Ответы для варианта 29527685

Задание №1 решение и ответ:

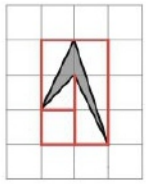
Цена бензина составляет $28 \cdot 28{,}5 = 798$ руб. Поэтому причитающаяся сдача $1000 - 798 = 202$ рубля. Ответ: 202.

Задание №2 решение и ответ:

Ответ: 5

Задание №3 решение и ответ:

Площадь четырехугольника равна разности площади большого прямоугольника, четырёх прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного четырехугольника и площади маленького квадрата. Поэтому



$$S = 2 \cdot 3 - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} - 1 \cdot 1 = 1 \text{ см}^2.$$

Задание №4 решение и ответ:

Рассмотрим события A = «в автобусе меньше 15 пассажиров» и B = «в автобусе от 15 до 19 пассажиров». Их сумма — событие A + B = «в автобусе меньше 20 пассажиров». События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: $0{,}94 = 0{,}56 + P(B)$, откуда $P(B) = 0{,}94 - 0{,}56 = 0{,}38$.

Ответ: 0,38.

Задание №5 решение и ответ:

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{3x - 8} = 5 \Leftrightarrow 3x - 8 = 25 \Leftrightarrow 3x = 33 \Leftrightarrow x = 11.$$

Ответ: 11.

Задание №6 решение и ответ:

Заметим, что $\angle CDL = \angle ALD$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых секущей. Значит, треугольник ADL – равнобедренный. Пусть $AL = 4x$, тогда $AD = 4x$, $AB = 7x$. Противоположные стороны параллелограмма $ABCD$ попарно равны, тогда

$$P_{ABCD} = 2(AD + AB) = 22x = 88,$$

откуда $x = 4$. Находим $AB = 7x = 28$.

Ответ: 28.

Задание №7 решение и ответ:

Производная функции отрицательна в тех точках, которые принадлежат участкам убывания функции. Это точки x3, x4, x7 — всего 3 точки. Ответ: 3.

Задание №8 решение и ответ:

Сторона правильного шестиугольника a выражается через радиус r вписанной в него окружности формулой $a = \frac{2}{\sqrt{3}}r$. Тогда площадь боковой поверхности призмы выражается формулой

$$S = P_{\text{осн}}H = 6aH = \frac{12}{\sqrt{3}}rH = 12 \cdot 2 = 24.$$

Ответ: 24.

Задание №9 решение и ответ:

Используем формулу синуса двойного угла $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$:

$$8\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12} = 4\sin\frac{5\pi}{6} = 4\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 4\sin\frac{\pi}{6} = 4\cdot\frac{1}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

Задание №10 решение и ответ:

Задача сводится к решению неравенства $\frac{L}{u}\operatorname{ctg}\alpha \le 200$ на интервале $(0^\circ;\ 90^\circ)$ при заданных значениях длины реки $L = 100$ м и скорости течения $u = 0{,}5$ м/с:

$$\frac{100}{0{,}5}\operatorname{ctg}\alpha \le 200 \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha \le 1 \underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow} 45^\circ \le \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 45.

Задание №11 решение и ответ:

В первый день Вера подписала $a_1 = 10$ открыток, во второй — a_2, …, в последний — a_{16} открыток. Всего было подписано $S_n = 640$ открыток. Если количество подписываемых открыток увеличивалось на d каждый день, то

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} n \Leftrightarrow 640 = \frac{2 \cdot 10 + 15d}{2} \cdot 16 \Leftrightarrow 80 = 20 + 15d \Leftrightarrow d = 4.$$

Тогда

$$a_4 = a_1 + 3d = 10 + 3 \cdot 4 = 22.$$

Следовательно, за четвертый день было подписано 22 открытки.

Ответ: 22.

Задание №12 решение и ответ:

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:

Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

Задание №13 решение и ответ:

Перенесём $5x$ в левую часть уравнения и прибавим к обеим его частям число 12, получим:

$$\sqrt{2x^2-5x+12}+2x^2=5x \Leftrightarrow 2x^2-5x+12+\sqrt{2x^2-5x+12}=12$$

Пусть $\sqrt{2x^2-5x+12}=t\geq 0$, тогда уравнение принимает вид:

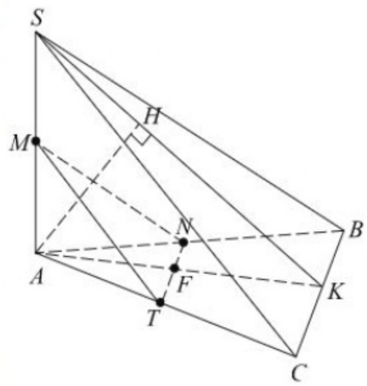
$$t^2+t=12 \Leftrightarrow t^2+t-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4, \\ t=3 \end{array}\right. \underset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t=3.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\sqrt{2x^2-5x+12}=3 \Leftrightarrow 2x^2-5x+12=9 \Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Задание №14 решение и ответ:



а) Пусть AH — искомая высота. Проведем SK, $H \in$ SK. Проведем AK. Поскольку T и N — середины AC и AB соответственно, то TN — средняя линия треугольника ABC. Тогда TN делит AK на две равные части. Поэтому MF — средняя линия треугольника SKA, она делит AH на две равные части.

