8}$.

10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 45$ см.

Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 50 см до 70 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 200 см до 270 см.

Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$.

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

11. Из городов А и В навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в город В на 2 часа раньше, чем велосипедист приехал в город А, а встретились они через 1 час 20 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из города В в город А велосипедист?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 8e^x + 9$ на отрезке $[0; 2]$.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

13. а) Решите уравнение: $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + 2\cos 2x = 1$.

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 12, боковое ребро $PA = 12\sqrt{2}$. Через вершину A проведена плоскость α , перпендикулярная прямой PC и пересекающая ребро PC в точке K .

а) Докажите, что плоскость α делит высоту PH пирамиды $PABCD$ в отношении 2:1, считая от вершины P .

б) Найдите расстояние между прямыми PH и BK .

15. Решите неравенство $\log_{x^2+1} \frac{2 \cdot 4^x - 15 \cdot 2^x + 23}{4^x - 9 \cdot 2^x + 14} \geq 0$.

16. Угол BAC треугольника ABC равен α . Сторона BC является хордой окружности с центром O и радиусом R , проходящей через центр окружности, вписанной в треугольник ABC .

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABOC$ можно описать окружность.

б) Известно, что в четырёхугольник $ABOC$ можно вписать окружность. Найдите радиус r этой окружности, если $R = 6$, $\alpha = 60^\circ$.

17. Светлана Михайловна взяла кредит в банке на 4 года на сумму 4 420 000 рублей. Условия возврата кредита таковы: в конце каждого года банк увеличивает текущую сумму долга на 10%. Светлана Михайловна хочет выплатить весь долг двумя равными платежами — в конце второго и четвертого годов. При этом платежи в каждом случае выплачиваются после начисления процентов. Сколько рублей составит каждый из этих платежей?

18. Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2\sin x + \cos x = a$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

19. Назовем натуральное число хорошим, если в нем можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 11.

а) Является ли число 1234 хорошим?

б) Является ли число 12345 хорошим?

в) Найти наибольшее хорошее число, состоящее из различных нечетных цифр.

ПРОБНЫЙ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут. Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение.

Ответ

–0,3

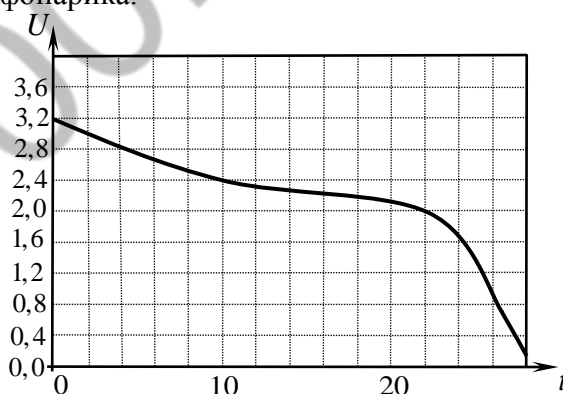
Запись в бланк ответов

5	–	0	,	3			
---	---	---	---	---	--	--	--

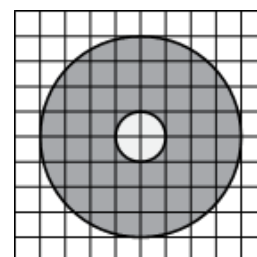
ВАРИАНТ 2

Ответом на задания 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 9% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 8 кг в течение суток?
- При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, на сколько вольт упадёт напряжение с 10-го по 22-й час работы фонарика.