б) Поскольку $AB = AC$, то треугольник ABC — равнобедренный. Имеем $SC = SB$, следовательно, треугольник SCB тоже равнобедренный. Зная, что $SA \perp (ABC)$, имеем $SA \perp AB$. Тогда треугольники SAC и SAB равны по двум сторонам и углу между ними.

Так как $AC = AB$, $AH \perp (CBS)$, следовательно, $HC \perp AH$, $AH \perp HB$, тогда $HC = HB$. Значит, точка H принадлежит серединному перпендикуляру к CB, то есть SK, так как SK — медиана, высота и биссектриса равнобедренного треугольника. Тогда $CK=\sqrt{5}$, AK — биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника ABC. По теореме Пифагора $AK = 2\sqrt{5}$.

Поскольку $SA \perp (ABC)$, $SA \perp AK$. Тогда по теореме Пифагора $SK = 5$. Имеем $SA^2 = SK\cdot SH$, то есть $SH = 1$. Тогда $HK = 4$, следовательно, $AH = 2$. Тогда искомое расстояние равно 1.

Ответ: б) 1.

Задание №15 решение и ответ:

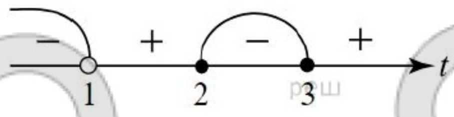
Получим:

$$2^{2x-x^2-1}+\frac{1}{2^{2x-x^2}-1}\le 2 \Leftrightarrow \frac{2^{2x-x^2}}{2}+\frac{1}{2^{2x-x^2}-1}-2\le 0.$$

Пусть $2^{2x-x^2}=t$. Тогда

$$\frac{t}{2}+\frac{1}{t-1}-2\le 0\Leftrightarrow \frac{t^2-t+2-4t+4}{2(t-1)}\le 0\Leftrightarrow \frac{t^2-5t+6}{t-1}\le 0\Leftrightarrow \frac{(t-2)(t-3)}{t-1}\le 0.$$

Полученное неравенство решим методом интервалов.



Итак, $t<1,\ 2\le t\le 3$. Перейдем к переменной x.

$$2^{2x-x^2}<1\Leftrightarrow 2^{2x-x^2}<2^0\Leftrightarrow 2x-x^2<0\Leftrightarrow x^2-2x>0\Leftrightarrow x(x-2)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<0,\\ x>2.\end{array}\right.$$

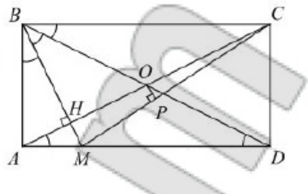
$$2\le 2^{2x-x^2}\le 3\Leftrightarrow \begin{cases}2^{2x-x^2}\ge 2,\\ 2^{2x-x^2}\le 2^{\log_2 3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2x-x^2-1\ge 0,\\ 2x-x^2\le \log_2 3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+1\le 0,\\ x^2-2x+\log_2 3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2\le 0,\\ x^2-2x+\log_2 3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1,\\ -1+\log_2 3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=1,\\ \log_2 3\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Таким образом, $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)\cup\{1\}$.

Ответ: $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)\cup\{1\}$.

Задание №16 решение и ответ:



а) Обозначим $\angle CBD = \alpha$. Треугольник BMD равнобедренный, поэтому $\angle DBM = \angle BDM = \angle CBD = \alpha$.

Прямоугольные треугольники ACB и BDA равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle ACB = \angle ADB = \alpha$.

Пусть H — точка пересечения BM и AC. Тогда BH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла. Значит, $\angle ABH = \angle ACB = \alpha$. Следовательно,

$$\angle ABM = \angle DBM = \angle CBD = \frac{1}{3}\cdot 90^\circ = 30^\circ.$$

б) Имеем $AB = BC\cdot \operatorname{tg}30^\circ = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$, $AM = AB\cdot\operatorname{tg}30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$, $MD = AD - AM = 9 - 3 = 6$.

Из прямоугольного треугольника CMD находим $MC = \sqrt{CD^2 + MD^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = 3\sqrt{7}$.

Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Расстояние от центра O прямоугольника $ABCD$ до прямой CM равно высоте OP треугольника CMO. Площадь треугольника CMO равна половине площади треугольника ACM:

$$S_{OCM} = \frac{1}{2}S_{ACM} = \frac{1}{4}AM\cdot AB = \frac{1}{2}CM\cdot OP.$$

$$OP = \frac{AM\cdot AB}{2\cdot MC} = \frac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Задание №17 решение и ответ:

В июле 2017, 2018 и 2019 годов долг перед банком не меняется, а ежегодные выплаты составляют $0{,}2S$ тыс. рублей.
В январе 2020 года долг (в тыс. рублей) равен $1{,}2S$, а в июле — $1{,}2S - 360$.
В январе 2021 года долг равен $1{,}44S - 432$, а в июле $1{,}44S - 792$.
По условию, долг будет выплачен полностью, значит, $1{,}44S - 792 = 0$, откуда $S = 550$.
Таким образом, первые три выплаты составляют по 110 тыс. рублей, а последние две — по 360 тыс. рублей.
Общая сумма выплат составляет:

$$3\cdot 110 + 2\cdot 360 = 1050 \text{ (тыс. рублей)}.$$

Ответ: 1050 тыс. рублей.

Задание №18 решение и ответ:

1. При $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)\le 0 \Leftrightarrow x\in[1,5]$ функция имеет вид:

$$f(x)=4ax-(x^2-6x+5)=-x^2+2(2a+3)x-5,$$

а её график представляет собой часть параболы с ветвями, направленными вниз.

При $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$ функция имеет вид:

$$f(x)=4ax+(x^2-6x+5)=x^2+2(2a-3)x+5,$$

а ее график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x=3-2a$.

2. Если $3-2a$ принадлежит отрезку $[1,5]$, то наименьшее значение функция может принимать только в точках $x=1$ и $x=5$. Если $3-2a\in(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$ — то в точке $x=3-2a$.

3. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше -24 тогда и только тогда, когда либо

$$\begin{cases}3-2a\in[1,5],\\ f(1)>-24,\\ f(5)>-24,\end{cases}\quad\text{либо}\quad\begin{cases}3-2a\in(-\infty,1]\cup[5,+\infty),\\ f(3-2a)>-24.\end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases}-1\le a\le 1,\\ 4a>-24,\\ 20a>-24\end{cases}\Leftrightarrow a\in[-1,1].$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases}a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\\ |2a-3|<\sqrt{29}\end{cases}\Leftrightarrow a\in\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2},-1\right)\cup\left(1,\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right).$$

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2},\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$.

Задание №19 решение и ответ:

Пусть всего a овощей тяжелее 1000 г (а их суммарная масса S_1), b овощей весят 1000 г (их суммарная масса S_2), c овощей легче 1000 г (их суммарная масса S_3). Тогда условие записывается системой:

$$\begin{cases}a+b+c=73,\\ S_1+S_2+S_3=73000,\\ S_1=1030a,\\ S_2=1000b,\\ S_3=988c.\end{cases}$$

а) В этом случае $a=c$ и $b=73-2a$. Из системы имеем: $1030a+1000\cdot(73-2a)+988a=73000$, откуда $a=0$. Противоречие с условием, так как овощи тяжелее килограмма есть, поскольку их средняя масса 1030 г.

б) В этом случае $b=11$. Тогда из системы имеем: $11+a+c=73$ и $1030a+11000+988c=73000$, откуда $21a=372$. Но тогда a — нецелое число. Противоречие.

в) Пусть x — масса самого легкого овоща. Тогда средняя масса овощей, которые легче 1000 г, не превосходит

$$\frac{x+999\cdot(c-1)}{c}=999-\frac{999-x}{c}.$$

Это выражение должно быть не меньше 988. Решая неравенство $999-\frac{999-x}{c}\ge 988$, получаем $x\ge 999-11c$. Следовательно, чтобы найти минимальное возможное x, надо найти максимально возможное c.

Из уравнения $1030a+1000b+988c=73000$ следует, что c кратно 5. Кроме того, c меньше 73. Максимальное c, при котором уравнение имеет натуральные решения (b может равняться и 0), это $c=50$ $(a=20, b=3)$. Необходимо убедиться, что c не может равняться 70, 65, 60 и 55. Подставляя эти значения c в уравнение, мы получим, что $103a+100b$ может равняться 384, 878, 1372, 1866. Покажем, что эти уравнения не имеют решений в целых неотрицательных числах. Действительно, пусть, например, $103a+100b=384$. Это означает, что $3a-84=100\cdot(3-a-b)$. Т.е. $3a-84$ кратно 100. Аналогично, $3a-78, 3a-72, 3a-66$ кратны 100. Это означает, что a в этих случаях как минимум 22, но тогда b, очевидно, отрицательно.

Тогда, минимальное возможное x получается из уравнения $x=999-11c$, откуда $x=449$ (иначе будет противоречие с необходимым неравенством, полученным выше). Пример следует из решения: один овощ массой 449 г., сорок девять овощей массой 999 г., три овоща массой 1000 г. и двадцать овощей массой 1030 г.

Ответ: а) Нет; б) Нет; в) 449.