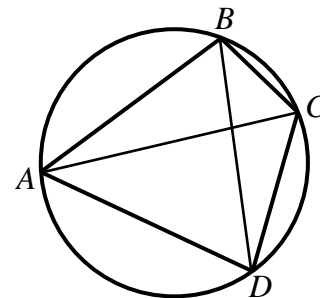
- На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 37. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



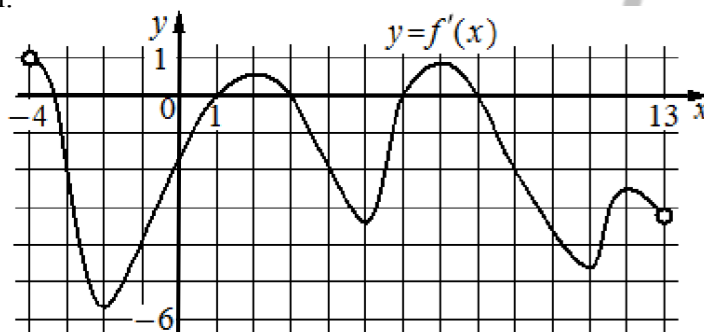
4. В классе 21 шестиклассник, среди них два друга — Митя и Петя. Класс случайным образом делят на три группы, по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Митя и Петя окажутся в разных группах.

5. Решите уравнение $\log_{27} 3^{5x+5} = 2$.

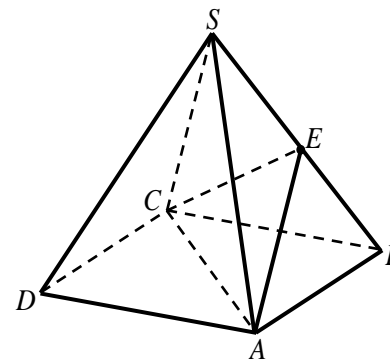
6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 61° , угол CAD равен 37° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ некоторой функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 10$ или совпадает с ней.



8. Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 116. Точка E — середина ребра SB . Найдите объём треугольной пирамиды $EABC$.



9. Найдите значение выражения $\sqrt{108} \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sqrt{27}$.

10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 36$ см.

Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 см до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см.

Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$.

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

11. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в город B на 12 часов раньше, чем велосипедист приехал в город A , а встретились они через 2 часа 30 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из города B в город A велосипедист?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 5e^x - 2$ на отрезке $[-2; 1]$.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

13. а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) - 2\cos 2x = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14. Основание пирамиды $PABC$ — правильный треугольник ABC , сторона которого равна 16, боковое ребро PA — $8\sqrt{3}$. Высота пирамиды PH делит высоту AM треугольника ABC пополам. Через вершину A проведена плоскость α , перпендикулярная прямой PM и пересекающая прямую PM в точке K .

а) Докажите, что плоскость α делит высоту PH пирамиды $PABC$ в отношении 2:1, считая от вершины P .

б) Найдите расстояние между прямыми PH и CK .

15. Решите неравенство $\log_{x^2+1} \frac{2 \cdot 9^x - 19 \cdot 3^x + 40}{9^x - 11 \cdot 3^x + 24} \geq 0$

16. Угол MKN треугольника KMN равен φ . Сторона MN является хордой окружности с центром O и радиусом R , проходящей через центр окружности, вписанной в треугольник MKN .

а) Докажите, что около четырёхугольника $KMON$ можно описать окружность.

б) Известно, что в четырёхугольник $KMON$ можно вписать окружность. Найдите радиус r этой окружности, если $R = 12$, $\varphi = 120^\circ$.

17. Агата Артуровна взяла кредит в банке на 4 года на сумму 7 320 000 рублей. Условия возврата кредита таковы: в конце каждого года банк увеличивает текущую сумму долга на 20%. Агата Артуровна хочет выплатить весь долг двумя равными платежами — в конце второго и четвертого годов. При этом платежи в каждом случае выплачиваются после начисления процентов. Сколько рублей составит каждый из этих платежей?

18. Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение $3\sin x = \cos x + a$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

19. Назовем натуральное число хорошим, если в нем можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 11.

а) Является ли число 5432 хорошим?

б) Является ли число 10235 хорошим?

в) Найти наименьшее хорошее число, состоящее из различных нечетных цифр.